Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Амосов, В. Ж. Сакбаев, Об аналогах спектрально-
го разложения квантового состояния, *Матем. заметки*,
2013, том 93, выпуск 3, 323–332

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9085>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 10:41:00

Об аналогах спектрального разложения квантового состояния

Г. Г. Амосов, В. Ж. Сакбаев

Исследуется множество квантовых состояний в гильбертовом пространстве. Изучается структура множества крайних точек совокупности состояний и получено представление произвольного состояния интегралом Петтиса по конечно-аддитивной мере на множестве векторных состояний, обобщающее спектральное разложение нормального состояния.

Библиография: 18 названий.

DOI: 10.4213/mzm9085

1. Введение. Изучению квантовых состояний, весов и мер на проекторах алгебры $B(H)$ посвящены работы Дж. фон Неймана, Ф. Мюррея, А. Глисона, И. Сигала, Дж. Макки и многих других авторов (см. [1] и цитированную там литературу). Теорема Глисона устанавливает связь между вполне аддитивными мерами на проекторах и нормальными состояниями. Теорема 27.16 [1], являющаяся обобщением теоремы Глисона на случай неограниченных мер, утверждает, что мера, заданная на проекторах алгебры $B(H)$, определяет вес на $B(H)$. Цель настоящей статьи – изучить представление состояний, не являющихся нормальными (см. [2]), с помощью мер на множестве векторных состояний. Поскольку каждое векторное состояние однозначно представляется одномерным ортогональным проектором, мы будем отождествлять векторные состояния и одномерные ортогональные проекторы.

Разложения нормального состояния может производиться по множеству попарно ортогональных одномерных проекторов некоторого ортогонального разложения единичного оператора (спектральная теорема), а может – по переполненной системе одномерных ортогональных проекторов (например, состояниям Глаубера, см. [3]). В первом случае разложение состояния называется *ортогональным*, а во втором – *неортогональным*. Состояния, не являющиеся нормальными, описаны в работах [4]–[6] с помощью процедуры инвариантного усреднения и в работах [7]–[9] – с помощью процедуры усреднения по конечно-аддитивной мере. В статье [10] установлена представимость произвольного квантового состояния в сепарабельном гильбертовом пространстве интегралом Петтиса по конечно-аддитивной мере на множестве векторных состояний, при этом нормальная составляющая состояния соответствует

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 09-01-00265, 10-01-00395), при поддержке АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы” (проекты N 2.1.1/11133, 2.1.1/12136), при поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы.

счетно-аддитивной компоненте меры. Полученное в [10] разложение является неортогональным в указанном выше смысле.

В настоящей статье результат о существовании неортогонального разложения произвольного состояния доказан для случая несепарабельного гильбертова пространства. В случае сепарабельного гильбертова пространства определены условия, при которых у квантового состояния существует ортогональное разложение в интеграл Петтиса по конечно-аддитивной мере на множестве попарно коммутирующих векторных состояний, имеющее вид спектрального разложения неотрицательного ядерного оператора. С помощью полученного результата о разложении дано описание совокупности крайних точек множества квантовых состояний.

2. Некоторые используемые понятия и обозначения. Гильбертово пространство и множество квантовых состояний. Пусть H – некоторое гильбертово пространство, $\{e_\alpha, \alpha \in \Omega\}$ – ортонормированный базис в пространстве H . Для сепарабельного пространства в качестве Ω может быть выбрано множество натуральных чисел $\mathbb{N}$. Существование ортонормированного базиса в произвольном гильбертовом пространстве устанавливается с помощью леммы Цорна (см. [11]).

Далее $B(H)$ есть банахово пространство линейных ограниченных операторов в пространстве H и $B^*(H)$ – его сопряженное. Обозначим через $B_*(H)$ предсопряженное пространство линейных функционалов на $B(H)$. Через $T_1(H)$ будем обозначать банахово пространство ядерных операторов, действующих в пространстве H и наделенное следовой нормой. Пространство, сопряженное к $T_1(H)$, изометрически изоморфно пространству $B(H)$, причем каждый ограниченный оператор $\mathbf{A} \in B(H)$ задает на пространстве $T_1(H)$ функционал, значение которого на произвольном элементе $\rho \in T_1(H)$ равно следу $\text{Tr}(\rho\mathbf{A})$ ядерного оператора $\rho\mathbf{A}$.

