Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Игнатъев, В. В. Кириченко, О необходимых условиях глобальной асимптотической устойчивости положения равновесия уравнения Льева, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 1, 63–71

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9078>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 18:15:01

О необходимых условиях глобальной асимптотической устойчивости положения равновесия уравнения Льенара

А. О. Игнатьев, В. В. Кириченко

В статье [1] для уравнения Льенара $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$, $g(0) = 0$ при выполнении условия

$$x \int_0^x f(s) ds \geq 0 \quad (\text{A})$$

получены необходимые и достаточные условия глобальной асимптотической устойчивости его нулевого решения. В этой же работе автор поставил задачу: определить, является ли условие (A) необходимым условием для глобальной асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения Льенара. Настоящая статья дает ответ на этот вопрос. Ответ отрицательный: условие (A) не является необходимым.

Библиография: 30 названий.

DOI: 10.4213/mzm9078

Посвящается памяти А. Я. Савченко

1. Введение. Классический метод функций Ляпунова для исследования асимптотической устойчивости предполагает существования определенно-положительной функции Ляпунова, производная которой в силу системы дифференциальных уравнений возмущенного движения определенно-отрицательна. Однако в приложениях часто встречаются системы, для которых возможно построить определенно-положительную функцию, производная которой является не определенно-отрицательной, а лишь неположительной. Именно для таких систем Барбашиным и Красовским [2] получен эффективный критерий асимптотической устойчивости для случая автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В дальнейшем, используя эту идею, аналогичные теоремы были доказаны для периодических и почти периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений [3]–[6], для систем функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием [7]–[13] для стохастических дифференциальных уравнений [14], для дифференциальных включений [15], для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве [16] и для исследования устойчивости относительно части переменных [17]. Отметим также работы [18]–[24], в которых для исследования устойчивости применяются знакопостоянные функции (функционалы) Ляпунова. Во всех перечисленных работах идея

метода Барбашина–Красовского использована для исследования достаточных условий асимптотической устойчивости невозмущенных движений. В настоящей заметке теорема Барбашина–Красовского используется для исследования необходимых условий глобальной асимптотической устойчивости¹ положения равновесия уравнения Лъенара

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0, \quad (1)$$

где $\dot{x} = dx/dt$, $\ddot{x} = d^2x/dt^2$, $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные функции ($f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$), причем $g(0) = 0$. Это уравнение является предметом пристального изучения многими авторами: в работах [25]–[27] рассмотрены вопросы, связанные с существованием и количеством предельных циклов, в [28] изучается вопрос существования аналитических первых интегралов в окрестности положения равновесия системы, а работы [29], [30] посвящены исследованию устойчивости по Ляпунову.

В работе [1] для уравнений Лъенара, удовлетворяющих условию

$$x \int_0^x f(s) ds \geq 0, \quad (2)$$

доказано, что нулевое решение $x = 0$, $\dot{x} = 0$ уравнения (1) глобально асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда

$$xg(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0, \quad (3)$$

$$\int_0^x f(s) ds \neq 0 \quad \text{при} \quad x \in (-\xi, \xi), \quad \xi > 0, \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sup \left[\int_0^x g(s) ds - \int_0^x f(s) ds \right] = \infty, \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup \left[\int_0^x g(s) ds + \int_0^x f(s) ds \right] = \infty. \quad (6)$$

В этой же статье автором поставлена задача: *установить, является ли условие (2) необходимым условием глобальной асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1).*

(В случае, если условие (2) является не только достаточным, но и необходимым, условия (2)–(6) являются необходимыми и достаточными условиями глобальной асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1).) Решению этой задачи, используя модификацию теоремы Барбашина–Красовского, посвящена эта заметка. Ответ отрицательный: условие (2) не является необходимым.

2. Основные определения и некоторые вспомогательные утверждения.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(x), \quad X(0) = 0, \quad (7)$$

где $X: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция. Эта система допускает тривиальное решение

$$x = 0. \quad (8)$$

Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ – некоторое неограниченное инвариантное множество системы (7), содержащее начало координат.

