Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Михайлец, В. Н. Молибога, О спектре сингулярных возмущений операторов на окружности, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 4, 629–632

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9082>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 12:14:14

О спектре сингулярных возмущений операторов на окружности

В. А. Михайлец, В. Н. Молибога

1. Введение. В работе исследуются сингулярные возмущения неотрицательного оператора $\mathbb{D}^{2s}$, $s > 1/2$, в комплексном сепарабельном гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{T})$, $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\mathbb{Z}$, который (с точностью до множителя i^{2s}) совпадает с производной Г. Вейля порядка $2s$ 2-периодической функции:

$$\mathbb{D}^{2s} := (\mathbb{D}^2)^s, \quad s > \frac{1}{2}, \quad \mathbb{D}^2 := -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \text{Dom}(\mathbb{D}^2) := H^2(\mathbb{T}).$$

Возмущением выступает произвольное (комплекснозначное) распределение V из отрицательного соболевского пространства $H^{-s}(\mathbb{T})$. Для операторов

$$S(V) := \mathbb{D}^{2s} + V, \quad s > \frac{1}{2},$$

установлены их аппроксимативные и спектральные свойства (локализация и распределение собственных значений, полнота корневых функций).

2. Пространства. Пусть C^∞ и $\mathfrak{D}'$ – комплекснозначные пространства периодических бесконечно дифференцируемых и обобщенных функций на окружности $\mathbb{T}$ соответственно. Для характеристики гладкости таких распределений введем шкалу гильбертовых пространств Соболева $\{H^s\}_{s \in \mathbb{R}}$, которые определяются с помощью коэффициентов Фурье:

$$H^s := \left\{ f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ik\pi x} \in \mathfrak{D}' \mid \|f\|_s < \infty \right\},$$

$$\|f\|_s^2 := \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|)^{2s} |\widehat{f}(k)|^2, \quad \widehat{f}(k) = \frac{1}{2} \langle f(x), e^{ik\pi x} \rangle, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Отметим, что периодическое распределение $f \in \mathfrak{D}'$ является вещественнозначным тогда и только тогда, когда

$$\widehat{f}(k) = \overline{\widehat{f}(-k)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Определим произведение $f \cdot g$ двух периодических распределений. Перемножив формально соответствующие ряды Фурье–Шварца, имеем

$$(f \cdot g)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\widehat{f \cdot g})(k) e^{ik\pi x}, \quad (1)$$

$$(\widehat{f \cdot g})(k) := \sum_{j \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k-j) \widehat{g}(j), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Поэтому произведение корректно определено, если свертка (2) существует и ряд (1) определяет распределение из $\mathfrak{D}'$. Следующая известная лемма о свертке [1] дает достаточные условия существования произведения $f \cdot g$ в классе распределений.

ЛЕММА 1. Пусть $s, r \geq 0$ и $t \in \mathbb{R}$, $t \leq \min(s, r)$. Если $s + r - t > 1/2$, то произведение $f \cdot g$, задаваемое формулами (1), (2), является непрерывным отображением, действующим в пространствах

- (a) $H^s \times H^r \rightarrow H^t$, $\|f \cdot g\|_t \leq C(s, r, t) \|f\|_s \|g\|_r$,
- (b) $H^{-t} \times H^s \rightarrow H^{-r}$, $\|f \cdot g\|_{-r} \leq C'(s, r, t) \|f\|_{-t} \|g\|_s$.

3. Операторы. Приведем строгое определение исследуемых в работе операторов. Пусть $f \in H^{-s}$, $\varphi \in H^s$, $s \geq 0$. Тогда определена форма

$$\langle f, \varphi \rangle = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) \overline{\widehat{\varphi}(k)},$$

где ряд сходится абсолютно.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве H^0 полуторалинейную форму

$$\tau_{2s}[u, v] := \langle \mathbb{D}^{2s} u, v \rangle, \quad u, v \in H^s(\mathbb{T}), \quad s > \frac{1}{2}.$$

Она плотно определена, замкнута и неотрицательна, так как $\mathbb{D}^2 \geq 0$ в H^0 . Определим теперь полуторалинейную форму, порожденную периодическим распределением $V \in H^{-s}$ в пространстве H^0 . Пусть

$$V(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{V}(k) e^{ik\pi x}.$$

Тогда в силу равенств (1), (2) и леммы о свертке произведение $V(x) \cdot u(x)$ корректно определено для произвольной функции $u \in H^s(\mathbb{T})$ и $V(x) \cdot u(x) \in H^{-s}$. Поэтому периодическое распределение $V \in H^{-s}$ порождает в пространстве H^0 плотно определенную полуторалинейную форму

$$t_V[u, v] := \langle V(x)u(x), v(x) \rangle, \quad \text{Dom}(t_V) = H^s.$$

Положим

$$t[u, v] := \tau_{2s}[u, v] + t_V[u, v], \quad \text{Dom}(t) := H^s.$$

Поскольку множество C^∞ плотно в H^{-s} , каждое распределение $f \in H^{-s}$ допускает представление

$$f = f_\varepsilon + g_\varepsilon, \quad \|f_\varepsilon\|_{-s} \leq \varepsilon, \quad g_\varepsilon \in C^\infty,$$