Через $\Sigma(H)$ обозначается множество квантовых состояний – части единичной сферы пространства $B^*(H)$, лежащей в положительном конусе функционалов из $B^*(H)$ (см. [2]). Через $\Sigma_n(H)$ обозначим множество нормальных квантовых состояний – функционалов из $\Sigma(H)$, непрерывных не только по норме, но и в ультраслабой топологии пространства $B^*(H)$ (см. [1]). Через $\Sigma_p(H)$ будем обозначать множество чистых векторных состояний – множество крайних точек пространства $\Sigma_n(H)$, задаваемых проекторами на одномерные подпространства пространства H (см. [2], [5]). Чистое состояние, отвечающее ортогональному проектору на единичный вектор $u \in H$, задает на пространстве $B(H)$ линейный непрерывный функционал по правилу $\langle \rho_u, \mathbf{A} \rangle = (u, \mathbf{A}u)_H$. В силу изометрического изоморфизма пространств $B_*(H)$ и $T_1(H)$ мы будем отождествлять нормальное состояние $\rho \in \Sigma_n(H)$ и ядерный оператор $\hat{\rho} \in T_1(H)$ такой, что $\rho(\mathbf{A}) = \text{Tr}(\hat{\rho}\mathbf{A})$.

Ультрафильтры и двухзначные меры. Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $2^{\mathbb{N}}$ – σ -алгебра всех его подмножеств, $B(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}) = l_\infty$ и $ba(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}) = l_\infty^*$; через $ca(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ и $pba(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ обозначим соответственно счетно аддитивную и чисто конечно аддитивную части пространства l_∞^* ($ca(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}) = l_1$, см. [12]). Через $V(\mathbb{N})$ обозначим пересечение единичной сферы пространства l_∞^* с конусом его неотрицательных элементов, а через $W(\mathbb{N})$ – пересечение $pba(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}) \cap V(\mathbb{N})$, т.е. множество неотрицательных нормированных мер на $\mathbb{N}$, которые принимают нулевое значение на любом конечном подмножестве.

Согласно результатам статьи [13] (см. также [14]) множества $V(\mathbb{N})$ и $W(\mathbb{N})$ есть выпуклые компактные в $*$ -слабой топологии пространства l_∞^* , множества крайних

точек которых составляют соответственно множества $V_0(\mathbb{N}) = \text{Extr}(V(\mathbb{N}))$ и $W_0(\mathbb{N}) = \text{Extr}(W(\mathbb{N}))$ мер, принимающих на алгебре $2^{\mathbb{N}}$ лишь два значения 0 или 1. Таким образом, для каждой меры $\mu \in V_0(\mathbb{N})$ алгебра $2^{\mathbb{N}}$ представима в виде объединения двух непересекающихся множеств $S_\mu(0)$ и $S_\mu(1)$, определяемых равенствами $S_\mu(s) = \mu^{-1}(s)$. Следовательно, для любой меры $\mu \in V_0(\mathbb{N})$ совокупность $S_\mu(1)$ элементов алгебры $2^{\mathbb{N}}$ образует ультрафильтр (см. [12]), который будем обозначать через F_μ . Тогда для меры $\mu \in W(\mathbb{N})$ ультрафильтр F_μ является неглавным (т.е. пересечение всех множеств из F_μ пусто), а для меры $\mu \in V(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}) \cap ca(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ – главным. Причем различным мерам $\mu, \nu \in V_0(\mathbb{N})$ соответствуют различные ультрафильтры F_μ, F_ν такие, что найдутся множества $A \in F_\mu$ и $B \in F_\nu$, имеющие пустое пересечение.

Наоборот, если задан некоторый неглавный ультрафильтр F , то равенство $\mu(\mathbb{N}_\alpha) = 1$ для всех $\mathbb{N}_\alpha \in F$ определяет меру $\mu_F \in W_0(\mathbb{N})$. При этом если два ультрафильтра $F, \mathbb{J}$ различны, то они содержат непересекающиеся подмножества $F_\alpha \in F$ и $G_\beta \in \mathbb{J}$, а соответствующие им меры $\mu_F, \mu_{\mathbb{J}} \in W_0(\mathbb{N})$ различны. Следовательно, можно отождествить чисто конечно аддитивные двузначные меры $\mu \in W_0(\mathbb{N})$ и неглавные ультрафильтры подмножеств $F \in 2^{\mathbb{N}}$ (см. также [15; гл. 3.5]). Если $\mu = \mu_F$, то будем говорить, что ультрафильтр F является *носителем* меры $\mu \in W_0(\mathbb{N})$.

Множество натуральных чисел в описанной конструкции может быть без каких-либо изменений заменено на произвольное множество S с σ -алгеброй всех подмножеств 2^S .

