Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Кораблева, Параболические подстановочные представления группы ${}^2E_6(q^2)$, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 6, 899–912

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm908>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 18:03:36

УДК 512.542.5

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ПОДСТАНОВОЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ${}^2E_6(q^2)$

В. В. Кораблева

Для скрученной группы лиевского типа ${}^2E_6(q^2)$ вычислены ранги, степени, подстепени и двойные стабилизаторы подстановочных представлений по параболическим максимальным подгруппам неминимального индекса.

Библиография: 17 названий.

Изучение свойств конечных простых групп остается актуальным и после завершения классификации конечных простых групп. В частности, полезна информация о представлениях конечных простых групп подстановками. Важный класс подстановочных представлений групп лиевского типа составляют их параболические представления, т.е. представления на смежных классах по параболическим подгруппам.

Известно, что подстановочные представления минимальной степени группы лиевского типа, как правило, параболические (см. [1] и [2]). Прimitивные подстановочные представления фиксированного ранга групп лиевского типа над достаточно большими полями являются параболическими (см. [3, § 6]). Кроме того, существует тесная связь между параболическими представлениями группы лиевского типа и ее действием на своем билдинге (см. [4]).

Параболические представления минимальной степени конечных простых групп исключительного лиевского типа изучены Васильевым [5]–[7]. В работах автора [8]–[12] исследованы примитивные параболические представления неминимальной степени для всех конечных простых групп исключительного лиевского типа, кроме группы ${}^2E_6(q^2)$. В данной работе определяются степени, ранги, подстепени и двойные стабилизаторы подстановочных представлений группы ${}^2E_6(q^2)$ на смежных классах по параболическим максимальным подгруппам неминимального индекса. Полученные результаты для представителей P_2, P_3, P_4 сопряженных классов этих подгрупп (их определение см. ниже) даются в табл. 1, 2, 3 соответственно. В этих таблицах для l -й подорбиты указываются сопрягающий элемент y_l , подстепень n_l и строение двойного стабилизатора $P_j \cap P_j^{y_l}$, соответствующие этой подорбите. Сопрягающие элементы y_l явно указываются в тексте статьи.

Пусть G – конечная группа лиевского типа и P – параболическая максимальная подгруппа в G . Тогда можно рассмотреть представление группы G подстановками множества Ω правых смежных классов по подгруппе P , в котором произвольному элементу g из G соответствует подстановка, переводящая каждый смежный класс Px в Pxg . Подгруппа P является стабилизатором G_α точки $\alpha = P$ из Ω в данном представлении, и каждый стабилизатор другой точки, отличной от α , сопряжен с P . Рассмотрим действие G на $\Omega \times \Omega$. Орбиты группы G на $\Omega \times \Omega$ называются *орбитами* группы G на Ω .

ТАБЛ. 1. Подстановочное представление группы ${}^2\bar{E}_6(q^2)$ по подгруппе P_2

y_l	$P_2 \cap P_2^{y_l}$	n_l
y_1	$(p^{2s} \cdot (p^{9s} \cdot p^{17s})) : (p^{5s} : (\bar{A}_1(q^2) : ((q^2 - 1) \times (q - 1)^2)))$	$\frac{q(q^6 - 1)}{q - 1}$
y_2	$(p^{2s} \cdot (p^{8s} \cdot p^{13s} \times p^{2s})) : (p^{5s} : (\bar{A}_1(q^2) : ((q^2 - 1) \times (q - 1)^2)))$	$\frac{q^4(q^6 - 1)}{q - 1}$
y_3	$(p^{3s} \cdot (p^{7s} \cdot p^{13s} \times p^s)) : ((p^{2s} \cdot p^{4s} \times p^s) : ((q^2 - 1)^2 \times (q - 1)^2))$	$\frac{q^5(q^6 - 1)(q^2 + 1)}{q - 1}$
y_4	$(p^s \cdot p^{18s} \times p^s) : (p^s : (\bar{A}_2(q^2) : (q - 1)^2))$	$q^9(q + 1)$
y_5	$(p^{6s} \cdot p^{12s} \times p^{2s}) : (p^{4s} : ((\bar{A}_1(q) \times \bar{A}_1(q^2)) : ((q^2 - 1) \times (q - 1))))$	$q^9(q^4 + q^2 + 1)$
y_6	$(p^s \cdot (p^{4s} \cdot p^{5s} \times p^{8s}) \times p^s) : (p^{5s} : (\bar{A}_1(q^2) : ((q^2 - 1) \times (q - 1)^2)))$	$\frac{q^{10}(q^6 - 1)}{q - 1}$
y_7	$(p^{2s} \cdot (p^{4s} \cdot p^{8s} \times p^{4s}) \times p^s) : (p^{5s} : (\bar{A}_1(q^2) : ((q^2 - 1) \times (q - 1)^2)))$	$\frac{q^{10}(q^6 - 1)}{q - 1}$
y_8	$(p^{2s} \cdot (p^{4s} \cdot p^{7s} \times p^{4s}) \times p^s) : ((p^{2s} \cdot p^{4s} \times p^s) : ((q^2 - 1)^2 \times (q - 1)^2))$	$\frac{q^{11}(q^6 - 1)(q^2 + 1)}{q - 1}$
y_9	$(p^s \cdot p^{10s} \times p^{4s}) : (p^{5s} : (\bar{A}_1(q^2) : ((q^2 - 1) \times (q - 1)^2)))$	$\frac{q^{14}(q^6 - 1)}{q - 1}$
y_{10}	$(p^{4s} \cdot p^{8s} \times p^{3s}) : (p^{5s} : (\bar{A}_1(q^2) : ((q^2 - 1) \times (q - 1)^2)))$	$\frac{q^{14}(q^6 - 1)}{q - 1}$
y_{11}	$(p^s \cdot p^{8s} \times p^{4s}) : (p^{4s} : ((\bar{A}_1(q) \times \bar{A}_1(q^2)) : ((q^2 - 1) \times (q - 1))))$	$q^{16}(q^4 + q^2 + 1)$
y_{12}	$(p^{3s} \cdot p^{8s} \times p^s) : ((p^{2s} \cdot p^{4s} \times p^s) : ((q^2 - 1)^2 \times (q - 1)^2))$	$\frac{q^{17}(q^6 - 1)(q^2 + 1)}{q - 1}$
y_{13}	$p^{10s} : (p^s : (\bar{A}_2(q^2) : (q - 1)^2))$	$q^{19}(q + 1)$
y_{14}	$p^{9s} : (p^{5s} : (\bar{A}_1(q^2) : ((q^2 - 1) \times (q - 1)^2)))$	$\frac{q^{20}(q^6 - 1)}{q - 1}$
y_{15}	$p^{6s} : (p^{5s} : (\bar{A}_1(q^2) : ((q^2 - 1) \times (q - 1)^2)))$	$\frac{q^{23}(q^6 - 1)}{q - 1}$
y_{16}	$(\bar{A}_1(q) \times \bar{A}_2(q^2)) : (q - 1)$	q^{29}
y_{17}	$(p^{2s} \cdot (p^{9s} \cdot p^{18s})) : ((\bar{A}_1(q) \times \bar{A}_2(q^2)) : (q - 1))$	1

Для каждого орбитала Δ группы G определим

$$\Delta(\alpha) = \{\beta \in \Omega \mid (\alpha, \beta) \in \Delta\}.$$

Отображение $\Delta \mapsto \Delta(\alpha)$ является биекцией множества орбиталов группы G на множество орбит подгруппы G_α на Ω . В частности, число орбиталов группы G равно числу орбит стабилизатора G_α , это число называется (*подстановочным*) *рангом* подстановочного представления (G, Ω) и обозначается через m . Орбиты Ω_k подгруппы G_α называются *подорбитами* группы G , а мощности n_k этих подорбит, называемые *подстепенями* подстановочного представления (G, Ω) , могут быть вычислены как индексы двойных стабилизаторов $G_{\alpha, \alpha_k} = G_\alpha \cap G_{\alpha_k}$ в группе G_α , где $\alpha_k \in \Omega_k$ ($1 \leq k \leq m$). Обозначим через n степень подстановочного представления (G, Ω) .

