Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Лебедев, Поиск и структура стационарных равновесий в циклических играх, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 6, 913–921

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm909>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 14:20:28

УДК 519.6

ПОИСК И СТРУКТУРА СТАЦИОНАРНЫХ РАВНОВЕСИЙ В ЦИКЛИЧЕСКИХ ИГРАХ

В. Н. Лебедев

Доказывается существование оптимальных стационарных стратегий в циклической игре, которая проходит по вершинам двудольного графа до первого цикла, и платеж одного игрока другому есть сумма максимального и минимального локальных платежей этого цикла. Из полученного результата следует принадлежность задачи классу $NP \cap co-NP$, и для эргодических расширений матричных игр мы даем полиномиальный алгоритм нахождения оптимальных стратегий.

Библиография: 9 названий.

Введение. В [1] Л. С. Шепли дал следующее определение стохастической игры. Это игра двух лиц на множестве N позиций. В позиции k первый и второй игроки имеют m_k и n_k выборов соответственно. Игра считается неограниченной по длине. В позиции k первый выбирает i -ю альтернативу, а второй игрок выбирает j -ю альтернативу. Тогда с вероятностью p_{ij}^{kl} игра перейдет в позицию l , и первый игрок платит второму c_{ij}^k , а с вероятностью $s_{ij}^k > 0$ игра остановится. Если при каждом k либо $m_k = 1$, либо $n_k = 1$, то мы имеем игру с полной информацией. Для этого случая Шепли в [1] доказал существование стационарных оптимальных стратегий.

Используя этот результат, Д. Джиллет [2] распространил его на случай, когда $s_{ij}^k = 0$ при всех i, j, k (в этом случае под выигрышем понимается средний выигрыш за один шаг).

В [3] получено важное сведение детерминированных бесконечных игр, где p_{ij}^{kl} равно 0 или 1 при всех i, j, k, l , к конечным циклическим играм, где игра проходит по ребрам графа до первого цикла и платеж первого второму есть средняя величина полученного цикла.

В [4]–[7] изучались вопросы поиска оптимальных стратегий в циклических играх. В [4] показана геометрическая скорость определения цены игры с помощью динамического программирования Беллмана.

В [6] было замечено, что при наличии равновесия в стационарных стратегиях задача определения цены игры в заданной позиции относится к классу $NP \cap co-NP$. Там же полностью описана структура оптимальных стратегий игроков с помощью алгоритма потенциальных преобразований. В [7] показано, что в худшем случае построенный алгоритм экспоненциален от длины представления входной игровой сети, и отмечено, что полиномиального алгоритма решения таких игр автору не известно.

Пусть $G = (V; E) = (B, A; E)$ – конечный, ориентированный, двудольный граф с долями A и B без параллельных ребер. Ориентированное ребро с началом в вершине v и концом в вершине w обозначим (v, w) . Далее $E(V_1, V_2)$ обозначает множество ребер с

началами в вершинах V_1 и концами в вершинах V_2 ; $E(V_1)$ обозначает множество ребер с началами в вершинах V_1 ; $V(V_1)$ – множество концевых вершин ребер с началами в вершинах V_1 . Мы предполагаем беступиковость графа, т.е. множество $E(v)$ непусто для любой вершины v графа.

Вершины B (соответственно A) называют вершинами *первого* (соответственно *второго*) *угроков*. Рассматривается следующая позиционная антагонистическая игра двух лиц. Имеется фишка, которая в начальный момент располагается в некоторой вершине $v_0 \in V$. Игроки шаг за шагом передвигают фишку по ребрам графа по следующему правилу.

Если в текущий момент времени фишка находится в позиции $v \in B$ ($v \in A$), то первый (второй) выбирает некоторое ребро $(v, w) \in E(v)$ и передвигает ее в следующую вершину w . Предположим, что игра длится бесконечно долго, тогда фишка пройдет бесконечный маршрут $T := v_0 \cdots v_t \cdots$. Пусть $c(T): T \rightarrow \mathbb{R}$ – платежный функционал пути в G . Тогда в разыгранной партии проигрыш первого, соответственно выигрыш второго, есть величина $c(T)$. Таким образом, первый минимизирует $c(T)$, а второй максимизирует это значение.