¹В русскоязычной литературе глобальную асимптотическую устойчивость часто называют асимптотической устойчивостью в целом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Решение (8) системы (7) назовем *устойчивым условно* относительно инвариантного множества $\mathcal{M}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что из условий $x(0) \in \mathcal{M}$, $\|x(0)\| < \delta$ следует $\|x(t)\| < \varepsilon$ при $t > 0$, где $x(t) = x(t, x(0))$ – решение, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x(0, x(0))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Решение (8) системы (7) назовем *глобально притягивающим условно* относительно инвариантного множества $\mathcal{M}$, если из условия $x(0) \in \mathcal{M}$ следует $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Решение (8) системы (7) назовем *глобально асимптотически устойчивым условно* относительно инвариантного множества $\mathcal{M}$, если оно устойчиво условно относительно $\mathcal{M}$ и глобально притягивающее условно относительно $\mathcal{M}$.

Сформулируем модификацию теоремы Барбашина–Красовского для случая условной глобальной асимптотической устойчивости.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathcal{M}$ – инвариантное множество системы (7), содержащее начало координат. Если для системы дифференциальных уравнений (7) можно построить непрерывно-дифференцируемую функцию $v: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ такую, что $v(x) > 0$ при $x \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$, $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} v(x) = +\infty$, $dv/dt \leq 0$, причем $dv/dt = 0$ при $x \in \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$, где $\mathcal{M}_0$ – множество, не содержащее целых полутраекторий системы (7), то решение (8) системы (7) глобально асимптотически устойчиво условно относительно множества $\mathcal{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 1 полностью совпадает с доказательством классической теоремы Барбашина–Красовского (различие состоит лишь в том, что при доказательстве этой леммы нужно выбирать $x(0) \in \mathcal{M}$), поэтому оно опущено.

3. Доказательство основного результата. Перейдем к изучению глобальной асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1). Сформулируем основной результат настоящей заметки.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Условие (2) не является необходимым условием глобальной асимптотической устойчивости решения $x = 0$, $\dot{x} = 0$ уравнения (1).

Для доказательства этого утверждения укажем такое дифференциальное уравнение вида (1), что его нулевое решение является глобально асимптотически устойчивым, но условие (2) не выполняется. Для этого выберем $f(x) = x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$, $g(x) = x$ и рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + (x^2 - 5x + 4)\dot{x} + x = 0, \quad (9)$$

допускающее тривиальное решение

$$x = 0, \quad \dot{x} = 0. \quad (10)$$

Обозначив $\dot{x} = y$, запишем уравнение (9) в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - (x^2 - 5x + 4)y. \quad (11)$$

Эта система допускает тривиальное решение

$$x = 0, \quad y = 0, \quad (12)$$

соответствующее решению (10) уравнения (9).

Проверим, что условие (2) не выполняется. Находим

$$x \int_0^x f(s) ds = x \int_0^x (s^2 - 5s + 4) ds = \frac{x^2}{6}(2x^2 - 15x + 24).$$

Действительно, получаем $x \int_0^x f(s) ds < 0$ при $x \in (1/4(15 - \sqrt{33}); 1/4(15 + \sqrt{33}))$. Докажем теперь, что решение (12) системы (11) глобально асимптотически устойчиво. Покажем вначале, что нулевое решение системы (11) асимптотически устойчиво (локально).

ТЕОРЕМА 1. *Решение (12) уравнений (11) асимптотически устойчиво, и множество $x^2 + y^2 \leq 1$ содержится в области его притяжения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем начальные значения $x_0 = x(0)$ и $y_0 = y(0)$, удовлетворяющие равенству $x_0^2 + y_0^2 = r_0^2$, где $0 < r_0 \leq 1$. Выберем в качестве функции Ляпунова функцию

$$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2). \quad (13)$$

Ее производная в силу системы (11) равна

$$\dot{V} = -(x^2 - 5x + 4)y^2. \quad (14)$$

В области $x^2 + y^2 \leq 1$ эта производная неотрицательна и обращается в нуль лишь на множестве $y = 0$. Учитывая, что кроме решения (12) система (11) не имеет других решений вида $x = \varphi(t)$, $y = 0$, по теореме Барбашина–Красовского заключаем, что тривиальное решение уравнений (11) асимптотически устойчиво, и множество $x^2 + y^2 \leq 1$ содержится в области его притяжения, что и следовало доказать.