ТАБЛ. 2. Подстановочное представление группы ${}^2\bar{E}_6(q^2)$ по подгруппе P_3

y_l	$P_3 \cap P_3^{y_l}$	n_l
y_1	$(p^{3s} \cdot (p^{5s} \cdot (p^{9s} \cdot p^{10s} \times p^{2s})))$ $: (p^{4s} : (\bar{A}_1(q) : ((q^2 - 1)^2 \times (q - 1))))$	$q^2(q^2 + 1)(q^2 + q + 1)$
y_2	$(p^{3s} \cdot (p^{6s} \cdot (p^{5s} \cdot p^{6s} \times p^{6s})))$ $: (p^{4s} : (\bar{A}_1(q) : ((q^2 - 1)^2 \times (q - 1))))$	$q^5(q^2 + 1)(q^2 + q + 1)$
y_3	$(p^{3s} \cdot (p^{8s} \cdot p^{13s}))$ $: ((p^s \cdot p^{2s} \times p^{2s}) : ((q^2 - 1)^2 \times (q - 1)^2))$	$q^7(q + 1)(q^2 + 1)(q^2 + q + 1)$
y_4	$(p^{8s} \cdot p^{14s}) : (p^{2s} : (\bar{A}_2(q) : (q^2 - 1)^2))$	$q^9(q^2 + 1)$
y_5	$(p^{3s} \cdot (p^{2s} \cdot (p^{5s} \cdot p^{6s}) \times p^{2s}) \times p^{2s})$ $: (p^{4s} : (\bar{A}_1(q) : ((q^2 - 1)^2 \times (q - 1))))$	$q^{11}(q^2 + 1)(q^2 + q + 1)$
y_6	$(p^{5s} \cdot (p^{3s} \cdot p^{6s} \times p^{6s}))$ $: (p^{4s} : (\bar{A}_1(q) : ((q^2 - 1)^2 \times (q - 1))))$	$q^{11}(q^2 + 1)(q^2 + q + 1)$
y_7	$(p^s \cdot p^{16s} \times p^{2s})$ $: (p^{2s} : ((\bar{A}_1(q) \times \bar{A}_1(q^2)) : ((q^2 - 1) \times (q - 1))))$	$q^{12}(q^2 + q + 1)$
y_8	$(p^{3s} \cdot (p^{4s} \cdot p^{7s} \times p^{4s}))$ $: ((p^s \cdot p^{2s} \times p^{2s}) : ((q^2 - 1)^2 \times (q - 1)^2))$	$q^{13}(q + 1)(q^2 + 1)(q^2 + q + 1)$
y_9	$(p^s \cdot p^{12s} \times p^{2s})$ $: (p^{4s} : (\bar{A}_1(q) : ((q^2 - 1)^2 \times (q - 1))))$	$q^{16}(q^2 + 1)(q^2 + q + 1)$
y_{10}	$(p^{5s} \cdot p^{8s} \times p^{2s})$ $: (p^{4s} : (\bar{A}_1(q) : ((q^2 - 1)^2 \times (q - 1))))$	$q^{16}(q^2 + 1)(q^2 + q + 1)$
y_{11}	$(p^{4s} \cdot p^{8s} \times p^{2s})$ $: (p^{2s} : ((\bar{A}_1(q) \times \bar{A}_1(q^2)) : ((q^2 - 1) \times (q - 1))))$	$q^{17}(q^2 + q + 1)$
y_{12}	$(p^{4s} \cdot p^{8s}) : ((p^s \cdot p^{2s} \times p^{2s}) : ((q^2 - 1)^2 \times (q - 1)^2))$	$q^{19}(q + 1)(q^2 + 1)(q^2 + q + 1)$
y_{13}	$(p^{3s} \cdot p^{6s} \times p^{2s}) : (p^{2s} : (\bar{A}_2(q) : (q^2 - 1)^2))$	$q^{20}(q^2 + 1)$
y_{14}	$(p^s \cdot p^{4s} \times p^{4s}) : (p^{4s} : (\bar{A}_1(q) : ((q^2 - 1)^2 \times (q - 1))))$	$q^{22}(q^2 + 1)(q^2 + q + 1)$
y_{15}	$p^{6s} : (p^{4s} : (\bar{A}_1(q) : ((q^2 - 1)^2 \times (q - 1))))$	$q^{25}(q^2 + 1)(q^2 + q + 1)$
y_{16}	$(\bar{A}_1(q^2) \times \bar{A}_2(q)) : (q^2 - 1)$	q^{31}
y_{17}	$(p^{3s} \cdot (p^{4s} \cdot (p^{12s} \cdot p^{12s})))$ $: ((\bar{A}_1(q^2) \times \bar{A}_2(q)) : (q^2 - 1))$	1

ТАБЛ. 3. Подстановочное представление группы ${}^2\bar{E}_6(q^2)$ по подгруппе P_4

y_l	$P_4 \cap P_4^{y_l}$	n_l
y_1	$(p^{8s} \cdot p^{14s}) : ((p^{3s} \cdot p^{6s}) : (\bar{A}_2(q) : (q^2 - 1)^2))$	$q^2(q^2 + 1)(q^3 + 1)(q^4 + 1)$
y_2	$(p^s \cdot p^{8s} \times p^{6s}) : (p^{6s} : ({}^2\bar{A}_3(q^2) : ((q^2 - 1) \times (q - 1))))$	$q^9(q^2 + q + 1)(q^4 + 1)$
y_3	$(p^{3s} \cdot p^{6s} \times p^{2s}) : ((p^{3s} \cdot p^{6s}) : (\bar{A}_2(q) : (q^2 - 1)^2))$	$q^{13}(q^2 + 1)(q^3 + 1)(q^4 + 1)$
y_4	${}^2\bar{D}_4(q^2) : (q^2 - 1)$	q^{24}
y_5	$(p^{8s} \cdot p^{16s}) : ({}^2\bar{D}_4(q^2) : (q^2 - 1))$	1

Для вычислений с группой G и ее системой корней использовался пакет “chevie” из компьютерной системы GAP [13].

Обозначим через $X \cdot Y$ (соответственно $X : Y$) расширение (соответственно расщеп-

ляемое расширение) группы X посредством группы Y , через X^l прямое произведение l изоморфных копий группы X , через a циклическую группу порядка $a \in \mathbb{N}$. Мы будем использовать также определения и обозначения, связанные с группами лиевского типа, из [14]. Если R – неприводимая система корней, а q – степень простого числа, через $R(q)$ и $\bar{R}(q)$ обозначаются присоединенная и универсальная группы лиевского типа R над полем порядка q соответственно.

Обозначим через Ψ систему корней типа E_6 , а простые корни из Ψ через $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$. Существует отображение порядка 2 системы Ψ на себя, индуцированное следующей симметрией диаграммы Дынкина:

Обозначим через $\bar{r}$ образ корня r из Ψ при этом отображении. Система корней типа E_6 разбивается на сорок восемь классов вида $\{r, \bar{r}\}$, образующих систему корней Φ типа F_4 . Обозначим эти классы (корни) через $\alpha_1 \tilde{p}_1 + \alpha_2 \tilde{p}_2 + \alpha_3 \tilde{p}_3 + \alpha_4 \tilde{p}_4$ в соответствии с обозначениями системы корней типа F_4 . Множество Φ^+ классов, соответствующих положительным корням, имеет вид