Основной вопрос этой статьи – изучение платежных функционалов $c(T)$, для которых имеется равновесие в стационарных стратегиях. Пусть каждому ребру $e \in E$ графа приписано целое число $c(e) \in \mathbb{Z}$ (целочисленная стоимостная функция на ребрах графа) и $T := v_0 \cdots v_t \cdots$ – маршрут игры. Хорошо изученным случаем (см. [5]–[8]) является средний предельный платежный функционал:

$$c(T) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} c(v_i, v_{i+1}).$$

В связи с отсутствием полиномиального алгоритма для этого случая функционала естественно ослабить ограничения на платежный функционал и рассмотреть позиционные средние. В этом случае выделены существенные классы игр с полиномиальным алгоритмом определения оптимальных стратегий. Так в [8] доказано наличие равновесия в стационарных стратегиях для максимального предельного платежного функционала для более общей постановки игровой задачи, там же представлен полиномиальный алгоритм решения таких игр.

В данной статье, используя результаты [9], изучается случай:

$$c(T) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} c(v_t, v_{t+1}) + \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} c(v_t, v_{t+1}).$$

(Если стратегии игроков стационарны, то это – просто сумма максимального $c(e)$ и минимального $c(e)$ ребер цикла, на который выйдет игра. Для позиционного среднего в определении выше мы должны сумму разделить на два, тем не менее для сокращения записи коэффициент перед суммой будем опускать.)

В [9] рассмотрен частный случай результата данной работы, так называемые симметрические игры. Несмотря на применение близкого метода форсирования наилучшей позиции, доказательство индуктивного перехода существенно усложняется в лемме 1 настоящей работы, точно так же в общей постановке возникает более сложный по структуре и по построению подграф-шлейф, позволяющий провести индуктивный развал начальной игры.

В настоящей работе мы доказываем существование оптимальных стационарных стратегий и даем полиномиальный алгоритм их поиска в случае полного симметрического графа игры.

1. Теорема существования равновесия. Пусть S_1, S_2 – множества всех стратегий первого и второго игроков в заданной игре. Пусть $T(s_1, s_2, v_0)$ – маршрут из начальной вершины v_0 , который соответствует стратегиям $s_1 \in S_1$ и $s_2 \in S_2$ игроков, и $c(s_1, s_2, v_0)$ – значение платежного функционала на этом маршруте. В дальнейшем нам потребуются определения стационарной стратегии и эргодического разбиения, которые можно найти в [9].

ТЕОРЕМА. Для каждой игры на графе $(B, A; E)$ с целочисленной стоимостной функцией $c: E \rightarrow \mathbb{Z}$ существуют стационарные стратегии β и α первого и второго игроков такие, что для любой начальной вершины v_0 выполнено следующее седловое условие:

$$\sup_{s_2 \in S_2} c(\beta, s_2, v_0) = \inf_{s_1 \in S_1} c(s_1, \alpha, v_0) := c(v_0).$$

Величину $c(v_0)$ называют *ценой игры в позиции v_0* . Инфимум (супремум) берется по всем, необязательно стационарным, стратегиям игроков.

Далее подграф, порожденный подмножеством вершин $W \subseteq V$, будем обозначать через $G(W)$.

В [5] показано, что задача “существует ли нетривиальное эргодическое разбиение в заданном графе?” является NP-полной проблемой.

Из определения эргодического разбиения следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть V_1 и V_2 – эргодическое разбиение V в графе $G(V)$ и V_3, V_4 – эргодическое разбиение V_2 в подграфе $G(V_2)$. Тогда разбиение $V_1 \cup V_3, V_4$ – эргодическое разбиение V в графе $G(V)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Граф $(B, A; E(B, A) \cup E(A, B))$ с целочисленной стоимостной функцией $c: E \rightarrow \mathbb{Z}$ называется *равновесным с ценой J* , если существуют две стационарные стратегии β и α первого и второго игроков такие, что справедливы следующие условия:

- 1) цена всех простых циклов графа $(B, A; \beta \cup E(A, B))$ не больше J ;
- 2) цена всех простых циклов графа $(B, A; E(B, A) \cup \alpha)$ не меньше J .