Теперь отметим несколько свойств, которыми обладают решения системы дифференциальных уравнений (11). Для этого введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 4, y > \frac{1}{2} \right\}, \\ \mathcal{Q}_2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 4, 0 < y \leq \frac{1}{2} \right\}, \\ \mathcal{Q}_3 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 4, -1 \leq y \leq 0 \right\}, \\ \mathcal{Q}_4 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 4, y < -1 \right\}, \\ \mathcal{Q} &= \bigcup_{i=1}^4 \mathcal{Q}_i. \end{aligned}$$

СВОЙСТВО 1. *На лучах $\{x = 1, y > 0\}$ и $\{x = 4, y < 0\}$ траектории системы (11) входят в область $\mathcal{Q}$, а на лучах $\{x = 4, y > 0\}$ и $\{x = 1, y < 0\}$ выходят из нее.*

Это свойство непосредственно следует из первого уравнения системы (11).

СВОЙСТВО 2. *Пусть $y_* > 0$. Траектория $x(t)$, $y(t)$ системы (11), выходящая из области $\mathcal{Q}$ в точке $(4; y_*)$, входит затем в эту область в точке $(4; y_{**})$, где $-y_* < y_{**} < 0$.*

ДОКАЖЕМ это свойство. Действительно, пусть траектория $x(t), y(t)$ системы (11) выходит из области $\mathcal{Q}$ в точке $(4; y_*)$ в момент t_* (т.е. $x(t_*) = 4, y(t_*) = y_*$) и входит затем в эту область в точке $(4; y_{**})$ в момент t_{**} (т.е. $x(t_{**}) = 4, y(t_{**}) = y_{**}, t_* < t_{**}$), причем при $t_* < t < t_{**}$ эта траектория расположена в области $x > 4$. Так как при $x > 4$ функция $x^2(t) + y^2(t)$ убывает в силу (14), то $x^2(t_*) + y^2(t_*) > x^2(t_{**}) + y^2(t_{**})$. Учитывая, что $x(t_*) = x(t_{**}) = 4$, получаем $|y(t_*)| > |y(t_{**})|$, и из условий $|y(t_*)| = y(t_*) = y_*, |y(t_{**})| = -y(t_{**}) = -y_{**}$ следует свойство 2.

СВОЙСТВО 3. Суммарное время Δt , в течение которого траектория системы (11) может лежать в области $\mathcal{Q}_2 \cup \mathcal{Q}_3$ конечно, и справедлива оценка $\Delta t \leq 12/7$.

Это свойство следует из свойств 1, 2 и из того, что

$$-5 \leq -x - (x^2 - 5x + 4)y \leq -\frac{7}{8}$$

при $x \in [1; 4], y \in [-1; 1/2]$.

СВОЙСТВО 4. Из области $\mathcal{Q}_3$ траектория системы (11) может либо переходить в область $\mathcal{Q}_4$, либо покидать область через отрезок прямой $x = 1$ при $y \in [-1; 0]$.

Рис. 1

Рассмотрим на плоскости Oxy ветвь кривой

$$y = -\frac{x}{x^2 - 5x + 4} \quad (15)$$

при $x < 1$. Обозначим точки ее пересечения с окружностью

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (16)$$

буквами F и D ($x_F < x_D$). Кроме того, на этой ветви рассмотрим точки A, B и E со следующими свойствами: $x_B = -2, y_B = 1/9$ (в этой точке функция (15) достигает максимума); точки A и E – это произвольные точки кривой (15), удовлетворяющие соответственно неравенствам $x_A < x_B, x_D < x_E < 1$. Рассмотрим также отрезок прямой BK , параллельный оси Ox , где $x_K = -\sqrt{80}/9, y_K = y_B = 1/9$ (точка K

принадлежит окружности $x^2 + y^2 = 1$). Обозначим $\mathcal{N}$ множество точек на плоскости Oxy , содержащее начало координат и ограниченное ветвью AB кривой (15) при $-\infty < x \leq x_B$, отрезком прямой BK , дугой KCD окружности (16) (где C — точка с координатами $x_C = 0$, $y_C = 1$) и ветвью DE кривой (15) при $x_D < x < 1$. Множество $\mathcal{N}$ не ограничено.

