Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Добрынина, К теореме Федорчука о нормальном функторе, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 4, 630–633

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9092>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 10:53:51

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

К теореме Федорчука о нормальном функторе

М. А. Добрынина

Известная теорема Катетова [1] утверждает, что из наследственной нормальности куба компакта следует его метризуемость. В 1989 г. Федорчук [2] обобщил теорему Катетова для нормального функтора степени ≥ 3 , действующего в категории Comp компактов и их непрерывных отображений:

ТЕОРЕМА 1. *Если для какого-нибудь нормального функтора $\mathcal{F}$ степени ≥ 3 компакт $\mathcal{F}(X)$ наследственно нормален, то X – метризуемый компакт.*

Основным результатом данной заметки является обобщение понятия нормального функтора на категорию $\mathcal{P}$ паракомпактных p -пространств и их совершенных отображений, а также следующая теорема 2, обобщающая теорему 1.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть X – паракомпактное p -пространство, $\mathcal{F}$ – нормальный функтор степени ≥ 3 в категории $\mathcal{P}$. Тогда если пространство $\mathcal{F}(X)$ наследственно нормально, то X – метризуемое пространство.*

Хорошо известно, что паракомпактные p -пространства – это в точности полные прообразы метрических пространств при совершенных отображениях [3]. Всякий компакт является паракомпактным p -пространством, поэтому следующее предложение 1 является усилением теоремы Катетова. Доказательство предложения 1 использует лемму Катетова (см. [1]), а также утверждение о том, что паракомпакт с диагональю типа G_δ метризуем в том и только том случае, если X допускает совершенное отображение на метризуемое пространство (см. [4; 5.5]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть X – паракомпактное p -пространство такое, что X^3 наследственно нормально. Тогда пространство X метризуемо.*

Далее будем рассматривать функторы, действующие в категории $\mathcal{P}$. Легко проверяется, что данное множество $\mathcal{P}$ объектов и морфизмов действительно является категорией.

Для произвольного хаусдорфова топологического пространства определено пространство $\text{exp}_c X$ – пространство компактных подмножеств X с топологией, открытую базу которой образуют множества вида

$$O(U_1, \dots, U_n) = \left\{ F : F \in \text{exp}_c X, F \subset \bigcup_{i=1}^n U_i, F \cap U_i \neq \emptyset \text{ для } i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

(см., например, [5; 4.6]). Далее, для любого натурального числа k обозначим через $\text{exp}_k X$ подпространство $\text{exp}_c X$, состоящее из всех компактов, содержащих не более k точек. Для любого совершенного отображения $f: X \rightarrow Y$ паракомпактного p -пространства X на паракомпактное p -пространство Y по аналогии с [5] определим отображение $\text{exp}_c f: \text{exp}_c X \rightarrow \text{exp}_c Y$ следующим образом: положим $(\text{exp}_c f)(F) = f(F)$. Справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть f – совершенное отображение паракомпактного p -пространства X на метрическое пространство Y . Тогда отображение $\text{exr}_c f$ пространства $\text{exr}_c X$ на $\text{exr}_c Y$ также совершенно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непрерывность отображения $\text{exr}_c f$ следует из равенства

$$(\text{exr}_c f)^{-1}(O(U_1, \dots, U_n)) = O(f^{-1}(U_1), \dots, f^{-1}(U_n)),$$

эпиморфность – из совершенности f . Пространство $\text{exr}_c Y$ так же, как и Y , метризуемо (см. [5; 4.7]), поэтому для совершенности $\text{exr}_c f$ достаточно проверить, что для любого компактного подмножества $Z \subset \text{exr}_c Y$ его прообраз также компактен (см. [4; 5.5]). Легко проверяется, что для компактного множества $Z \subset \text{exr}_c Y$ множество $Z^0 = \bigcup Z$ является компактным подмножеством Y . Отсюда следует, что компактен полный прообраз $f^{-1}(Z^0)$ и, следовательно, $\text{exr}_c(f^{-1}(Z^0))$. Заметим, что множество $(\text{exr}_c f)^{-1}(Z)$ замкнуто в $\text{exr}_c(f^{-1}(Z^0))$ и, значит, компактно. Предложение 2 доказано.

Из предложения 2 далее следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть X – паракомпактное p -пространство. Тогда $\text{exr}_c X$ – также паракомпактное p -пространство.