Граф $(B, A; \beta \cup E(A, B))$ кратко будем обозначать как $(V; \beta)$, для второго графа соответствующее обозначение – $(V; \alpha)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Цена простого цикла $C := v_0 \cdots v_k v_0$ определяется как сумма максимального и минимального платежа ребер цикла: $\max_{e \in E} c(e) + \min_{e \in E} c(e)$, где E – множество ребер цикла.

Легко видеть, что цена игры для любой начальной вершины v_0 равновесного графа есть J и β, α – две оптимальные стационарные стратегии первого и второго игроков из теоремы.

Сформулированная выше теорема непосредственно следует из лемм 1 и 2.

ЛЕММА 1. Пусть $(B, A; E)$ – граф игры с целочисленной стоимостной функцией $c: E \rightarrow \mathbb{Z}$ и J – произвольное целое число. Тогда существуют

(1) эргодическое разбиение V_1, V_2 (возможно $V_1 = \emptyset$ или $V_2 = \emptyset$) и две стационарные стратегии β_1, α_2 для $G(V_1)$ и $G(V_2)$ соответственно такие, что справедливо следующее:

- (2) цена всех простых циклов графа $(V_1; \beta_1)$ не больше $J - 1$;
- (3) цена всех простых циклов графа $(V_2; \alpha_2)$ не меньше J .

Обозначим $A_1 := V_1 \cap A, B_1 := V_1 \cap B$. Аналогично определим A_2 и B_2 . Первый игрок гарантирует, что его потери составят не более $J - 1$, если он применит стационарную стратегию β_1 в графе $G(V_1)$. Точно так же второй игрок обеспечит себе выигрыш не менее J , если применит стационарную стратегию α_2 в графе $G(V_2)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Шлейфом первого игрока, порожденным множеством $V_1 \subseteq V$ в графе $(V; E)$, называется множество вершин P , полученное следующим процессом пометок (см. рис. 1, где черные (белые) вершины – позиции первого (второго) игрока).

Рис. 1

Вначале помечаем множество $X_0 = V_1$. Предположим, что уже помечены множества $X_0, \dots, X_j$ – попарно не пересекающиеся непустые подмножества V . Берем $P_j := X_0 \cup \dots \cup X_j$. Определяем

$$X_{j+1} := \{v_A, v_B \in V - P_j : V(v_A) \subseteq P_j, V(v_B) \cap P_j \neq \emptyset\}.$$

Определим стационарное ребро (v_B, w) для каждой $v_B \in X_{j+1}, j \geq 0$, как одно ребро (v_B, w) , для которого $w \in P_j$. Множество стационарных ребер обозначим β . Если $X_{j+1} = \emptyset$, процесс нанесения пометок завершается и P_j – результирующее множество P .

Пусть $P' := P - V_1$.

Конечное множество стационарных ребер β назовем *стационарной стратегией*, порожденной множеством V_1 .

Для второго игрока вводятся аналогичные понятия шлейфа и стационарной стратегии, порожденных множеством V_1 (см. рис. 2, множество V_1 обозначено как I).

А именно, помечаем множество $X_0 := I$. Предположим, что мы уже пометили непесекающиеся непустые множества вершин $X_0, \dots, X_j$. Обозначаем $L_j := X_0 \cup \dots \cup X_j$.

Рис. 2

Определяем X_{j+1} как еще непомянутые вершины v первого игрока, для которых $V(v) \subseteq L_j$, и вершины второго игрока, для которых $V(v) \cap L_j \neq \emptyset$, т.е.

$$X_{j+1} := \{v_B, v_A \in V - L_j : V(v_B) \subseteq L_j, V(v_A) \cap L_j \neq \emptyset\}.$$

Для каждой вершины $v_A \in X_{j+1}$ определим стационарное ребро (v_A, w) как одно ребро, для которого $w \in L_j$. Множество стационарных ребер обозначаем α . Если $X_{j+1} = \emptyset$, процесс пометок заканчивается и $L := L_j$ – результирующее множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Лемма 1 будет доказана индукцией по числу n ребер E в графе игры $G(V; E)$.

Для $n = 2$ утверждение очевидно. Пусть утверждение доказано для каждого натурального m , $2 \leq m \leq n$. Пусть число ребер в графе $G(V; E)$ равно $n + 1$, J целое.