ЛЕММА 2. *Множество $\mathcal{N}$ инвариантно относительно системы (11).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно показать, что при возрастании t траектории уравнений (11) двигаются внутрь множества $\mathcal{N}$, если начальное значение $(x_0; y_0)$ принадлежит границе $\mathcal{N}$. Действительно, на участке AB границы (т.е. при $x < x_B$) имеем $\dot{x} > 0$, $\dot{y} = 0$, а на участке DE (т.е. при $x_D < x < 1$): $\dot{x} < 0$, $\dot{y} = 0$ и траектории двигаются внутрь множества $\mathcal{N}$. Точки дуги KCD окружности $x^2 + y^2 = 1$ согласно теореме 1 также обладают этим свойством. Проверим теперь, что движение, начинающееся на отрезке прямой BK , также обладает этим свойством. Для этого достаточно показать, что

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{y=y_B} \leq 0.$$

Действительно,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} - (x^2 - 5x + 4), \quad (17)$$

откуда

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{y=y_B} = -\frac{x}{y_B} - (x^2 - 5x + 4) = -9x - x^2 + 5x - 4 = -(x+2)^2 \leq 0.$$

Это означает, что траектории системы (11) с начальными значениями $(x_0; y_0)$, принадлежащими границе множества $\mathcal{N}$, двигаются внутрь множества $\mathcal{N}$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 3. *Траектории системы (11) с начальными значениями из множества $\mathcal{N}$ ограничены и стремятся к началу координат при $t \rightarrow \infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения непосредственно следует из теоремы 1 и лемм 1 и 2.

Теперь перейдем к доказательству глобальной асимптотической устойчивости решения (12) системы (11).

ТЕОРЕМА 2. *Нулевое решение системы (11) глобально асимптотически устойчиво.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было доказано ранее, решение (12) системы (11) асимптотически устойчиво (локально). Для доказательства его глобальной асимптотической устойчивости достаточно показать [3], что все решения $x(t, x_0, y_0)$, $y(t, x_0, y_0)$ этой системы обладают следующими свойствами:

- для любого $r > 0$ и любых x_0, y_0 , удовлетворяющих условию $x_0^2 + y_0^2 \leq r^2$, существует такое $R = R(r) > 0$, что $x^2(t) + y^2(t) \leq R^2$ при $t > 0$;

- выполняется предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x^2(t) + y^2(t)) = 0. \quad (18)$$

В теореме 1 было показано, что эти условия выполняются в случае $r \leq 1$, и в качестве R можно выбрать $R = r$. Из леммы 3 следует, что этим свойствам удовлетворяют траектории с начальными значениями $(x_0; y_0)$ из $\mathcal{N}$.

Теперь рассмотрим случай $r > 1$. Для определенности считаем, что

$$x_0 < 1, \quad y_0 > 0, \quad (x_0, y_0) \notin \mathcal{N}. \quad (19)$$

Предположим, что траектория $x(t), y(t)$ входит в область $\mathcal{Q}_1$ в точке $(1; y_1)$, где $y_1 > 1/2$. Учитывая, что $\dot{V} \leq 0$ при $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{Q}$, заключаем, что $1 + y_1^2 \leq r^2$, откуда получаем $y_1 \leq \sqrt{r^2 - 1}$. Если траектория в течение промежутка времени, когда она находится в $\mathcal{Q}$, удовлетворяет условию $y(t) \geq 1/2$, то из (17), учитывая, что $0 \leq -(x^2 - 5x + 4) \leq 9/4$ при $x \in [1; 4]$, получаем