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \tilde{p}_1 = \{p_2\}, \\
 S_2 &= \tilde{p}_2 = \{p_4\}, \\
 S_3 &= \tilde{p}_3 = \{p_3, p_5\}, \\
 S_4 &= \tilde{p}_4 = \{p_1, p_6\}, \\
 S_5 &= \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 = \{p_2 + p_4\}, \\
 S_6 &= \tilde{p}_2 + \tilde{p}_3 = \{p_3 + p_4, p_4 + p_5\}, \\
 S_7 &= \tilde{p}_3 + \tilde{p}_4 = \{p_1 + p_3, p_5 + p_6\}, \\
 S_8 &= \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 + \tilde{p}_3 = \{p_2 + p_3 + p_4, p_2 + p_4 + p_5\}, \\
 S_9 &= \tilde{p}_2 + 2\tilde{p}_3 = \{p_3 + p_4 + p_5\}, \\
 S_{10} &= \tilde{p}_2 + \tilde{p}_3 + \tilde{p}_4 = \{p_1 + p_3 + p_4, p_4 + p_5 + p_6\}, \\
 S_{11} &= \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 + 2\tilde{p}_3 = \{p_2 + p_3 + p_4 + p_5\}, \\
 S_{12} &= \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 + \tilde{p}_3 + \tilde{p}_4 = \{p_1 + p_2 + p_3 + p_4, p_2 + p_4 + p_5 + p_6\}, \\
 S_{13} &= \tilde{p}_2 + 2\tilde{p}_3 + \tilde{p}_4 = \{p_1 + p_3 + p_4 + p_5, p_3 + p_4 + p_5 + p_6\}, \\
 S_{14} &= \tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_2 + 2\tilde{p}_3 = \{p_2 + p_3 + 2p_4 + p_5\}, \\
 S_{15} &= \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 + 2\tilde{p}_3 + \tilde{p}_4 = \{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5, p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6\}, \\
 S_{16} &= \tilde{p}_2 + 2\tilde{p}_3 + 2\tilde{p}_4 = \{p_1 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6\}, \\
 S_{17} &= \tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_2 + 2\tilde{p}_3 + \tilde{p}_4 = \{p_1 + p_2 + p_3 + 2p_4 + p_5, p_2 + p_3 + 2p_4 + p_5 + p_6\}, \\
 S_{18} &= \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 + 2\tilde{p}_3 + 2\tilde{p}_4 = \{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6\}, \\
 S_{19} &= \tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_2 + 3\tilde{p}_3 + \tilde{p}_4 = \{p_1 + p_2 + 2p_3 + 2p_4 + p_5, p_2 + p_3 + 2p_4 + 2p_5 + p_6\}, \\
 S_{20} &= \tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_2 + 2\tilde{p}_3 + 2\tilde{p}_4 = \{p_1 + p_2 + p_3 + 2p_4 + p_5 + p_6\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{21} &= \tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_2 + 3\tilde{p}_3 + 2\tilde{p}_4 \\
&= \{p_1 + p_2 + 2p_3 + 2p_4 + p_5 + p_6, p_1 + p_2 + p_3 + 2p_4 + 2p_5 + p_6\}, \\
S_{22} &= \tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_2 + 4\tilde{p}_3 + 2\tilde{p}_4 = \{p_1 + p_2 + 2p_3 + 2p_4 + 2p_5 + p_6\}, \\
S_{23} &= \tilde{p}_1 + 3\tilde{p}_2 + 4\tilde{p}_3 + 2\tilde{p}_4 = \{p_1 + p_2 + 2p_3 + 3p_4 + 2p_5 + p_6\}, \\
S_{24} &= 2\tilde{p}_1 + 3\tilde{p}_2 + 4\tilde{p}_3 + 2\tilde{p}_4 = \{p_1 + 2p_2 + 2p_3 + 3p_4 + 2p_5 + p_6\}.
\end{aligned}$$

Пусть $K = GF(q^2)$, $q = p^s$, p – простое число, G – универсальная скрученная группа лиевского типа ${}^2E_6(q^2)$, W – группа Вейля для G . Группа G является подгруппой универсальной исключительной группы лиевского типа $E_6(q^2)$. Известно, что $G = \langle x_S(t) \mid t \in K, S \in \Phi \rangle$ (см. [14]) и $|G| = q^{36}(q^2-1)(q^5+1)(q^6-1)(q^8-1)(q^9+1)(q^{12}-1)$ (см. [15]). Занумеруем корни S из Φ числами от 1 до 48 следующим образом: присвоим номер i положительному корню S_i , а соответствующему отрицательному корню $-S_i$ присвоим номер $24+i$, $1 \leq i \leq 24$. Тогда каждый элемент группы W можно задать подстановкой на множестве $\{1, 2, \dots, 48\}$, и эта подстановка представима в виде произведения независимых циклов. Будем обозначать образующие $w_{\tilde{p}_j}$ группы W через $[j]$, $1 \leq j \leq 4$, тогда каждый элемент w из W , представленный в виде произведения фундаментальных отражений $w = w_{\tilde{p}_{i_1}} w_{\tilde{p}_{i_2}} \cdots w_{\tilde{p}_{i_k}}$, можно записать в виде $[i_1, i_2, \dots, i_k]$, и $[\]$ – единица из W в такой записи. Заметим, что в Φ^+ встречаются классы двух видов: одноэлементные и двухэлементные. Если r – корень из Ψ , то для классов $S = \{r\}$ первого вида соответствующая корневая подгруппа $X_S = \{x_S(t) = x_r(t) \mid t = t^q, t \in K\}$ изоморфна p^s , а для классов $S = \{r, \bar{r}\}$ второго вида корневая подгруппа $X_S = \{x_S(t) = x_r(t)x_{\bar{r}}(t^q) \mid t \in K\}$ изоморфна p^{2s} . Корневые подгруппы X_{S_i}, X_{-S_i} и элементы $x_{S_i}(t), x_{-S_i}(t)$ из них обозначим через X_i, X_{i+24} и $x_i(t), x_{i+24}(t)$ соответственно, $1 \leq i \leq 24$, $t \in K$. Элементы $h_i(t)$ и $n_i(t)$ группы G задаются соотношениями $n_i(t) = x_{S_i}(t)x_{-S_i}(-t^{-1})x_{S_i}(t)$, $h_i(t) = n_i(t)n_i(-1)$ для любого корня S_i из Φ и любого t из K . Тогда подгруппа Картана H из G равна

$$\langle h_1(t) \mid t \in K^* \rangle \times \langle h_2(t) \mid t \in K^* \rangle \times \langle h_3(t) \mid t \in K^* \rangle \times \langle h_4(t) \mid t \in K^* \rangle.$$

Каждая подгруппа $\langle h_i(t) \mid t \in K^* \rangle$, $1 \leq i \leq 4$, является циклической группой, причем $h_1(t) = h_{p_2}(t)$, $h_2(t) = h_{p_4}(t)$, $h_3(t) = h_{p_3}(t)h_{p_5}(t^q)$, $h_4(t) = h_{p_1}(t)h_{p_6}(t^q)$, поэтому $H \cong (q-1)^2 \times (q^2-1)^2$. Пусть $N = \langle H, n_i(1) \mid i \in \{1, \dots, 48\} \rangle$. Для любого элемента $w \in W$ существует элемент $n_w \in N$ такой, что w есть образ n_w при естественном гомоморфизме из N на W и $N/H \cong W$ [14, теорема 13.5.2].

Обозначим через Φ_j множество корней из Φ с $\alpha_j = 0$ для $j = 1, 2, 3, 4$. С точностью до сопряжения в G имеется ровно четыре параболических максимальных подгруппы: $P_j = \langle H, X_S \mid S \in \Phi^+ \cup \Phi_j \rangle$, $j = 1, 2, 3, 4$. Подгруппа P_1 является максимальной собственной подгруппой наименьшего индекса, и подстановочное представление группы G по ней исследовано в [7]. Определим ранги, степени, подстепени и двойные стабилизаторы подстановочных представлений группы G на правых смежных классах по подгруппам P_2, P_3, P_4 .

Для определения двойных стабилизаторов этого подстановочного представления, т.е. подгрупп вида $P_j \cap P_j^x = P_j \cap xP_jx^{-1}$, необходимо выбрать подходящие элементы x из G . Согласно лемме 7.2.1 из [14] $X_i^{n_w} = n_w X_i n_w^{-1} = X_{w(i)}$. Поэтому действие сопряжением элемента n_w на множестве корневых подгрупп X_i можно отождествить с действием элемента w из W на множестве корней i , где $i \in \{1, 2, \dots, 48\}$, и писать X_i^w вместо $X_i^{n_w}$.

По теореме II.1.12 из [16] орбиты Ω_k для стабилизатора G_α точки $\alpha = P_j$ из Ω имеют вид $\Omega_k = \{P_j g \mid g \in P_j x_k P_j\}$, где $G = \bigcup_{k=1}^m P_j x_k P_j$ для некоторых $x_k \in G$.

Согласно предложению IV.2.2 из [17] для любого $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ имеется биективное отображение $P_j \setminus G/P_j \mapsto W_j \setminus W/W_j$ множества двойных смежных классов группы G по параболической подгруппе P_j на множество двойных смежных классов ее группы Вейля W по параболической подгруппе W_j , где $W_j = \langle [s] \mid s \in \{1, 2, 3, 4\}, s \neq j \rangle$. При этом отображении классу $P_j n_w P_j$ из $P_j \setminus G/P_j$ соответствует класс $W_j w W_j$ из $W_j \setminus W/W_j$.