В доказательстве леммы 1 дважды используется следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть лемма 1 справедлива для всех графов с не более чем n ребрами и пусть в графе с $n + 1$ ребрами найдется разбиение V_1, V_2 , $V_1 \neq \emptyset$, вершин V на непересекающиеся множества $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ такое, что выполнены следующие условия:

для V_1 справедливы условия эргодичности: граф $G(V_1)$ нетупиковый и $E(V_1, V_2) = \emptyset$;

существует стационарная стратегия β_1 в графе $G(V_1)$ такая, что цена всех простых циклов $(V_1; \beta_1)$ не больше $J - 1$.

Тогда лемма 1 справедлива для данного графа с $n + 1$ ребрами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим разбиение V_1, V_2 . Условия эргодического разбиения для вершин V_1 справедливы, но условия эргодичности для вершин V_2 , возможно, не имеют места. Подправим множество V_2 , чтобы получить эргодическое разбиение.

Рассмотрим шлейф первого игрока P и стационарную стратегию β , которые порождены множеством V_1 (см. рис. 1).

Тогда из условий утверждения 2 и процесса пометок (см. рис. 1) следует

- (4) разбиение $P, V - P$ эргодическое;
- (5) цена всех циклов графа $(P; \beta_1 \cup \beta)$ не больше $J - 1$.

Обозначим $W := V - P$.

В силу условия $V_1 \neq \emptyset$ для графа $G(W)$ существуют эргодическое разбиение $V_1 := W_1$, $V_2 := W_2$, $W_1 \cup W_2 = W$, и две стационарные стратегии β'_1 и α'_2 в W_1 и W_2 соответственно такие, что справедливы условия 1)–3) леммы 1.

Тогда для всего графа верно:

- 1) цена всех циклов графа $(P \cup W_1; \beta_1 \cup \beta \cup \beta'_1)$ не больше $J - 1$ согласно условиям (4), (5), (2);
- 2) цена всех циклов графа $(W_2; \alpha'_2)$ не меньше J по условию (3);
- 3) разбиение $P \cup W_1, W_2$ эргодическое по утверждению 1.

То есть разбиение $P \cup W_1, W_2$ и пара стационарных стратегий $\beta_1 \cup \beta \cup \beta'_1$ и α'_2 требуемые для графа с $n + 1$ ребрами. Утверждение 2 доказано.

Для функции c определим значения $M := \max_{e \in E} c(e)$, $m := \min_{e \in E} c(e)$ и множество вершин $I := \{v : \text{существует } (v, w) \in E(v), c(v, w) = M\}$. Возможны две ситуации:

- i) $M + m \geq J$;
 - ii) $M + m \leq J - 1$.
- i) Пусть $M + m \geq J$. Здесь возможны два случая:
- ii) существует вершина $v' \in I \cap B$ такая, что $|E(v')| > 1$;
 - iii) для каждой вершины $v' \in I$ выполнено свойство $v' \in A$ или $v' \in B$, $|E(v')| = 1$.

В случае ii) рассмотрим граф $G'(V, E')$, где $E' := E - (v', w')$, $c(v', w') = M$. Согласно ii) граф G' беступиковый, и по индуктивному предположению существуют эргодическое разбиение V_1, V_2 и две стационарные стратегии β_1, α_2 такие, что цена всех циклов графа $(V_1; \beta_1)$ не больше $J - 1$, а цена всех циклов графа $(V_2; E'', \alpha_2)$ не меньше J . (Здесь $E'' := E(B_2, A_2) - (v', w)$.)

Если $V_1 = \emptyset$, то цена всех простых циклов графа $(V_2; \alpha_2)$ не меньше J по предположениям i). Тогда эргодическое разбиение $V_1 = \emptyset, V_2$ и стационарная стратегия α_2 требуемые.

Пусть теперь $V_1 \neq \emptyset$. Тогда разбиение V_1, V_2 и стратегия β_1 удовлетворяют условиям утверждения 2, поэтому индуктивная посылка верна для начального графа. Это завершает рассмотрение случая ii).