Пусть $2^{S_1(H)}$ – σ -алгебра всех подмножеств единичной сферы $S_1(H)$ гильбертова пространства H . Через $ba(S_1(H), 2^{S_1(H)})$ обозначим банахово пространство комплекснозначных конечно-аддитивных мер на измеримом пространстве $(S_1(H), 2^{S_1(H)})$, норма в котором определяется вариацией меры. Заметим, что указанное банахово пространство конечно аддитивных мер является сопряженным к банахову пространству $b(S_1(H), 2^{S_1(H)})$ ограниченных комплекснозначных измеримых функций, наделенному суп-нормой. Будем обозначать через W пересечение единичной сферы с конусом неотрицательных элементов пространства $ba(S_1(H), 2^{S_1(H)})$, через W_{ca} – меры из множества W , обладающие свойством счетной аддитивности. Множество W является выпуклым подмножеством пространства $ba(S_1(H), 2^{S_1(H)})$, компактным в $*$ -слабой топологии пространства $ba(S_1(H), 2^{S_1(H)})$ – слабой топологии, определяемой всеми функционалами, порожденными элементами банахова пространства $b(S_1(H), 2^{S_1(H)})$. Тогда согласно теореме Крейна–Мильмана множество W является замыканием в $*$ -слабой топологии выпуклой оболочки $\text{co}(\text{Extr}(W))$ совокупности своих крайних точек $\text{Extr}(W)$. Согласно же теореме 33 [14] множество $\text{Extr}(W)$ есть множество тех мер из W , которые принимают на σ -алгебре $2^{S_1(H)}$ только два значения – 0 или 1. Поэтому далее будем обозначать множество $\text{Extr}(W)$ через W^0 .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Подчеркнем, что для гильбертова пространства векторнозначных функций со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве, определенных и квадратично интегрируемых на измеримом пространстве с мерой, свойство сепарабельности тесно связано со свойством счетной аддитивности меры. В работе [8] приведен пример широкого класса несепарабельных гильбертовых пространств функций, квадратично интегрируемых в смысле Петтиса по конечно-аддитивной мере.

3. Структура множества квантовых состояний. Следующая теорема устанавливает результат о представимости произвольного квантового состояния в гильбертовом пространстве интегралом Петтиса по конечно-аддитивной мере на множестве одномерных ортогональных проекторов и обобщает утверждение из работы [10] на случай несепарабельного гильбертова пространства.

ТЕОРЕМА 1 (о неортогональном разложении произвольного состояния в интеграл по чистым векторным состояниям). *Для любого состояния $\rho \in \Sigma(H)$ существует мера $\mu \in W$ такая, что справедливо равенство $\rho = \int_{S_1(H)} \rho_u d\mu$, в котором интеграл понимается в смысле Петтиса:*

$$\forall \mathbf{A} \in \mathbf{B}(H) \quad \langle \rho, \mathbf{A} \rangle = \int_{S_1(H)} \langle \rho_u, \mathbf{A} \rangle d\mu. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем некоторое отображение $\rho \in \Sigma(H)$, т.е. неотрицательное нормированное отображение $\rho: B(H) \mapsto \mathbb{C}$.

Рассмотрим также задаваемое единичной сферой $S_1(H)$ отображение $\alpha: B(H) \mapsto b(S_1(H), 2^{S_1(H)})$, значение $\alpha(\mathbf{A})$ которого на произвольном элементе $\mathbf{A} \in B(H)$ задается равенством

$$\alpha(\mathbf{A})u = (u, \mathbf{A}u) = \rho_u(\mathbf{A}), \quad u \in S_1(H).$$

Тогда нашей задачей является указать такое отображение

$$\beta \in (b(S_1(H), 2^{S_1(H)}))^* = ba(S_1(H), 2^{S_1(H)}),$$

что $\rho = \beta \circ \alpha$.

Для достижения этой цели, докажем, что отображение α является инъективным. Действительно, если самосопряженные $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in B(H)$ удовлетворяют условию $(u, \mathbf{A}u) = (u, \mathbf{B}u)$ для всех $u \in S_1(H)$, то $(u, \mathbf{A}v) = (u, \mathbf{B}v)$ для всех $u, v \in S_1(H)$ и, по определению, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. Если же оператор $\mathbf{A} \in B(H)$ не самосопряжен, то он допускает разложение $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + i\mathbf{A}_2$, где операторы $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ самосопряжены, и далее следует применить приведенные рассуждения отдельно к вещественной и к мнимой частям квадратичной формы $(u, \mathbf{A}u)$, $u \in B(H)$.