$$\frac{dy}{dx} \leq -\frac{x}{y} + \frac{9}{4} \leq \frac{9}{4}. \quad (20)$$

В силу оценки (20) траектория не может постоянно находиться в области $\mathcal{Q}_1$, и вынуждена покинуть эту область либо через прямую $x = 4$ (см. свойство 1), либо через прямую $y = 1/2$. Рассмотрим наиболее “неблагоприятный” вариант, когда траектория покидает область $\mathcal{Q}_1$ в точке $(4; y_2)$. Из неравенства (20) следует, что $0 < y_2 \leq y_1 + 3 \cdot (9/4) = y_1 + 27/4 \leq \sqrt{r^2 - 1} + 27/4$. Далее, в течение некоторого промежутка времени имеем $x(t) > 4$, и следующее пересечение траектории $x(t), y(t)$ с прямой $x = 4$ происходит в точке $(4; y_3)$, где согласно свойству 2 имеем $-y_2 \leq y_3 < 0$. Если $y_3 \leq -1$, то находясь в области $\mathcal{Q}_4$, траектория удовлетворяет оценкам

$$-\frac{x}{y} \leq x, \quad \frac{dy}{dx} \leq -\frac{x}{y} + \frac{9}{4} \leq x + \frac{9}{4} \leq \frac{25}{4}, \quad (21)$$

и покидает $\mathcal{Q}_4$ в точке $(1; y_4)$, где y_4 в силу (21) может быть оценено следующим образом:

$$y_4 \geq y_3 - 3 \cdot \frac{25}{4} \geq -y_2 - \frac{75}{4} \geq -\left(\sqrt{r^2 - 1} + \frac{27}{4}\right) - \frac{75}{4} = -\sqrt{r^2 - 1} - \frac{51}{2}. \quad (22)$$

После выхода из $\mathcal{Q}_4$ в некоторый момент $t_0 > 0$ траектория может либо во все дальнейшее время движения оставаться в области $x < 1, y < 0, (x, y) \notin \mathcal{N}$, либо в момент t_1 ($t_1 > t_0$) войти в $\mathcal{N}$ (см. рисунок). В первом случае будем иметь $V(x(t), y(t)) > 0, \dot{V}(x(t), y(t)) < 0$, откуда следует предельное соотношение (18). Во втором случае (18) следует из леммы 3.

Оценим число R . Согласно (22) имеем

$$y_4^2 + 1 \leq \left(\sqrt{r^2 - 1} + \frac{51}{2}\right)^2 + 1 = r^2 + 51\sqrt{r^2 - 1} + \frac{2601}{4}.$$

Следовательно, в качестве $R = R(r)$ можно выбрать

$$R = \begin{cases} r & \text{при } r \leq 1, \\ \sqrt{r^2 + 51\sqrt{r^2 - 1} + \frac{2601}{4}} & \text{при } r > 1. \end{cases} \quad (23)$$