В случае iii) рассмотрим шлейф L и стационарную стратегию α второго игрока, которые порождены множеством вершин I (см. рис. 2). Стационарную стратегию α доопределим в вершинах I по правилу: для каждой вершины $v_A \in X_0$ стационарное ребро есть (v_A, w) : $c(v_A, w) = M$.

Доопределенную стратегию обозначим α' .

Из процесса пометок легко видеть, что

- (6) цена всех циклов $(L; \alpha'_L)$ не меньше J (здесь $\alpha'_L := \alpha' \cap E(L, L)$);
- (7) $c(e) = M$ для всех ребер из множеств $E(L_B, V - L)$ и $\alpha' \cap E(L_A, V - L)$;
- (8) множество ребер $E(V_A - L, L)$ пусто.

Если $V = L$, то эргодическое разбиение $V_1 = \emptyset, V_2 = L$ и α' требуемые по свойству 6). Пусть $V - L \neq \emptyset$. Граф $G(V - L)$ не имеет тупиковых вершин, поэтому в графе $G(V - L)$ по индукции существуют

- (9) эргодическое разбиение V_1, V_2 такое, что $V_1 \cup V_2 = V - L$,

и две стационарные стратегии β_1, α_2 такие, что справедливо:

- (10) цена всех простых циклов $(V_1; \beta_1)$ не больше $J - 1$;
- (11) цена всех простых циклов $(V_2; \alpha_2)$ не меньше J .

Если $V_1 = \emptyset$, то эргодическое разбиение $V_1 = \emptyset, V_2 \cup L$ и стационарная стратегия $\alpha_2 \cup \alpha'$ искомые; так как цена любого цикла $v_0, \dots, v_k, v_0$, где $v_0, \dots, v_k \in V_2$, не

меньше J по свойству (11), цена любого цикла $v_0, \dots, v_k, v_0$, где $v_0, \dots, v_k \in L$, не меньше J ввиду предположения (6) и цена каждого другого цикла $v_0, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_0$, где $v_i \in L, v_{i+1} \in V_2$, не меньше J в силу (7), i).

Поэтому остается случай $V_1 \neq \emptyset$. Рассмотрим разбиение $V_1, V_2 \cup L$. Условия эргодического разбиения для вершин V_1 справедливы в силу (9), (8) и для графа $(V_1; \beta_1)$ все циклы не больше $J - 1$, поэтому применимо утверждение 2, что заканчивает рассмотрение случая i).

j) Случай $M + m \leq J - 1$ легко сводится к случаю $M + m \geq J$. А именно, преобразуем функцию c по правилу $c'(v, w) = -c(v, w)$, $J' = -J + 1$ и считаем, что первый игрок максимизирует стоимость, в то время как второй минимизирует эту величину. Тогда для построенной игровой сети имеем случай $J' \leq M' + m'$. По выше приведенному доказательству существуют эргодическое разбиение V_1, V_2 и две стационарные стратегии β_1, α_2 первого и второго игроков в графах $G(v_1)$ и $G(v_2)$ соответственно такие, что справедливы следующие утверждения:

- 1) цена всех циклов графа $(V_1; \beta_1)$ не меньше J' ;
- 2) цена всех циклов графа $(V_2; \alpha_2)$ не больше $J' - 1$.

Тогда эргодическое разбиение V_1, V_2 и две стационарные стратегии β_1, α_2 для первого и второго игроков в $G(V_1)$ и $G(V_2)$ соответственно требуемые для $c(v, w)$ и J . Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Для каждого графа $(V; E)$ с целочисленной стоимостной функцией $c: E \rightarrow \mathbb{Z}$ существуют эргодическое разбиение $V_1 \dots V_k$ и возрастающая последовательность целых чисел $J_1 < \dots < J_k$ такие, что граф $G(V_i)$ равновесный с ценой J_i , $i = 1, \dots, k$.

Легко видеть, что цена игры для любой вершины i -го графа $v \in V_i$ есть J_i , $i = 1, \dots, k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $J = 2m$ эргодическое разбиение из леммы 1 есть $V_1 = \emptyset$, $V_2 = V$ и α_2 – любая стационарная стратегия второго игрока. Для $J = 2M + 1$ эргодическое разбиение из леммы 1 есть $V_1 = V$, $V_2 = \emptyset$ и β_1 – любая стационарная стратегия первого игрока.