Итак, отображение α инъективно, и пусть линейное многообразие Λ есть его образ в банаховом пространстве $b(S_1(H), 2^{S_1(H)})$. Тогда α является изометрическим линейным изоморфизмом банахова пространства $B(H)$ и линейного подпространства Λ банахова пространства $b(S_1(H), 2^{S_1(H)})$, ибо

$$\|\alpha(\mathbf{A})\|_{b(S_1(H), 2^{S_1(H)})} = \sup_{u \in S_1(H)} |(u, \mathbf{A}u)| = \|\mathbf{A}\|_{B(H)}.$$

Следовательно, на линейном пространстве Λ , снабженном индуцированной из пространства $b(S_1(H), 2^{S_1(H)})$ нормой, определено обратное отображение, которое линейно и изометрично. Следовательно, линейное многообразие Λ замкнуто в банаховом пространстве $b(S_1(H), 2^{S_1(H)})$, и, снабженное индуцированной из пространства $b(S_1(H), 2^{S_1(H)})$ нормой, само является банаховым пространством.

Определим на банаховом пространстве Λ функционал $\varphi = \rho \circ \alpha^{-1}: \Lambda \mapsto \mathbb{C}$. Тогда функционал φ линеен и непрерывен как композиция двух линейных непрерывных отображений. Прообразами неотрицательных функций $f \in b(S_1(H), 2^{S_1(H)})$ при

отображении α являются неотрицательные операторы, причем прообразом единичной функции – единичный оператор. Поэтому функционал φ принимает неотрицательные значения на неотрицательных элементах пространства $b(S_1(H), 2^{S_1(H)})$ и единичное значение на единичной функции. Поскольку $\|\varphi\| \leq \|\rho\| \|\alpha^{-1}\| = 1$, то $\|\alpha\| = 1$. Тогда по теореме Хана–Банаха функционал φ продолжается до функционала $\mu \in ba(S_1(H), 2^{S_1(H)})$, норма которого равна единице и который принимает единичное значение на единичной функции. В силу этих двух условий продолжение μ также принимает неотрицательные значения на неотрицательных функциях (см. [9], [11]). Тогда $\rho(\mathbf{A}) = \mu \circ \alpha(\mathbf{A})$ для всех $\mathbf{A} \in B(H)$, т.е. $\rho = \int_{S_1(H)} \rho_u d\mu$ (в последнем равенстве интеграл понимается в смысле Петтиса, см. [12], [9]). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение и доказательство теоремы 1 не изменятся, если единичную сферу заменить некоторым всюду плотным в ней множеством (см. [10]).

ТЕОРЕМА 2 (об ортогональном разложении состояния). Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство. Предположим, что для состояния $\omega \in B(H)^*$ существует ортогональная проекторозначная мера $E(\cdot)$ сопоставляющая каждому борелевскому множеству $\Omega \subset \mathbb{R}$ ортогональный проектор $E(\Omega)$, на которой функция $\omega(E(\Omega))$ принимает только два значения 0 или 1. Тогда найдется такой ортонормированный базис $e_n \in H$ и такая конечно-аддитивная мера μ на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$, что

$$\omega(x) = \int_{\mathbb{N}} (e_n, x e_n) d\mu(n), \quad x \in B(H). \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим алгебру бесконечномерных матриц $B(l^2)$. Мы будем считать, что алгебра $B(l^2)$ порождается фиксированной цепочкой алгебр конечномерных $2^n \times 2^n$ матриц $M_n = M_{2^n}(\mathbb{C})$, так что $M_n \subset M_m$ при $m > n$. Алгебра M_n порождается системой из n четверок коммутирующих матричных единиц $e_{ij}^{(k)}$, $1 \leq i, j \leq 2, 1 \leq k \leq n$, таких, что

$$e_{ij}^{(k)} e_{mn}^{(k)} = \delta_{jm} e_{in}^{(k)},$$

причем вложение $M_n \subset M_{n+m}$ осуществляется в согласии с изоморфизмом $M_{n+m} = M_n \otimes M_m$, т.е. алгебра M_{n+m} получается из M_n с помощью добавления линейных комбинаций m дополнительных четверок коммутирующих матричных единиц.