Заметим, что оценка значения R согласно (23) выбрана при самом “неблагоприятном” движении траектории $x(t)$, $y(t)$. Если взять начальные значения x_0 , y_0 , которые не удовлетворяют соотношениям (19), либо $y_1 \leq 1/2$, либо $y_3 > -1$, то используя свойства 3 и 4, можно показать, что во всех этих случаях значение R также может быть оценено выражением (23) и выполняется предельное соотношение (18).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ch. Qian, “On global asymptotic stability of second order nonlinear differential systems”, *Nonlinear Anal.*, **22**:7 (1994), 823–833.
- [2] Н. Н. Барбашин, Е. А. Красовский, “Об устойчивости движения в целом”, *ДАН СССР*, **86**:6 (1952), 453–456.
- [3] Н. Н. Красовский, *Некоторые задачи теории устойчивости движения*, Физматгиз, М., 1959.
- [4] А. О. Игнатьев, “Некоторые обобщения теоремы Барбашина–Красовского”, *Матем. физика*, **34** (1983), 19–22.
- [5] А. О. Игнатьев, “Об устойчивости почти периодических систем относительно части переменных”, *Дифференц. уравнения*, **25**:8 (1989), 1446–1448.
- [6] A. O. Ignatyev, “On the stability of equilibrium for almost periodic systems”, *Nonlinear Anal.*, **29**:8 (1997), 957–962.
- [7] A. O. Ignatyev, “On the asymptotic stability in functional differential equations”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **127**:6 (1999), 1753–1760.
- [8] A. O. Ignatyev, “On the partial equiasymptotic stability in functional differential equations”, *J. Math. Anal. Appl.*, **268**:2 (2002), 615–628.
- [9] А. С. Андреев, “Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономного функционально-дифференциального уравнения”, *Проблемы аналитической механики, теорий устойчивости и управления*, Наука, Новосибирск, 1991, 36–40.
- [10] А. С. Андреев, *Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений*, Изд-во УлГУ, Ульяновск, 2005.
- [11] С. В. Павликов, “Предельные уравнения и функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости по части переменных”, *Уч. зап. Ульяновск. гос. ун-та. Сер. Фундамент. пробл. матем. и мех.*, **1**:13 (2003), 63–74.
- [12] С. В. Павликов, *Метод функционалов Ляпунова в задачах устойчивости*, Ин-т управления, Набережные Челны, 2006.
- [13] А. С. Андреев, “Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений”, *Автомат. и телемех.*, 2009, № 9, 4–55.
- [14] O. Ignatyev, V. Madrekar, “Barbashin–Krasovskii theorem for stochastic differential equations”, *Proc. of the Amer. Math. Soc.*, **138**:11 (2010), 4123–4128.
- [15] Е. Л. Панасенко, Е. А. Тонков, “Распространение теорем Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского об устойчивости на управляемые динамические системы”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **15**, № 3, 2009, 185–201.
- [16] G. Q. Xu, S. P. Yung, “Lyapunov stability of abstract nonlinear dynamic system in Banach space”, *IMA J. Math. Control Inform.*, **20**:1 (2003), 105–127.
- [17] А. А. Игнатьев, “Об эквивасимптотической устойчивости по части переменных”, *ПММ*, **63**:5 (1999), 871–875.
- [18] Н. Г. Булгаков, Б. С. Калигин, “Обобщение теорем второго метода Ляпунова. I. Теория”, *Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук*, 1978, № 3, 32–36.
- [19] А. А. Косов, “К методу векторных функций Ляпунова”, *Функции Ляпунова и их применение*, Наука, Новосибирск, 1986, 106–110.

- [20] А. С. Андреев, С. В. Павликов, “Исследование устойчивости функционально-дифференциальных уравнений на основе знакопостоянных функционалов Ляпунова”, *Тр. Средневожжск. матем. общ-ва*, **2**:1 (1999), 74–75.
- [21] А. С. Андреев, С. В. Павликов, “Незнакоопределенные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с конечным запаздыванием”, *МТТ*, **34** (2004), 112–120.
- [22] А. О. Игнатъев, “Исследование устойчивости с помощью знакопостоянных функций Ляпунова”, *Укр. матем. вестн.*, **2**:1 (2005), 74–83.
- [23] С. В. Павликов, “Знакопостоянные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциального уравнения”, *ПММ*, **71**:3 (2007), 377–388.
- [24] А. О. Ignatyev, O. A. Ignatyev, “Stability investigation of invariant sets by means of semidefinite Lyapunov functions”, *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, **12**:3 (2011), 1453–1458.
- [25] J. Jiang, M. Han, “Small-amplitude limit cycles of some Liénard-type systems”, *Nonlinear Anal.*, **71**:12 (2009), 6373–6377.
- [26] F. Dumortier, D. Panazzolo, R. Roussaie, “More limit cycles than expected in Liénard equations”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **135**:6 (2007), 1895–1904.
- [27] Г. А. Леонов, “Предельные циклы уравнения Лъенара с разрывными коэффициентами”, *ДАН*, **426**:1 (2009), 47–50.
- [28] J. Llibre, C. Valls, “On the local analytic integrability at the singular point of a class of Liénard analytic differential systems”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **138**:1 (2010), 253–261.
- [29] А. Ю. Александров, “Об устойчивости уравнения Лъенара с нестационарными возмущениями”, *Дифференц. уравнения*, **32**:5 (1996), 702–703.
- [30] А. Ю. Александров, “Об устойчивости векторного уравнения Лъенара с нестационарными возмущениями”, *Сиб. матем. журн.*, **40**:5 (1999), 977–986.

А. О. Игнатъев

Институт прикладной математики и механики НАН
Украины

E-mail: aoignat@mail.ru,
ignat@iamm.ac.donetsk.ua

Поступило

11.03.2011

Исправленный вариант

08.09.2011

В. В. Кириченко

Донецкий государственный университет управления

E-mail: vkir@i.ua