Рассмотрим значение $J := J_1$ наименьшее возможное, для которого разбиение из леммы 1 имеет вид V_1, V'_2 , где $V_1 \neq \emptyset$, и существуют стратегии β_1, α'_2 , для которых (1)–(3) справедливо.

Тогда для $J_1 - 1$ разбиение из леммы 1 есть $V_1 = \emptyset$, $V_2 = V$ и существует стационарная стратегия α второго игрока такая, что цена всех простых циклов графа $(V; \alpha)$ не меньше $J_1 - 1$. Пусть $\alpha_1 := \alpha \cap E(V_1, V_1)$ (из-за того, что V_1, V'_2 – эргодическое разбиение, α_1 есть стационарная стратегия второго игрока в $G(V_1)$). Поэтому имеем

- (12) V_1, V'_2 – эргодическое разбиение, причем $V_1 \neq \emptyset$;
- (13) цена всех циклов графа $(V'_2; \alpha'_2)$ не меньше J_1 ;
- (14) цена всех циклов графа $(V_1; \beta_1)$ не больше $J_1 - 1$;
- (15) цена всех циклов графа $(V_1; \alpha_1)$ не меньше $J_1 - 1$.

Тогда граф $G(V_1)$ равновесный с ценой $J_1 - 1$ в силу (14), (15). Для графа $G(V'_2)$ наименьшее возможное $J := J_2$, для которого эргодическое разбиение V_2, V'_3 , $V_2 \neq \emptyset$, есть $J_2 > J_1$ в силу (13). Индукцией по числу вершин в графе $(V; E)$ из приведенных выше рассуждений следует, что имеется последовательность целых чисел $J_1 - 1 < J_2 - 1 < \dots <$

$J_k - 1$, эргодическое разбиение $V_1, V_2, \dots, V_k$ вершин V и множество стационарных стратегий $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ первого и второго игроков в графах $G(V_1), \dots, G(V_k)$ соответственно такие, что цена всех простых циклов графа $(V_i; \beta_i)$ не больше $J_i - 1$ и цена всех простых циклов графа $(V_i; \alpha_i)$ не меньше $J_i - 1, i = 1, \dots, k$. Тогда граф $G(V_i)$ равновесный с ценой $J_i - 1$ и $\beta_1 \cup \dots \cup \beta_k, \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_k$ – оптимальные стационарные стратегии первого и второго игроков в игре $(V; E)$. Лемма 2 доказана.

Теорема следует из леммы 2 непосредственно (см. [9]). Это завершает доказательство теоремы.

2. Сложность вычисления оптимальных стратегий. Из теоремы следует, что задача “верно или нет, что цена игры в данной начальной вершине v не превосходит данного числа p ?” относится к классу $NP \cap co-NP$.

Однако, из доказательства теоремы можно построить лишь экспоненциальный алгоритм, а полиномиальный алгоритм решения данной задачи автору не известен. Сейчас будет представлен полиномиальный алгоритм для так называемых эргодических расширений матричных игр.

Пусть дан полный граф $(A, B; E)$ такой, что для каждого $v \in A, w \in B: (v, w) \in E, (w, v) \in E$. Стоимостная функция симметрична $c(v, w) = c(w, v)$.

ЛЕММА 3. *Любой полный граф игры $(A, B; E)$ с произвольной целочисленной симметрической стоимостной функцией с равновесен, т.е. существуют целое число J и две стационарные стратегии β, α первого и второго игроков такие, что выполнены следующие соотношения:*

- 1) *цена всех простых циклов графа $(V; \beta)$ не больше J ;*
- 2) *цена всех простых циклов графа $(V; \alpha)$ не меньше J .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма 3 является непосредственным следствием леммы 2, так как в случае полного двудольного графа любое эргодическое разбиение может состоять только из одного блока.