Для состояния ω найдется хотя бы один бесконечномерный проектор P с бесконечномерным дополнением, такой, что $\omega(P) = 1$. Действительно, $\omega(I) = 1$, так что для любого разложения $I = E(\Omega) + E(\bar{\Omega})$ состояние ω равно единице на проекторе $P \in \{E(\Omega), E(\bar{\Omega})\}$ и нулю на $I - P$. Таким образом, мы можем построить представление π алгебры M_1 , порожденной матричными единицами $e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}$, такое, что

$$\pi(e_{11}) = P, \quad \pi(e_{22}) = I - P,$$

и сужение $\omega|_{\pi(M_1)}$ порождает состояние ω_1 на алгебре M_1 со свойством

$$\omega_1(x) = \omega(\pi(x)), \quad x \in M_1,$$

причем

$$\omega_1(e_{11}) = 1, \quad \omega_1(e_{12}) = \omega_1(e_{21}) = \omega_1(e_{22}) = 0.$$

Представление π алгебры M_1 можно таким образом расширить до представления алгебры M_n , что для образов всех диагональных элементов выполняется включение

$$\pi(e_{j_1 j_1}^{(k_1)} \dots e_{j_s j_s}^{(k_s)}) \in \{E(\Omega)\}.$$

Рассмотрим сужение

$$\omega_n(x) = \omega(\pi(x)), \quad x \in M_n.$$

По условию теоремы это состояние будет принимать значение 0 или 1 на диагональных элементах и 0 на внедиагональных.

Заметим, что для

$$x = e_{i_1 j_1}^{(1)} \dots e_{i_n j_n}^{(n)}, \quad y = e_{i_{n+1} j_{n+1}}^{(n+1)} \dots e_{i_{n+m} j_{n+m}}^{(n+m)}$$

значение состояния

$$\omega_{n+m}(xy) = \omega_n(x) \tilde{\omega}_m(y), \quad (3)$$

где

$$\tilde{\omega}_m(y) = \omega(\pi(y)).$$

Тождество (3) аналогично расширяется на большее количество матричных единиц и, далее, на алгебры ими порожденные. Тем самым, получаем, что ω является состоянием-произведением в смысле [16].

Обозначим $\mathcal{P}$ семейство проекторов коммутативной алгебры, порожденной всеми попарно коммутирующими (бесконечномерными) проекторами $\pi(e_{j_1 j_1}^{(k_1)} \dots e_{j_s j_s}^{(k_s)})$ при всех возможных j_p, k_p . Выберем ортонормированную систему (e_n) в пространстве H , такую что $|e_n\rangle\langle e_n|$ порождают $\mathcal{P}$. Определим конечно-аддитивную двузначную меру μ на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ по формуле

$$\mu(X) = \lambda,$$

если найдется $x \in M_n$, такой что

$$\pi(x) = \sum_{s \in X} |e_s\rangle\langle e_s|$$

и

$$\omega(\pi(x)) = \lambda \in \{0, 1\}.$$

Равномерно гиперфинитная алгебра M , порожденная возрастающим семейством подалгебр $\pi(M_n)$ является фактором, то есть $M \cap M' = \{\mathbb{C}1\}$ в силу того [16], что наше состояние обладает свойством (3). Тогда сужение ω на M , можно представить в виде

$$\omega(y) = \int_{\mathbb{N}} (e_n, y e_n) d\mu(n), \quad y \in M.$$

Действительно, равенство выполняется для элементов $y = \pi(x)$, $x \in M_n$, для любого n , по построению, что автоматически влечет его выполнение на всей алгебре. Рассмотрим коммутант M' . Если $M' = \{\mathbb{C}1\}$ или сужение ω на M' тривиально (ноль везде, за исключением тождественного оператора), тогда наше утверждение доказано. В противном случае, для завершения доказательства нужно применить всю цепочку рассуждений выше для сужения $\omega|_{M'}$. Теорема 2 доказана.

Множество состояний вида (2) при всевозможном выборе ортонормированных базисов $\{e_k\}$ пространства H и счетно аддитивных мер $\mu \in ca(\mathbb{N}) \cap V(\mathbb{N})$ представляет, согласно спектральной теореме и теореме Глисона (см. [1; 24.6]), параметризацию множества нормальных состояний $\Sigma_n(H)$. Если же меры μ пробегают множество мер $V(\mathbb{N})$, то состояния $\rho_{\mu, \{e_k\}} = \int_{\mathbb{N}} |e_k\rangle \langle e_k| d\mu$ пробегают все множество $\Sigma(H)$.

Таким образом, произвольное квантовое состояние r из множества $\Sigma(H)$ допускает вид разложения в интеграл (1) по векторным состояниям по конечно аддитивной мере μ на множестве $\Sigma_p(H)$. Полученные разложения являются обобщением на состояния общего вида спектрального разложения и разложения Глаубера–Сударшана (см. [3]) для нормального состояния. Заметим, что состояния вида (1) изучались в работах Диксмье по обобщению понятия следа (см. [6]), в работе Шриниваза по постулатам редукции в теории квантовых измерений (см. [4]), а также к указанному виду относятся состояния Кубо–Мартина–Швингера (см. [17], [18]). В указанных исследованиях квантовое состояние, не являющееся нормальным, представлено как инвариантное среднее последовательности чистых векторных состояний, т.е. как интеграл вида (1) по мере μ , удовлетворяющей условиям инвариантности относительно группы сдвигов. Мы отказываемся от последнего требования, поскольку ставим цель определить не операцию обобщенного следа (не зависящую от выбора базиса), а некоторое конкретное состояние на $B(H)$ (для которого не все базисы в H равноправны).