где $\varepsilon > 0$ может быть сколь угодно малым. Используя этот факт и лемму о свертке можно показать, что верна

ЛЕММА 2. Полуторалинейная форма t_V является 0-ограниченной относительно полуторалинейной формы τ_{2s} , т.е. для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое число $b_\varepsilon \geq 0$, что

$$|t_V[u]| \leq \varepsilon \tau_{2s}[u] + b_\varepsilon \|u\|_0^2, \quad u \in \text{Dom}(\tau_{2s}).$$

В силу [2; теорема VI.1.33] полуторалинейная форма t является плотно определенной, замкнутой и секториальной. Согласно первой теореме о представлении [2; теорема VI.2.1] с нею ассоциирован m -секториальный оператор, который мы примем за определение возмущенного оператора $S(V)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $V \in H^{-s}$, $s > 1/2$. Операторы $S(V)$ корректно определены в пространстве H^0 как форм-суммы $\mathbb{D}^{2s} + V$. При этом

$$S(V)u = \mathbb{D}^{2s}u + V(x)u, \quad u \in \text{Dom}(S(V)) = \{u \in H^s \mid \mathbb{D}^{2s}u + V(x)u \in H^0\}.$$

В следующей теореме мы даем условия аппроксимации операторов $S(V)$ с сингулярными коэффициентами операторами $S(V_n)$ того же класса, в частности, с гладкими коэффициентами.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $s > 1/2$, $V_n, V \in H^{-s}$ и $\|V_n - V\|_{-s} \rightarrow 0$. Тогда последовательность операторов $S(V_n)$ сходится к оператору $S(V)$ в смысле равномерной резольвентной сходимости, т.е.

$$\|R(\lambda, S(V_n)) - R(\lambda, S(V))\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \rho(S(V)) \neq \emptyset. \quad (3)$$

Доказательство теоремы 2 опирается на лемму 1 и теорему VI.3.6 из [2].

В частности, соотношение (3) выполняется, если $V_n = \sum_{|k| \leq n} \widehat{V}(k) e^{ik\pi x}$.

Общий подход к исследованию сингулярных возмущений дифференциальных операторов предложен в [3]–[5]. Он основывается на теории мультипликаторов и также приводит к теоремам 1 и 2.

Описание качественных спектральных свойств операторов $S(V)$ дает

ТЕОРЕМА 3. *Справедливы следующие утверждения:*

- (a) для каждого сектора $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\arg \lambda| \leq \varepsilon\}$ найдется такое $k \in \mathbb{R}_+$, что числовой образ оператора $S(V) + k$ лежит в этом секторе;
- (b) операторы $S(V)$ являются самосопряженными тогда и только тогда, когда распределение $V(x)$ является вещественнозначным;
- (c) операторы $S(V)$ имеют чисто дискретный спектр;
- (d) системы корневых векторов операторов $S(V)$ полны в гильбертовом пространстве H^0 .

Отметим, что для случая $s \in \mathbb{N}$ приведенные утверждения установлены ранее в [1], [6]–[8]. Общий случай $s \in (1/2, \infty)$ исследуется сходным образом.

4. Спектры. Пусть $\{\lambda_k(V)\}_{k \geq 0}$ – последовательность собственных значений оператора $S(V)$ с учетом их алгебраической кратности, которая упорядочена лексикографически. Собственное значение $\lambda_k(V)$ предшествует собственному значению $\lambda_{k+1}(V)$, если

$$\operatorname{Re} \lambda_k(V) < \operatorname{Re} \lambda_{k+1}(V) \quad \text{или} \quad \operatorname{Re} \lambda_k(V) = \operatorname{Re} \lambda_{k+1}(V), \quad \operatorname{Im} \lambda_k(V) \leq \operatorname{Im} \lambda_{k+1}(V).$$

Локализацию спектра операторов $S(V)$ описывает

ТЕОРЕМА 4. Пусть $V \in H^{-s}$, $s > 1$. Существуют такие числа $M = M(\|V\|_{-s}) \geq 1$ и $n_0 = n_0(\|V\|_{-s}) \in \mathbb{N}$, что

(I) в треугольнике

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} \lambda| - M \leq \operatorname{Re} \lambda \leq (n_0^{2s} - n_0^s) \pi^{2s}\}$$

находится в точности $2n_0 - 1$ собственное значение оператора $S(V)$;

(II) при $n \geq n_0$ в диске

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda - n^{2s} \pi^{2s}| < n^s\}$$

находится в точности два собственных значения оператора $S(V)$.