С помощью использованной нами программы можно получить разложение $W = \bigcup_{i=1}^m W_j y_i W_j$ группы W на двойные смежные классы по подгруппе W_j , и каждый представитель y_i является единственным элементом в классе $W_j y_i W_j$, который имеет наименьшую длину при разложении в произведение фундаментальных отражений $w_{\tilde{\beta}_i}$ (см. [17, упр. IV.1.3]). Эти элементы y_i и будем использовать для нахождения двойных стабилизаторов. Отметим, что число двойных смежных классов m равно рангу подстановочного представления группы G на смежных классах по подгруппе P_j .

Воспользуемся разложением Леви [14, 8.5.2, 13.5.4] $P_j = U_j L_j$, где

$$U_j = \langle X_i \mid i \in \Phi^+ \setminus \Phi_j^+ \rangle, \quad L_j = \langle H, X_i \mid i \in \Phi_j \rangle.$$

Тогда $P_2 = U_2 L_2$, где

$$U_2 = \langle X_i \mid i \in \{2, 5, 6, 8, 9, \dots, 24\} \rangle, \quad L_2 = \langle H, X_i \mid i \in \{1, 3, 4, 7, 25, 27, 28, 31\} \rangle.$$

Рассмотрим подгруппу L_2 . Заметим, что $\langle h_1(t) \mid t \in K^* \rangle \leq \langle X_1, X_{25} \rangle \cong \bar{A}_1(q)$, $\langle h_3(t), h_4(t) \mid t \in K^* \rangle \leq \langle X_3, X_4, X_7, X_{27}, X_{28}, X_{31} \rangle \cong \bar{A}_2(q^2)$, поэтому

$$L_2 = O^{p'}(L_2) : \langle h_2(t) \mid t = t^q, t \in K^* \rangle \cong (\bar{A}_2(q^2) \times \bar{A}_1(q)) : (q-1).$$

Согласно следствию леммы 62 из [15] нетривиальные соотношения для корневых подгрупп группы G получаются из соотношений для корневых порождающих группы $F_4(q)$ (см. [9]). Выпишем эти нетривиальные коммутаторные соотношения для корневых подгрупп подгруппы U_2 из группы G :

$$\begin{array}{lll} [X_{11}, X_2] \leq X_{14}, & [X_{15}, X_2] \leq X_{17}X_{24}, & [X_{18}, X_2] \leq X_{20}, \\ [X_{22}, X_2] \leq X_{23}, & [X_9, X_5] \leq X_{14}, & [X_{13}, X_5] \leq X_{17}X_{23}, \\ [X_{16}, X_5] \leq X_{20}, & [X_{22}, X_5] \leq X_{24}, & [X_8, X_6] \leq X_{14}, \\ [X_{12}, X_6] \leq X_{17}, & [X_{15}, X_6] \leq X_{19}, & [X_{18}, X_6] \leq X_{21}X_{23}, \\ [X_{21}, X_6] \leq X_{23}, & [X_{10}, X_8] \leq X_{17}, & [X_{13}, X_8] \leq X_{19}, \\ [X_{16}, X_8] \leq X_{21}X_{24}, & [X_{21}, X_8] \leq X_{24}, & [X_{12}, X_9] \leq X_{19}X_{24}, \\ [X_{18}, X_9] \leq X_{22}, & [X_{20}, X_9] \leq X_{23}, & [X_{11}, X_{10}] \leq X_{19}X_{23}, \\ [X_{12}, X_{10}] \leq X_{20}, & [X_{15}, X_{10}] \leq X_{21}, & [X_{19}, X_{10}] \leq X_{23}, \\ [X_{16}, X_{11}] \leq X_{22}, & [X_{20}, X_{11}] \leq X_{24}, & [X_{13}, X_{12}] \leq X_{21}, \\ [X_{19}, X_{12}] \leq X_{24}, & [X_{15}, X_{13}] \leq X_{22}, & [X_{17}, X_{13}] \leq X_{23}, \\ [X_{16}, X_{14}] \leq X_{23}, & [X_{18}, X_{14}] \leq X_{24}, & [X_{17}, X_{15}] \leq X_{24}. \end{array} \quad (*)$$

Из этих соотношений следует, что U_2 изоморфна $p^{2s} \cdot (p^{9s} \cdot p^{18s})$.

Таким образом, получаем $|P_2| = q^{36}(q^6 - 1)(q^4 - 1)(q^2 - 1)(q - 1)$. Отсюда вычисляется степень n подстановочного представления группы G на правых смежных классах по подгруппе P_2 :

$$n = |G : P_2| = \frac{(q^{12} - 1)(q^9 + 1)(q^5 + 1)(q^4 + 1)}{q - 1}.$$

Определим двойные стабилизаторы этого подстановочного представления, т.е. подгруппы вида $P_2 \cap P_2^x = P_2 \cap xP_2x^{-1}$, где $x \in G$.

Рассмотрим элемент $y_1 = [2]$ из W , который действует на корнях следующим образом:

$$(1, 5)(2, 26)(3, 6)(7, 10)(11, 14)(15, 17)(18, 20)(22, 23)(25, 29)(27, 30) \\ (31, 34)(35, 38)(39, 41)(42, 44)(46, 47).$$

Тогда

$$U_2 \cap P_2^{y_1} = \langle X_i \mid i \in \{5, 6, 8, 9, \dots, 24\} \rangle, \\ L_2 \cap P_2^{y_1} = \langle H, X_i \mid i \in \{1, 3, 7, 4, 28\} \rangle, \\ N_1 \equiv P_2 \cap P_2^{y_1} = (U_2 \cap P_2^{y_1}) : (L_2 \cap P_2^{y_1}).$$

Из соотношений (*) следует, что подгруппа $U_2 \cap P_2^{y_1}$ изоморфна $p^{2s} \cdot (p^{9s} \cdot p^{17s})$. Заметим, что $\langle X_i \mid i \in \{1, 3, 7\} \rangle$ изоморфна p^{5s} . Подгруппа $\langle X_i \mid i \in \{4, 28\} \rangle$ из $L_2 \cap P_2^{y_1}$ изоморфна $\bar{A}_1(q^2)$, поэтому

$$L_2 \cap P_2^{y_1} \cong p^{5s} : (\bar{A}_1(q^2) : ((q^2 - 1) \times (q - 1)^2)).$$

Подстепень $n_1 \equiv |P_2 : N_1|$ равна $q(q^6 - 1)/(q - 1)$.

Рассмотрим элемент $y_2 = [2, 3, 2]$ из W , который действует на корнях следующим образом:

$$(1, 14)(2, 33)(4, 10)(6, 30)(7, 13)(9, 26)(12, 17)(15, 19)(18, 23)(25, 38) \\ (28, 34)(31, 37)(36, 41)(39, 43)(42, 47).$$

Тогда

$$U_2 \cap P_2^{y_2} = \langle X_i \mid i \in \{5, 8, 10, 11, 12, \dots, 24\} \rangle, \\ L_2 \cap P_2^{y_2} = \langle H, X_i \mid i \in \{1, 4, 7, 3, 27\} \rangle, \\ N_2 \equiv P_2 \cap P_2^{y_2} = (U_2 \cap P_2^{y_2}) : (L_2 \cap P_2^{y_2}).$$

Из соотношений (*) следует, что подгруппа $U_2 \cap P_2^{y_2}$ изоморфна $p^{2s} \cdot (p^{8s} \cdot p^{13s} \times p^{2s})$; $\langle X_i \mid i \in \{1, 4, 7\} \rangle$ изоморфна p^{5s} . Подгруппа $\langle X_3, X_{27} \rangle$ из $L_2 \cap P_2^{y_2}$ изоморфна $\bar{A}_1(q^2)$, поэтому

$$L_2 \cap P_2^{y_2} \cong L_2 \cap P_2^{y_1}.$$

Вычислим $n_2 \equiv |P_2 : N_2| = q^4(q^6 - 1)/(q - 1)$.