4. О разложениях элементов множества $\Sigma(H)$ по крайним точкам. Согласно теореме Крейна–Мильмана всякое компактное выпуклое множество в линейном топологическом пространстве совпадает с замыканием выпуклой оболочки множества своих крайних точек. Например, множество крайних точек совокупности нормальных состояний $\Sigma_n(H)$ составляет множество $\Sigma_p(H)$ чистых векторных состояний и, наоборот, множество $\Sigma_n(H)$ совпадает с замыканием выпуклой оболочки множества $\Sigma_p(H)$ в топологии нормы пространства $B_*(H)$ (см. [1]).

В тоже время вся совокупность крайних точек может оказаться избыточной для построения выпуклого компакта с помощью замыкания выпуклой оболочки, что показывает следующий простой пример. Замкнутый единичный круг в пространстве $\mathbb{R}^2$ является замыканием выпуклой оболочки счетного множества элементов окружности с рационально соизмеримой с π угловой координатой, тогда как множество всех крайних точек образует вся окружность. В случае множества $\Sigma(H)$ для получения всей совокупности состояний $\Sigma(H)$ посредством замыкания выпуклой оболочки системы крайних элементов в $*$ -слабой топологии достаточно взять лишь систему векторных чистых состояний $\Sigma_p(H)$, как показывает следующая теорема.

ТЕОРЕМА ГОЛДСТАЙНА [12; теорема 5, гл. 5, с. 460]. Пусть κ – естественное вложение банахова пространства $B_*(H)$ в $B^*(H)$. Тогда множество $\kappa S_1(B_*(H))$ всюду плотно в $S_1(B^*(H))$ в $*$ -слабой топологии пространства $B^*(H)$.

Следовательно, множество $\Sigma(H)$ совпадает с замыканием выпуклой оболочки множества $\Sigma_p(H)$ в $*$ -слабой топологии пространства $B^*(H)$ (см. [18; теорема 6, гл. 2]).

ТЕОРЕМА 3 (описание множества крайних точек). Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство. Тогда функционалы вида $\rho = \int_{\mathbb{N}} \mathbf{P}_{e_k} d\mu(k)$, где $\{e_k\}$ – некоторый ортонормированный базис, а $\mu \in V_0(\mathbb{N})$, входят в совокупность крайних точек множества $\Sigma(H)$.

Доказательству теоремы 3 предварим определения коммутативности состояния и оператора и связанные с ними свойства разложения квантового состояния.

Пусть $\rho \in \Sigma(H)$, $P \subset H$ – замкнутое линейное подпространство в H , $P^\perp$ – его ортогональное дополнение, $\mathbf{P}$ – оператор ортогонального проектирования на подпространство P в пространстве H . Для двух ограниченных операторов $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in B(H)$ обозначим через $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \equiv \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ их коммутатор.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что состояние ρ коммутирует с проектором $\mathbf{P}$, если

$$\rho([\mathbf{A}, \mathbf{P}]) = 0 \quad \text{для всех } \mathbf{A} \in B(H). \quad (4)$$

Обозначать этот факт будем равенством $[\rho, \mathbf{P}] = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если состояние $\rho \in T_1(H)$ является нормальным, то условие (4) равносильно равенству $[\hat{\rho}, \mathbf{P}] = 0$ при любом $\mathbf{A} \in B(H)$. Таким образом, данное нами определение расширяет понятие перестановочности состояния и ограниченной наблюдаемой на случай не обязательно нормальных состояний.

ЛЕММА 1. Состояние ρ коммутирует с проектором $\mathbf{P}$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\rho = \mathbf{P}\rho\mathbf{P} + \mathbf{P}^\perp\rho\mathbf{P}^\perp,$$

где функционал $\mathbf{P}\rho\mathbf{P} \in B^*(H)$ определяется функционалом ρ согласно равенству $\langle \mathbf{P}\rho\mathbf{P}, \mathbf{A} \rangle = \langle \rho, \mathbf{PAP} \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 1 приведено в работе [10].

Утверждение теоремы 3 является дополнительным к утверждению теоремы 2.

Для каждого ортонормированного базиса $\{f_k\}$ в пространстве H обозначим через $\Upsilon_{\{f_k\}}$ совокупность (решетку) ортогональных проекторов в пространстве H , коммутирующих с любым проектором из ортогонального разложения единичного оператора $\mathbf{I} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}_{f_k}$.