Для удобства дальнейших формулировок введем следующие обозначения:

$$\lambda_n^-(V) := \lambda_{2n}(V), \quad \lambda_n^+(V) := \lambda_{2n+1}(V), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

$$h^s := \left\{ a = \{a(k)\}_{k \in \mathbb{N}} \mid \|a\|_{h^s}^2 := \sum_{k \in \mathbb{N}} (1 + |k|)^{2s} |a(k)|^2 < \infty \right\}.$$

Через $h^s(n)$ будем обозначать n -й член последовательности из пространства h^s . Понятно, что если $a = \{a(k)\}_{k \in \mathbb{N}} \in h^s$, то $a(k) = o(|k|^{-s})$, $k \rightarrow \infty$.

Основным результатом работы является

ТЕОРЕМА 5. Пусть $V \in H^{-s\alpha}$, $s > 1$, $\alpha \in [0, 1]$. Тогда

- (a) равномерно на ограниченных множествах распределений $V \in H^{-s\alpha}$ верны асимптотические оценки:

$$\lambda_n^\pm(V) = n^{2s} \pi^{2s} + \widehat{V}(0) \pm \sqrt{\widehat{V}(-2n) \widehat{V}(2n)} + r_n^\pm(V),$$

$$\{r_n^\pm(V)\}_{n \in \mathbb{N}} \in \begin{cases} h^{s(1-2\alpha)}, & \text{если } \alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ h^{s(1/2-\alpha)}, & \text{если } \alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \end{cases}$$

(b) если, кроме того, распределение V вещественнозначно, то

$$\lambda_n^\pm(V) = n^{2s} \pi^{2s} + \widehat{V}(0) \pm |\widehat{V}(2n)| + h^{s(1-2\alpha)}(n).$$

При $s = 1$, $\alpha \in [0, 1]$ аналогичные оценки установлены ранее в [1], [9]. При $\alpha \in [0, 1/2)$ они совпадают с приведенными, а при $\alpha \in [1/2, 1]$ остаточный член лежит в $h^{s(1-2\alpha-\varepsilon)}$, $\varepsilon > 0$.

Доказательство теорем 4 и 5 сводится к исследованию аналогичных периодических операторов $L(V)$, определенных в негативных соболевских пространствах $H^{-s}(\mathbb{T})$ (см. [10], где $s \in \mathbb{N}$) благодаря изоспектральности таких операторов с $S(V)$ [1], [9].

Для полупериодических операторов аналогичные результаты развернуто изложены в работе [11].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. Mikhailets, V. Molyboga, *The spectral problems over the periodic classes of distributions*, Preprint, Inst. of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2004 (Ukrainian). [2] Т. Ка-то, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972. [3] М. И. Нейман-заде, А. А. Шкалик, *Матем. заметки*, **66**:5 (1999), 723–733. [4] А. А. Шкалик, Д.-Г. Бак, *Матем. заметки*, **71**:5 (2002), 643–651. [5] М. I. Neiman-zade, A. A. Shkalikov, *Russ. J. Math. Phys.*, **13**:1 (2006), 70–78. [6] В. Михайлец, В. Молибога, *Докл. НАН Украины*, 2006, № 7, 26–31. [7] В. Михайлец, В. Молибога, *Укр. матем. журн.*, **59**:6 (2007), 785–797. [8] В. Молибога, *Вісн. Київськ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-матем. науки*, 2010, № 3, 68–73. [9] V. Mikhailets, V. Molyboga, *Methods Funct. Anal. Topology*, **15**:1 (2009), 31–40. [10] V. Molyboga, *Methods Funct. Anal. Topology*, **9**:2 (2003), 163–178. [11] В. Михайлец, В. Молибога, *Докл. НАН Украины*, 2011, № 11, 36–43.

В. А. Михайлец

Институт математики НАН Украины, г. Киев

E-mail: mikhailets@imath.kiev.ua

Поступило

10.03.2011

Исправленный вариант

30.06.2011

В. Н. Молибога

Институт математики НАН Украины, г. Киев

E-mail: molyboga@imath.kiev.ua