Рассмотрим элемент $y_3 = [2, 1, 3, 2]$ из W , который действует на корнях следующим образом:

$$(1, 9)(2, 38)(3, 8)(4, 10)(5, 29)(6, 30)(7, 17)(12, 13)(14, 26)(15, 19)(16, 20)(18, 23) \\ (22, 24)(25, 33)(27, 32)(28, 34)(31, 41)(36, 37)(39, 43)(40, 44)(42, 47)(46, 48).$$

Тогда

$$U_2 \cap P_2^{y_3} = \langle X_i \mid i \in \{8, \dots, 24\}, i \neq 14 \rangle, \\ L_2 \cap P_2^{y_3} = \langle H, X_i \mid i \in \{1, 3, 4, 7\} \rangle, \\ N_3 \equiv P_2 \cap P_2^{y_3} = (U_2 \cap P_2^{y_3}) : (L_2 \cap P_2^{y_3}).$$

Из соотношений (*) следует, что подгруппа $U_2 \cap P_2^{y_3}$ изоморфна $p^{3s} \cdot (p^{7s} \cdot p^{13s} \times p^s)$. В подгруппе $\langle X_i \mid i \in \{1, 3, 4, 7\} \rangle$ выполняется лишь одно нетривиальное соотношение $[X_4, X_3] \leq X_7$, поэтому $\langle X_i \mid i \in \{1, 3, 4, 7\} \rangle$ изоморфна $p^{2s} \cdot p^{4s} \times p^s$. Отсюда

$$L_2 \cap P_2^{y_3} \cong (p^{2s} \cdot p^{4s} \times p^s) : H = (p^{2s} \cdot p^{4s} \times p^s) : ((q^2 - 1)^2 \times (q - 1)^2).$$

Вычислим $n_3 \equiv |P_2 : N_3| = q^5(q^6 - 1)(q^2 + 1)/(q - 1)$.

Рассмотрим элемент $y_4 = [2, 3, 2, 4, 3, 2]$ из W , который действует на корнях следующим образом:

$$(1, 23)(2, 40)(3, 4)(5, 14)(6, 37)(8, 17)(9, 33)(10, 34)(11, 20)(12, 19)(13, 30)(15, 21) \\ (16, 26)(18, 22)(25, 47)(27, 28)(29, 38)(32, 41)(35, 44)(36, 43)(39, 45)(42, 46).$$

Тогда

$$U_2 \cap P_2^{y_4} = \langle X_i \mid i \in \{5, 8, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\} \rangle, \\ L_2 \cap P_2^{y_4} = \langle H, X_i \mid i \in \{1, 3, 4, 7, 27, 28, 31\} \rangle, \\ N_4 \equiv P_2 \cap P_2^{y_4} = (U_2 \cap P_2^{y_4}) : (L_2 \cap P_2^{y_4}).$$

Из соотношений (*) следует, что подгруппа $U_2 \cap P_2^{y_4}$ изоморфна $p^s \cdot p^{18s} \times p^s$. Подгруппа $\langle X_i \mid i \in \{3, 4, 7, 27, 28, 31\} \rangle$ из $L_2 \cap P_2^{y_4}$ изоморфна $\bar{A}_2(q^2)$, поэтому

$$L_2 \cap P_2^{y_4} \cong p^s : (\bar{A}_2(q^2) : (q - 1)^2).$$

Подстепень $n_4 \equiv |P_2 : N_4|$ равна $q^9(q + 1)$.

Рассмотрим элемент $y_5 = [2, 1, 3, 2, 1, 3, 2]$ из W , который действует на корнях следующим образом:

$$(2, 35)(4, 17)(5, 33)(6, 32)(7, 19)(8, 30)(9, 29)(11, 26)(14, 38)(16, 23) \\ (18, 24)(28, 41)(31, 43)(40, 47)(42, 48).$$

Тогда

$$U_2 \cap P_2^{y_5} = \langle X_i \mid i \in \{10, 12, 13, 15, 16, \dots, 24\} \rangle, \\ L_2 \cap P_2^{y_5} = \langle H, X_i \mid i \in \{1, 25, 3, 27, 4, 7\} \rangle, \\ N_5 \equiv P_2 \cap P_2^{y_5} = (U_2 \cap P_2^{y_5}) : (L_2 \cap P_2^{y_5}).$$

Из соотношений (*) следует, что подгруппа $U_2 \cap P_2^{y_5}$ изоморфна $p^{6s} \cdot p^{12s} \times p^{2s}$; $\langle X_i \mid i \in \{4, 7\} \rangle$ изоморфна p^{4s} . Подгруппы $\langle X_3, X_{27} \rangle$ и $\langle X_1, X_{25} \rangle$ из $L_2 \cap P_2^{y_5}$ изоморфны $\bar{A}_1(q^2)$ и $\bar{A}_1(q)$ соответственно, поэтому

$$L_2 \cap P_2^{y_5} \cong p^{4s} : ((\bar{A}_1(q) \times \bar{A}_1(q^2)) : ((q^2 - 1) \times (q - 1))).$$

Вычислим $n_5 \equiv |P_2 : N_5| = q^9(q^4 + q^2 + 1)$.

Рассмотрим элемент $y_6 = [2, 1, 3, 2, 4, 3, 2]$ из W , который действует на корнях следующим образом:

$$(2, 16, 11, 20, 26, 23)(2, 47, 25, 40, 35, 44)(3, 17, 30, 13, 8, 4)(5, 38, 9)(6, 37, 32, 28, 27, 41) \\ (7, 19, 12)(10, 34)(14, 33, 29)(15, 21)(18, 22, 24)(31, 43, 36)(39, 45)(42, 46, 48).$$

Тогда

$$\begin{aligned} U_2 \cap P_2^{y_6} &= \langle X_i \mid i \in \{5, 8, 11, 12, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24\} \rangle, \\ L_2 \cap P_2^{y_6} &= \langle H, X_i \mid i \in \{1, 4, 7, 3, 27\} \rangle = L_2 \cap P_2^{y_2} \cong L_2 \cap P_2^{y_1}, \\ N_6 &\equiv P_2 \cap P_2^{y_6} = (U_2 \cap P_2^{y_6}) : (L_2 \cap P_2^{y_6}). \end{aligned}$$

Из соотношений (*) следует, что подгруппа $U_2 \cap P_2^{y_6}$ изоморфна $p^s \cdot (p^{4s} \cdot p^{5s} \times p^{8s}) \times p^s$.
Вычислим $n_6 \equiv |P_2 : N_6| = q^{10}(q^6 - 1)/(q - 1)$.

Рассмотрим элемент $y_7 = [2, 3, 2, 1, 4, 3, 2]$ из W , который действует на корнях следующим образом:

$$\begin{aligned} (1, 23, 26, 20, 11, 16)(2, 44, 35, 40, 25, 47)(3, 4, 8, 13, 30, 17)(5, 9, 38)(6, 41, 27, 28, 32, 37) \\ (7, 12, 19)(10, 34)(14, 29, 33)(15, 21)(18, 24, 22)(31, 36, 43)(39, 45)(42, 48, 46). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} U_2 \cap P_2^{y_7} &= \langle X_i \mid i \in \{8, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 23, 24\} \rangle, \\ L_2 \cap P_2^{y_7} &= \langle H, X_i \mid i \in \{1, 3, 7, 4, 28\} \rangle = L_2 \cap P_2^{y_1}, \\ N_7 &\equiv P_2 \cap P_2^{y_7} = (U_2 \cap P_2^{y_7}) : (L_2 \cap P_2^{y_7}). \end{aligned}$$

Из соотношений (*) следует, что подгруппа $U_2 \cap P_2^{y_7}$ изоморфна $p^{2s} \cdot (p^{4s} \cdot p^{8s} \times p^{4s}) \times p^s$.
Вычислим $n_7 \equiv |P_2 : N_7| = q^{10}(q^6 - 1)/(q - 1)$.