ЛЕММА 2. Если некоторое состояние $\rho \in \Sigma(H)$ коммутирует со всеми проекторами из семейства $\Upsilon_{\{f_k\}}$, то состояние ρ допускает разложение вида (2) с ортонормированным базисом $\{f_k\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если некоторое состояние $\rho \in \Sigma(H)$ коммутирует со всеми проекторами из множества проекторов $\Upsilon_{\{f_k\}}$, то на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ задана мера $\mu : \mu(B) = \rho(\sum_{k \in B} \mathbf{P}_{f_k})$ для всех $B \in 2^{\mathbb{N}}$, принадлежащая $V(\mathbb{N})$. Тогда состояние ρ допускает представление интегралом Петтиса (2) в том смысле, что для любого $\mathbf{A} \in B(H)$ справедливо равенство: $\rho(\mathbf{A}) = \int_{\mathbb{N}} (\mathbf{A}e_k, e_k) d\mu$.

Действительно, согласно лемме 1 для любого оператора $\mathbf{A} \in B(H)$ и любого проектора $\mathbf{P} \in \Upsilon_{\{f_k\}}$ выполнены равенства

$$\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{PAP}) + \rho(\mathbf{P}^\perp\mathbf{A}\mathbf{P}^\perp).$$

Аналогично, для любого конечного набора проекторов $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_m \in \Upsilon_{\{f_k\}}$ на попарно ортогональные подпространства, сумма которых равна единичному оператору, справедливо равенство

$$\rho(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^m \rho(\mathbf{P}_j \mathbf{A} \mathbf{P}_j).$$

А это и означает, что $\rho(\mathbf{A}) = \int_{\mathbb{N}} (\mathbf{A} e_k, e_k) d\mu$, поскольку

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{N}} (\mathbf{A} e_k, e_k) d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \mu(\{j \in \mathbb{N} : (\mathbf{A} e_j, e_j) \in \Delta_n(k)\}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-n}^n (\mathbf{P}_n(k) \mathbf{A} \mathbf{P}_n(k)). \end{aligned}$$

Здесь

$$\Delta_n(k) = \left[\frac{k}{n} \|\mathbf{A}\|, \frac{k+1}{n} \|\mathbf{A}\| \right), \quad \mathbf{P}_n(k) = \sum_{j \in \mathbb{N} : (\mathbf{A} e_j, e_j) \in \Delta_n(k)} \mathbf{P}_{f_j}.$$

Лемма 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Если функционал $\rho \in \Sigma(H)$ представим в виде (2) с мерой $\mu \in V_0(\mathbb{N})$, то он является крайней точкой множества $\Sigma(H)$. Действительно, пусть функционал ρ мажорирует некоторый другой функционал $r \in \Sigma(H)$. Тогда существует число $\sigma \in (0, 1)$ такое, что для любого проектора $\mathbf{Q} \in \pi(H)$ выполняется неравенство

$$\rho(\mathbf{Q}) \geq \sigma r(\mathbf{Q}). \quad (5)$$

Так как $\mu \in V_0(\mathbb{N})$, то мера μ принимает лишь два значения $\{0, 1\}$ на σ -алгебре $2^{\mathbb{N}}$ (см. [13]). Пусть

$$S_\mu(1) = \{A \in 2^{\mathbb{N}} : \mu(A) = 1\}, \quad S_\mu(0) = \{A \in 2^{\mathbb{N}} : \mu(A) = 0\}.$$

Тогда подмножества $\mathbf{A} \in S_\mu(1)$ образуют ультрафильтр множества $\mathbb{N}$, а для любого $\mathbb{N}_\alpha \in S_\mu(0)$ выполняется равенство $\rho(\mathbf{Q}_\alpha) = 0$, где $\mathbf{Q}_\alpha$ – ортогональный проектор, равный сумме ряда $\sum_{k \in \mathbb{N}_\alpha} \mathbf{P}_{e_k}$ в сильной операторной топологии пространства $B(H)$. Поэтому в силу условия (5) $r(\mathbf{Q}_{\mathbb{N}_\alpha}) = 0$ для любого $\mathbb{N}_\alpha \in S_\mu(0)$.