Мы повторим доказательство с небольшими изменениями, чтобы получить полиномиальный алгоритм для рассматриваемого случая. Сначала будет доказана

ЛЕММА 4. *Для полного графа $(A, B; E)$ с симметрической целочисленной стоимостной функцией c и для каждого целого J имеет место один из следующих двух случаев:*

- 1) *существует стационарная стратегия α второго игрока такая, что цена всех простых циклов графа $(V; \alpha)$ не меньше J ;*
- 2) *существует стационарная стратегия β первого игрока такая, что цена всех простых циклов графа $(V; \beta)$ не больше $J - 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма 4 будет доказана индукцией по числу n вершин $|V|$ в графе игры $(V; E)$. Для случая $|A| = 1$ или $|B| = 1$ утверждение очевидно.

Пусть утверждение доказано для $n \geq 2$. Пусть число вершин $|V| = n + 1$ и $|A| \geq 2, |B| \geq 2, J$ – произвольное целое число. Для функции c определим следующие величины: $M := \max_{e \in E} c(e), m := \min_{e \in E} c(e)$. Рассмотрим две возможности:

- i) $M + m \geq J$;
- j) $M + m < J$.

i) Рассмотрим вершину $v \in A$ такую, что $c(v, w) = M$, $(v, w) \in E(v)$ (такая вершина существует в силу симметричности функции). Рассмотрим граф $G' := G(V - v)$. Для этого графа по предположению индукции имеют место случаи:

- 1') существует стационарная стратегия α' такая, что цена всех простых циклов графа $(V - v; \alpha')$ не меньше J ;
- 2') существует стационарная стратегия β' такая, что цена всех простых циклов графа $(V - v; \beta')$ не больше $J - 1$.

Если выполнено 1'), то тогда для начального графа имеем случай 1) для стационарной стратегии $\alpha' \cup (v, w)$ второго игрока, так как цена всех простых циклов графа $(V; \alpha' \cup (v, w))$ не меньше J в силу предположений 1'), i).

Если выполнено 2'), то для начального графа имеем случай 2), так как цена всех простых циклов графа $(V; \beta')$ не больше $J - 1$ по предположению 2').

Случай j) рассматривается аналогично. Лемма 4 доказана.

Из выше приведенного доказательства следует алгоритм нахождения стратегий α и β со сложностью $f(n) \leq f(n-1) + an^2$, т.е. $f(n) = O(n^3)$ (a – некоторая константа).

Чтобы доказать лемму 3, рассмотрим наименьшее возможное значение J такое, что имеет место случай 2) леммы 4. Тогда для $J - 1$ мы имеем случай 1) леммы 4. Таким образом, $J - 1$ и две стационарные стратегии β и α искомые в лемме 3. Цену игры J естественно определять дихотомией. Поэтому общее число элементарных операций алгоритма оценивается как $O(n^3 \log_2(M - m + 2))$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Shapley L. S. Stochastic games // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1953. V. 39. P. 1095–1100.
- [2] Gillette D. Stochastic games with zero stop probabilities // Ann. Math. Stud. 1957. V. 39. P. 178–187.
- [3] Кифер Ю. И. Оптимальное поведение в играх с неограниченной последовательностью ходов // Теория вероятн. и ее примен. 1969. Т. 14. № 2. С. 284–291.
- [4] Federgruen A., Schweitzer P. Contraction mappings underlying undiscounted Markov decision problems // J. Math. Anal. Appl. 1978. V. 65. P. 711–730.
- [5] Ehrenfeucht A., Mycielski J. Positional strategies for mean payoff games // Intern. J. Game Theory. 1979. V. 8. № 2. P. 109–113.
- [6] Гурвич В. А., Карзанов А. В., Хачиян Л. Г. Циклические игры и нахождение минимаксных средних циклов в ориентированных графах // ЖВМиМФ. 1988. Т. 28. № 9. С. 1407–1417.
- [7] Лебедев В. Н. Алгоритмы оптимизации стационарных управлений в дискретных динамических системах. Дисс. ... к. ф.-м. н. М.: МФТИ, 1990.
- [8] Karzanov A. V., Lebedev V. N. Cyclical games with prohibitions // Math. Programming. 1993. V. 60. P. 277–293.
- [9] Лебедев В. Н. О новом равновесии в циклических играх // Дискретная матем. 1997. Т. 9. № 4. С. 96–99.

Волгоградский государственный университет
E-mail: lebedev@math.vgu.tsaritsyn.su

Поступило
20.05.1998
Исправленный вариант
25.10.1999