Рассмотрим элемент $y_8 = [2, 1, 3, 2, 1, 4, 3, 2]$ из W , который действует на корнях следующим образом:

$$\begin{aligned} (1, 20)(2, 47)(3, 13)(4, 8)(5, 33)(6, 41)(7, 19)(9, 29)(10, 34)(11, 16)(14, 38) \\ (15, 21)(17, 30)(18, 24)(23, 26)(25, 44)(27, 37)(28, 32)(31, 43)(35, 40)(39, 45)(42, 48). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} U_2 \cap P_2^{y_8} &= \langle X_i \mid i \in \{8, 11, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 24\} \rangle, \\ L_2 \cap P_2^{y_8} &= \langle H, X_i \mid i \in \{1, 3, 4, 7\} \rangle = L_2 \cap P_2^{y_3}, \\ N_8 &\equiv P_2 \cap P_2^{y_8} = (U_2 \cap P_2^{y_8}) : (L_2 \cap P_2^{y_8}). \end{aligned}$$

Из соотношений (*) следует, что подгруппа $U_2 \cap P_2^{y_8}$ изоморфна $p^{2s} \cdot (p^{4s} \cdot p^{7s} \times p^{4s}) \times p^s$.
Вычислим $n_8 \equiv |P_2 : N_8| = q^{11}(q^6 - 1)(q^2 + 1)/(q - 1)$.

Рассмотрим элемент $y_9 = [2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 2]$ из W , который действует на корнях следующим образом:

$$\begin{aligned} (1, 5, 40, 46, 42, 48, 25, 29, 16, 22, 18, 24)(2, 44, 35, 9, 38, 23, 26, 20, 11, 33, 14, 47) \\ (3, 4, 19, 30, 17, 34, 27, 28, 43, 6, 41, 10)(7, 21, 15, 12, 8, 37, 31, 45, 39, 36, 32, 13). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} U_2 \cap P_2^{y_9} &= \langle X_i \mid i \in \{5, 8, 11, 12, 15, 18, 19, 21, 22, 24\} \rangle, \\ L_2 \cap P_2^{y_9} &= \langle H, X_i \mid i \in \{1, 3, 4, 7, 28\} \rangle = L_2 \cap P_2^{y_1}, \\ N_9 &\equiv P_2 \cap P_2^{y_9} = (U_2 \cap P_2^{y_9}) : (L_2 \cap P_2^{y_9}). \end{aligned}$$

Из соотношений (*) следует, что подгруппа $U_2 \cap P_2^{y_9}$ изоморфна $p^s \cdot p^{10s} \times p^{4s}$.

Вычислим $n_9 \equiv |P_2 : N_9| = q^{14}(q^6 - 1)/(q - 1)$.

Рассмотрим элемент $y_{10} = [2, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 1, 3, 2]$ из W , который действует на корнях следующим образом:

$$(1, 24, 18, 22, 16, 29, 25, 48, 42, 46, 40, 5)(2, 47, 14, 33, 11, 20, 26, 23, 38, 9, 35, 44) \\ (3, 10, 41, 6, 43, 28, 27, 34, 17, 30, 19, 4)(7, 13, 32, 36, 39, 45, 31, 37, 8, 12, 15, 21).$$

Тогда

$$U_2 \cap P_2^{y_{10}} = \langle X_i \mid i \in \{10, 12, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24\} \rangle, \\ L_2 \cap P_2^{y_{10}} = \langle H, X_i \mid i \in \{1, 3, 4, 7, 27\} \rangle = L_2 \cap P_2^{y_2} \cong L_2 \cap P_2^{y_1}, \\ N_{10} \equiv P_2 \cap P_2^{y_{10}} = (U_2 \cap P_2^{y_{10}}) : (L_2 \cap P_2^{y_{10}}).$$

Из соотношений (*) следует, что подгруппа $U_2 \cap P_2^{y_{10}}$ изоморфна $p^{4s} \cdot p^{8s} \times p^{3s}$.

Вычислим $n_{10} \equiv |P_2 : N_{10}| = q^{14}(q^6 - 1)/(q - 1)$.

Рассмотрим элемент $y_{11} = [2, 1, 3, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 3, 2]$ из W , который действует на корнях следующим образом:

$$(2, 48)(3, 19)(5, 47)(6, 36)(7, 21)(8, 34)(10, 32)(12, 30)(14, 44)(17, 41) \\ (20, 38)(23, 29)(24, 26)(27, 43)(31, 45).$$

Тогда

$$U_2 \cap P_2^{y_{11}} = \langle X_i \mid i \in \{9, 11, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 22\} \rangle, \\ L_2 \cap P_2^{y_{11}} = \langle H, X_i \mid i \in \{1, 3, 4, 7, 25, 28\} \rangle \cong L_2 \cap P_2^{y_5}, \\ N_{11} \equiv P_2 \cap P_2^{y_{11}} = (U_2 \cap P_2^{y_{11}}) : (L_2 \cap P_2^{y_{11}}).$$

Из соотношений (*) следует, что подгруппа $U_2 \cap P_2^{y_{11}}$ изоморфна $p^s \cdot p^{8s} \times p^{4s}$.

Вычислим $n_{11} \equiv |P_2 : N_{11}| = q^{16}(q^4 + q^2 + 1)$.

Рассмотрим элемент $y_{12} = [2, 1, 3, 2, 1, 3, 4, 3, 2, 1, 3, 2]$ из W , который действует на корнях следующим образом:

$$(1, 11)(2, 48)(3, 12)(4, 13)(5, 44)(6, 43)(7, 21)(8, 34)(9, 33)(10, 32)(14, 47)(17, 41) \\ (18, 22)(19, 30)(20, 29)(23, 38)(24, 26)(25, 35)(27, 36)(28, 37)(31, 45)(42, 46).$$

Тогда

$$U_2 \cap P_2^{y_{12}} = \langle X_i \mid i \in \{11, 12, 13, 15, 16, 18, 21, 22\} \rangle, \\ L_2 \cap P_2^{y_{12}} = \langle H, X_i \mid i \in \{1, 3, 4, 7\} \rangle = L_2 \cap P_2^{y_3}, \\ N_{12} \equiv P_2 \cap P_2^{y_{12}} = (U_2 \cap P_2^{y_{12}}) : (L_2 \cap P_2^{y_{12}}).$$

Из соотношений (*) следует, что подгруппа $U_2 \cap P_2^{y_{12}}$ изоморфна $p^{3s} \cdot p^{8s} \times p^s$.

Вычислим $n_{12} \equiv |P_2 : N_{12}| = q^{17}(q^6 - 1)(q^2 + 1)/(q - 1)$.

Рассмотрим элемент $y_{13} = [2, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 2]$ из W , который действует на корнях следующим образом:

$$(1, 24)(2, 46)(6, 45)(9, 44)(10, 43)(13, 41)(14, 40)(16, 38)(17, 37)(19, 34) \\ (20, 33)(21, 30)(22, 26)(23, 47)(25, 48).$$

Тогда

$$\begin{aligned} U_2 \cap P_2^{y_{13}} &= \langle X_i \mid i \in \{5, 8, 11, 12, 15, 18, 24\} \rangle, \\ L_2 \cap P_2^{y_{13}} &= \langle H, X_i \mid i \in \{1, 3, 4, 7, 27, 28, 31\} \rangle = L_2 \cap P_2^{y_4}, \\ N_{13} &\equiv P_2 \cap P_2^{y_{13}} = (U_2 \cap P_2^{y_{13}}) : (L_2 \cap P_2^{y_{13}}). \end{aligned}$$

Подгруппа $U_2 \cap P_2^{y_{13}}$ изоморфна p^{10s} , так как в ней выполняются только тривиальные соотношения.

Вычислим $n_{13} \equiv |P_2 : N_{13}| = q^{19}(q+1)$.

Рассмотрим элемент $y_{14} = [2, 1, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 2]$ из W , который действует на корнях следующим образом:

$$\begin{aligned} &(1, 22)(2, 48)(3, 8)(5, 29)(6, 45)(7, 12)(9, 40)(10, 43)(13, 37)(14, 44) \\ &(16, 33)(17, 41)(19, 34)(20, 38)(21, 30)(23, 47)(24, 26)(25, 46)(27, 32)(31, 36). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} U_2 \cap P_2^{y_{14}} &= \langle X_i \mid i \in \{8, 11, 12, 15, 18, 22\} \rangle \cong p^{9s}, \\ L_2 \cap P_2^{y_{14}} &= \langle H, X_i \mid i \in \{1, 3, 4, 7, 28\} \rangle = L_2 \cap P_2^{y_1}, \\ N_{14} &\equiv P_2 \cap P_2^{y_{14}} = (U_2 \cap P_2^{y_{14}}) : (L_2 \cap P_2^{y_{14}}). \end{aligned}$$

Вычислим $n_{14} \equiv |P_2 : N_{14}| = q^{20}(q^6 - 1)/(q - 1)$.