Пусть Υ – совокупность ортогональных H проекторов, равных сумме ряда $\sum_{k \in \mathbb{N}_\alpha} \mathbf{P}_{e_k}$ с базисом $\{e_k\}$ из представления (2) функционала ρ при всевозможных $\mathbb{N}_\alpha \in S_\mu(1)$. Пусть $\mathbf{Q}_1 \in \Upsilon$ и $r(\mathbf{Q}_1) = s$. Тогда $r(\mathbf{Q}_2) = s$ для любого $\mathbf{Q}_2 \in \Upsilon$. Предположим, что $r(\mathbf{Q}_2) = s' \neq s$. В силу определения множества Υ выполняются равенства $\rho(\mathbf{Q}_1) = \rho(\mathbf{Q}_2) = 1$ и $[\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2] = 0$. Поэтому, если

$$\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2, \quad \mathbf{Q}_{12} = \mathbf{Q}_1 (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_2), \quad \mathbf{Q}_{21} = \mathbf{Q}_2 (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_1),$$

то $\rho(\mathbf{Q}_0) = 1$ и $\rho(\mathbf{Q}_{21}) = \rho(\mathbf{Q}_{12}) = 0$. Тогда в силу неравенства (??) $r(\mathbf{Q}_{21}) = r(\mathbf{Q}_{12}) = 0$, поэтому $r(\mathbf{Q}_1) = r(\mathbf{Q}_2) = r(\mathbf{Q}_0)$ и $s' = s$. А так как $\mathbf{I} \in \Upsilon$ и $r(\mathbf{I}) = 1$, то $s = 1$.

Тогда функционал $r \in \Sigma(H)$, мажорируемый оператором ρ , коммутирует с семейством ортогональных проекторов Υ и, следовательно, в силу леммы 2 допускает разложение вида (2) с тем же базисом $\{e_k\}$, что и функционал ρ , (т.е. функционалы r и ρ коммутируют друг с другом). При этом для любого проектора $\mathbf{P} \in \Upsilon$ выполнено равенство $r(\mathbf{P}) = \rho(\mathbf{P})$. Следовательно, $r = \rho$. Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Н. Шерстнев, *Методы билинейных форм в некоммутативной теории меры и интеграла*, Физматлит, М., 2008.
- [2] У. Браттели, Д. Робинсон, *Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. C^* и W^* -алгебры. Группы симметрий. Разложение состояний*, Мир, М., 1982.
- [3] Р. Глаубер, *Квантовая оптика и радиофизика*, Мир, М., 1966.
- [4] M. D. Srinivas, "Collapse postulate for observables with continuous spectra", *Comm. Math. Phys.*, **71**:2 (1980), 131–158.
- [5] А. С. Холево, *Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории*, Ин-т компьютер. исслед., М.–Ижевск, 2003.
- [6] А. Л. Кери, Ф. А. Сукочев, "Следы Диксмье и некоторые приложения в некоммутативной геометрии", *УМН*, **61**:6 (2006), 45–110.
- [7] Г. Г. Амосов, В. Ж. Сакбаев, "Стохастические свойства динамики квантовых систем", *Вестн. СамГУ*, **8**:1 (2008), 479–494.
- [8] В. Ж. Сакбаев, "О динамике вырожденной квантовой системы в пространстве функций, интегрируемых по конечно-аддитивной мере", *Тр. МФТИ*, **1**:4 (2009), 126–147.
- [9] V. Zh. Sakbaev, "Stochastic properties of degenerated quantum systems", *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **13**:1 (2010), 65–85.
- [10] В. Ж. Сакбаев, "О множестве квантовых состояний и его усредненных динамических преобразованиях", *Изв. вузов. Матем.*, 2011, № 10, 48–58.
- [11] В. И. Богачев, О. Г. Смолянов, *Действительный и функциональный анализ*, УРСС, М., 2009.
- [12] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Т. 1. Общая теория*, ИЛ, М., 1962.
- [13] K. Yosida, E. Hewitt, "Finitely additive measures", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **72** (1952), 46–66.
- [14] В. С. Варадарайн, "Меры на топологических пространствах", *Матем. сб.*, **55**:1 (1961), 35–100.
- [15] А. Г. Ченцов, "Конечно аддитивные меры и релаксации экстремальных задач", 1993.
- [16] R. T. Powers, "Representations of uniformly hyperfinite algebras and their associated von Neumann rings", *Ann. of Math.* (2), **86**:1 (1967), 138–171.
- [17] L. Accardi, Y. G. Lu, I. V. Volovich, *Quantum Theory and its Stochastic Limit*, Springer, New York, 2002.
- [18] Ж. Эмх, *Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля*, Мир, М., 1976.

Г. Г. Амосов

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
 Московский физико-технический институт
 (государственный университет)
E-mail: gramos@mi.ras.ru

Поступило

21.03.2011

Исправленный вариант

18.06.2012

В. Ж. Сакбаев

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
 Московский физико-технический институт
 (государственный университет)