Рассмотрим элемент $y_{15} = [2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 2]$ из W , который действует на корнях следующим образом:

$$\begin{aligned} &(1, 16)(2, 46)(4, 12)(5, 35)(6, 45)(7, 15)(8, 32)(9, 44)(10, 37)(11, 29)(13, 34)(14, 48) \\ &(17, 43)(19, 41)(20, 33)(21, 30)(22, 26)(23, 47)(24, 38)(25, 40)(28, 36)(31, 39). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} U_2 \cap P_2^{y_{15}} &= \langle X_i \mid i \in \{12, 15, 16, 18\} \rangle \cong p^{6s}, \\ L_2 \cap P_2^{y_{14}} &= \langle H, X_i \mid i \in \{1, 3, 4, 7, 27\} \rangle = L_2 \cap P_2^{y_2} \cong L_2 \cap P_2^{y_1}, \\ N_{15} &\equiv P_2 \cap P_2^{y_{15}} = (U_2 \cap P_2^{y_{15}}) : (L_2 \cap P_2^{y_{15}}). \end{aligned}$$

Вычислим $n_{15} \equiv |P_2 : N_{15}| = q^{23}(q^6 - 1)/(q - 1)$.

Рассмотрим элемент $y_{16} = [2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 2, 1, 3, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 3, 2]$ из W , который действует на корнях следующим образом:

$$\begin{aligned} &(2, 42)(3, 4)(5, 40)(6, 39)(8, 37)(9, 35)(10, 36)(11, 33)(12, 34)(13, 32)(14, 46)(15, 30) \\ &(16, 29)(17, 45)(18, 26)(19, 43)(20, 44)(21, 41)(22, 38)(23, 48)(24, 47)(27, 28). \end{aligned}$$

Тогда подгруппа $N_{16} \equiv P_2 \cap P_2^{y_{16}}$ равна L_2 и подстепень $n_{16} \equiv |P_2 : N_{16}| = q^{29}$.

Несложно проверить, что $n - 1 = \sum_{i=1}^{16} n_i$, поэтому $y_{17} = []$, $n_{17} = 1$, $N_{17} = P_2$ и ранг представления равен 17.

Полученные результаты для P_2 дают табл. 1.

Рассмотрим далее подстановочное представление группы G на правых смежных классах по другой параболической максимальной подгруппе P_3 . Согласно разложению Леви $P_3 = U_3 L_3$, где

$$U_3 = \langle X_i \mid i \in \{3, 6, 7, \dots, 24\} \rangle, \quad L_3 = \langle H, X_i \mid i \in \{1, 2, 4, 5, 25, 26, 28, 29\} \rangle.$$

Рассмотрим подгруппу L_3 . Заметим, что

$$\begin{aligned} \langle h_4(t) = h_{p_1}(t)h_{p_6}(t^q) \mid t \in K^* \rangle &\leq \langle X_4, X_{28} \rangle \cong \bar{A}_1(q^2), \\ \langle h_1(t) = h_{p_2}(t), h_2(t) = h_{p_4}(t) \mid t = t^q, t \in K^* \rangle &\leq \langle X_i \mid i \in \{1, 2, 5, 25, 26, 29\} \rangle \cong \bar{A}_2(q), \end{aligned}$$

поэтому

$$L_3 = Op'(L_3) : \langle h_3(t) = h_{p_3}(t)h_{p_5}(t^q) \mid t \in K^* \rangle \cong (\bar{A}_1(q^2) \times \bar{A}_2(q)) : (q^2 - 1).$$

Выпишем все нетривиальные коммутаторные соотношения для корневых подгрупп подгруппы U_3 из группы G , которые получаются из соотношений для корневых порождающих группы $F_4(q)$ (см. [9]):

$$\begin{array}{lll} [X_6, X_3] \leq X_9, & [X_8, X_3] \leq X_{11}, & [X_{10}, X_3] \leq X_{13}, \\ [X_{12}, X_3] \leq X_{15}, & [X_{17}, X_3] \leq X_{19}, & [X_{20}, X_3] \leq X_{22}X_{21}, \\ [X_{21}, X_3] \leq X_{22}, & [X_7, X_6] \leq X_{13}, & [X_8, X_6] \leq X_{14}, \\ [X_{12}, X_6] \leq X_{17}, & [X_{15}, X_6] \leq X_{19}, & [X_{18}, X_6] \leq X_{21}X_{23}, \\ [X_{21}, X_6] \leq X_{23}, & [X_8, X_7] \leq X_{15}, & [X_{10}, X_7] \leq X_{16}, \\ [X_{12}, X_7] \leq X_{18}, & [X_{14}, X_7] \leq X_{19}X_{22}, & [X_{17}, X_7] \leq X_{21}, \\ [X_{19}, X_7] \leq X_{22}, & [X_{10}, X_8] \leq X_{17}, & [X_{13}, X_8] \leq X_{19}, \\ [X_{16}, X_8] \leq X_{21}X_{24}, & [X_{21}, X_8] \leq X_{24}, & [X_{12}, X_9] \leq X_{19}X_{24}, \\ [X_{18}, X_9] \leq X_{22}, & [X_{20}, X_9] \leq X_{23}, & [X_{11}, X_{10}] \leq X_{19}X_{23}, \\ [X_{12}, X_{10}] \leq X_{20}, & [X_{15}, X_{10}] \leq X_{21}, & [X_{19}, X_{10}] \leq X_{23}, \\ [X_{16}, X_{11}] \leq X_{22}, & [X_{20}, X_{11}] \leq X_{24}, & [X_{13}, X_{12}] \leq X_{21}, \\ [X_{19}, X_{12}] \leq X_{24}, & [X_{15}, X_{13}] \leq X_{22}, & [X_{17}, X_{13}] \leq X_{23}, \\ [X_{16}, X_{14}] \leq X_{23}, & [X_{18}, X_{14}] \leq X_{24}, & [X_{17}, X_{15}] \leq X_{24}. \end{array}$$

Из этих соотношений следует, что U_3 изоморфна $p^{3s} \cdot (p^{4s} \cdot (p^{12s} \cdot p^{12s}))$.

Таким образом, получаем $|P_3| = q^{36}(q^4 - 1)(q^3 - 1)(q^2 - 1)^2$. Отсюда вычисляется степень n подстановочного представления группы G на правых смежных классах по подгруппе P_3 :

$$n = |G : P_3| = \frac{(q^3 + 1)(q^4 + 1)(q^5 + 1)(q^9 + 1)(q^{12} - 1)}{q^2 - 1}.$$

Далее выбираем такие элементы y_l из группы Вейля W , которые являются представителями двойных смежных классов $W_3 y_l W_3$ в разложении $W = \bigcup_{l=1}^m W_3 y_l W_3$ и имеют наименьшую длину при разложении в произведение фундаментальных отражений. Получаем элементы:

$$\begin{aligned} y_1 &= [3], \quad y_2 = [3, 2, 3], \quad y_3 = [3, 2, 4, 3], \quad y_4 = [3, 2, 1, 3, 2, 3], \\ y_5 &= [3, 2, 1, 4, 3, 2, 3], \quad y_6 = [3, 2, 1, 3, 2, 4, 3], \quad y_7 = [3, 2, 3, 4, 3, 2, 3], \\ y_8 &= [3, 2, 1, 3, 4, 3, 2, 3], \quad y_9 = [3, 2, 1, 3, 2, 3, 4, 3, 2, 3], \\ y_{10} &= [3, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 3, 2, 3], \quad y_{11} = [3, 2, 1, 4, 3, 2, 1, 3, 2, 4, 3], \\ y_{12} &= [3, 2, 1, 3, 4, 3, 2, 1, 3, 2, 4, 3], \quad y_{13} = [3, 2, 1, 3, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 3, 2, 3], \\ y_{14} &= [3, 2, 1, 3, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 3, 2, 4, 3], \quad y_{15} = [3, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 2, 1, 3, 2, 3, 4, 3, 2, 3], \\ y_{16} &= [3, 2, 1, 3, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 3, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 3, 2, 3], \quad y_{17} = []. \end{aligned}$$

Ранг представления равен 17. Теперь вычисляем двойные стабилизаторы $P_3 \cap P_3^{y_l} = (U_3 \cap P_3^{y_l}) : (L_3 \cap P_3^{y_l})$, подстепени $n_l \equiv |P_3 : P_3 \cap P_3^{y_l}|$ и результаты заносим в табл. 2.

Рассмотрим далее подстановочное представление группы G на правых смежных классах по параболической максимальной подгруппе P_4 . Согласно разложению Леви $P_4 = U_4 L_4$, где

$$U_4 = \langle X_i \mid i \in \{4, 7, 10, 12, 13, 15, 16, \dots, 24\} \rangle, \\ L_4 = \langle H, X_i \mid i \in \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 14, 25, 26, 27, 29, 30, 32, 33, 35, 38\} \rangle.$$

Рассмотрим подгруппу L_4 . Заметим, что

$$\langle h_1(t), h_2(t), h_3(t) \mid t \in K^* \rangle \\ \leq \langle X_i \mid i \in \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 14, 25, 26, 27, 29, 30, 32, 33, 35, 38\} \rangle \cong {}^2\bar{D}_4(q^2),$$

поэтому $L_4 = O^{p'}(L_4) : \langle h_4(t) = h_{p_1}(t)h_{p_6}(t^q) \mid t \in K^* \rangle \cong {}^2\bar{D}_4(q^2) : (q^2 - 1)$.

Из нетривиальных соотношений для корневых подгрупп подгруппы U_4 группы G

$$\begin{aligned} [X_{13}, X_4] &\leq X_{16}, & [X_{15}, X_4] &\leq X_{18}, & [X_{17}, X_4] &\leq X_{20}, \\ [X_{19}, X_4] &\leq X_{21}, & [X_{10}, X_7] &\leq X_{16}, & [X_{12}, X_7] &\leq X_{18}, \\ [X_{17}, X_7] &\leq X_{21}, & [X_{19}, X_7] &\leq X_{22}, & [X_{12}, X_{10}] &\leq X_{20}, \\ [X_{15}, X_{10}] &\leq X_{21}, & [X_{19}, X_{10}] &\leq X_{23}, & [X_{13}, X_{12}] &\leq X_{21}, \\ [X_{19}, X_{12}] &\leq X_{24}, & [X_{15}, X_{13}] &\leq X_{22}, & [X_{17}, X_{13}] &\leq X_{23}, \\ [X_{17}, X_{15}] &\leq X_{24} \end{aligned}$$

следует, что U_4 изоморфна $p^{8s} \cdot p^{16s}$.

Таким образом, получаем $|P_4| = q^{36}(q^2 - 1)^2(q^4 - 1)(q^6 - 1)(q^4 + 1)$. Отсюда вычисляется степень n подстановочного представления группы G на правых смежных классах по подгруппе P_4 :

$$n = |G : P_4| = \frac{(q^{12} - 1)(q^5 + 1)(q^9 + 1)}{q^2 - 1}.$$

Находим элементы y_l из W , которые являются представителями двойных смежных классов $W_4 y_l W_4$ в группе $W = \bigcup_{l=1}^m W_4 y_l W_4$ и имеют минимальную длину в записи произведения фундаментальных отражений:

$$y_1 = [4], \quad y_2 = [4, 3, 2, 3, 4], \quad y_3 = [4, 3, 2, 1, 3, 2, 3, 4], \\ y_4 = [4, 3, 2, 1, 3, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 3, 2, 3, 4], \quad y_5 = [].$$

Ранг представления равен 5. Вычисленные подстепени $n_l \equiv |P_4 : P_4 \cap P_4^{y_l}|$ и двойные стабилизаторы $P_4 \cap P_4^{y_l} = (U_4 \cap P_4^{y_l}) : (L_4 \cap P_4^{y_l})$ для подгруппы P_4 дают табл. 3.

Заметим, что если 3 не делит $q + 1$, то универсальная группа ${}^2\bar{E}_6(q^2)$ совпадает с группой ${}^2E_6(q^2)$.

Если же 3 делит $q + 1$, то ${}^2E_6(q^2)$ изоморфна факторгруппе группы ${}^2\bar{E}_6(q^2)$ по ее центру $Z({}^2\bar{E}_6(q^2))$, который является циклической группой порядка 3. Параболические максимальные подгруппы группы ${}^2\bar{E}_6(q^2)$ содержат подгруппу Картана H , значит содержат и центр $Z({}^2\bar{E}_6(q^2))$ [14, 14.1.2], поэтому параболические максимальные подгруппы группы ${}^2E_6(q^2)$ являются факторгруппами параболических максимальных подгрупп группы

${}^2\bar{E}_6(q^2)$ по центру $Z({}^2\bar{E}_6(q^2))$. Степени, ранги и подстепени подстановочных представлений группы ${}^2E_6(q^2)$ по параболическим максимальным подгруппам совпадают с соответствующими степенями, рангами и подстепенями подстановочных представлений группы ${}^2\bar{E}_6(q^2)$. Отметим также, что подгруппы $L_j \cap P_j^{y_l}$ для $j = 2, 3, 4$ содержат центр $Z({}^2\bar{E}_6(q^2))$, поэтому двойные стабилизаторы параболических максимальных представлений группы ${}^2E_6(q^2)$ являются факторгруппами соответствующих двойных стабилизаторов группы ${}^2\bar{E}_6(q^2)$ по циклической группе порядка 3.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Cooperstein B. N. Minimal degree for a permutation representation of classical group // Israel J. Math. 1978. V. 30. № 3. P. 213–235.
- [2] Liebeck M. W., Saxl J. On the orders of maximal subgroups of the finite exceptional groups of Lie type // Proc. London Math. Soc. 1987. V. 55. P. 299–330.
- [3] Кондратьев А. С. Подгруппы конечных групп Шевалле // УМН. 1986. Т. 41. № 1. С. 57–96.
- [4] Tits J. A local approach to buildings // Geometric Vein (Coxeter Festschrift). New York: Springer, 1981. P. 519–547.
- [5] Васильев А. В. Минимальные подстановочные представления конечных простых исключительных групп типа G_2 и F_4 // Алгебра и логика. 1996. Т. 35. № 6. С. 663–684.
- [6] Васильев А. В. Минимальные подстановочные представления конечных простых исключительных групп типа E_6 , E_7 и E_8 // Алгебра и логика. 1997. Т. 36. № 5. С. 663–684.
- [7] Васильев А. В. Минимальные подстановочные представления конечных простых исключительных групп скрученного типа // Алгебра и логика. 1998. Т. 37. № 1. С. 17–35.
- [8] Кораблева В. В. Параболические подстановочные представления скрученных групп // Молодежная конференция “Проблемы теоретической и прикладной математики”. Тезисы докл. № 28. Екатеринбург: УрО РАН, 1997. С. 7–8.
- [9] Кораблева В. В. Параболические подстановочные представления группы $F_4(q)$ // Тр. ИММ УрО РАН. 1998. Т. 5. С. 39–59.
- [10] Кораблева В. В. О параболических подстановочных представлениях исключительных групп лиевского типа // Международная конференция “Комбинаторные и вычислительные методы в математике”. Тезисы докл. Омск: ОмГУ, 1998. С. 77–81.
- [11] Кораблева В. В. Параболические подстановочные представления групп $E_6(q)$ и $E_7(q)$ // Сб. научн. тр. “Комбинаторные и вычислительные методы в математике”. Омск: ОмГУ, 1999. С. 160–189.
- [12] Korablyova V. V. Parabolic permutation representations of groups $E_8(q)$ // Intern. conf. “Low-dimensional topology and combinatorial group theory”. Abstracts of talks. Chelyabinsk: Chelyabinsk State Univ., 1999. P. 26.
- [13] Schönert M. GAP – Groups, Algorithms, and Programming. Lehrstuhl D für Mathematik. Rheinisch Westfälische Technische Hochschule. Aachen, Germany, 1997.
- [14] Carter R. W. Simple Groups of Lie Type. London: Wiley, 1972.
- [15] Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле. М: Мир, 1975.
- [16] Huppert B. Endliche Gruppen I. Berlin: Springer, 1967.
- [17] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. (Гл. IV–VI). М.: Мир, 1972.