Так как паракомпактное p -пространство также является k -пространством (см. [3; § 2]; [4; 3.3]), аналогично предложению 2 получим следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть f – совершенное отображение паракомпактного p -пространства X на паракомпактное r -пространство Y . Тогда отображение $\text{exr}_c f$ пространства $\text{exr}_c X$ на $\text{exr}_c Y$ также совершенно.

Таким образом, операция $\text{exr}_c(\cdot)$ является ковариантным функтором, действующим в категории $\mathcal{P}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть X паракомпактное p -пространство, для которого пространство $\text{exr}_2 X$ совершенно нормально. Тогда пространство X метризуемо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству леммы 2 из [2] рассмотрим “забывающий порядок” отображение $\pi: X^2 \rightarrow \text{exr}_2 X$ такое, что $\pi(x_1, x_2) = \{x_1, x_2\}$. Непрерывность отображения π следует из равенства

$$\pi^{-1}O(U_1, U_2) = (U_1 \times U_2) \cup (U_2 \times U_1).$$

Множество $\text{exr}_1 X$ замкнуто в $\text{exr}_2 X$ и, значит, имеет тип G_δ . Тогда

$$\pi^{-1}(\text{exr}_1 X) = \{(x, x) : x \in X\} = \Delta$$

также является множеством типа G_δ . Поэтому паракомпактное p -пространство X метризуемо (см. [4; 5.5]). Предложение 5 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть X – паракомпактное p -пространство с единственной неизолированной точкой x_0 . Тогда если $\chi(x_0, X) \leq \omega_0$, то X метризуемо, если же $\chi(x_0, X) \geq \omega_1$, то $\text{exr}_3 X$ не наследственно нормально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Метризуемость пространства X в случае $\chi(x_0, X) = \omega_0$ нетрудно проверить, например, применив метризационную теорему Бинга (см. [4; 4.4]). В случае же, если $\chi(x_0, X) \geq \omega_1$, воспользуемся тем, что паракомпактное p -пространство является пространством точечно-счетного типа (см. [3; § 2]), поэтому точка x_0 должна содержаться в компакте K таком, что $\chi(K, X) \leq \omega_0$. Значит, $\chi(x_0, K) \geq \omega_1$ и K не метризуемо. Согласно теореме 1 пространство $\text{exr}_3 K$ не наследственно нормально. Тогда и $\text{exr}_3 X$ не наследственно нормально. Предложение 6 доказано.

Проверка следующего результата аналогична доказательству теоремы 1 из [2] с использованием предложений 5 и 6.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть X – паракомпактное p -пространство, $\text{exr}_3 X$ наследственно нормально. Тогда X метризуемо.

Ковариантный функтор $\mathcal{F}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ в категории $\mathcal{P}$ назовем *мономорфным*, если $\mathcal{F}$ сохраняет вложения. Если $\mathcal{F}$ – мономорфный функтор, то для любой точки $a \in \mathcal{F}(X)$ определяется, как известно, носитель $\text{supp}(a)$ следующим образом:

$$\text{supp}(a) = \bigcap \{Y : Y \text{ – замкнутое подмножество } X, a \in \mathcal{F}(Y)\},$$

и, следовательно, определено многозначное отображение $\text{supp}: \mathcal{F}(X) \rightarrow X$. Далее, для любого натурального числа n положим $\mathcal{F}_n(X) = \{a \in \mathcal{F}(X) : |\text{supp}(a)| \leq n\}$. Будем говорить, что степень функтора $\deg \mathcal{F}$ не превосходит числа n , если для любого X и любой точки $a \in \mathcal{F}(X)$ верно $|\text{supp}(a)| \leq n$. Будем говорить, что $\deg \mathcal{F} = n$, если $\deg \mathcal{F} \leq n$, но $\deg \mathcal{F} \leq n - 1$ неверно. В последующих формулах через n обозначается не только натуральное число, но и дискретное пространство, состоящее из n точек: $n = \{0, 1, \dots, n - 1\}$. Отображение $\pi_n: X^n \times \mathcal{F}(n) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ определяется равенством $\pi_n(\xi, a) = \mathcal{F}(\xi)(a)$, в котором каждая точка $\xi \in X^n$ отождествляется с отображением $\xi: n \rightarrow X$.

Ковариантный функтор $\mathcal{F}$ в категории $\mathcal{P}$ будем называть *нормальным*, если функтор $\mathcal{F}$ непрерывен, мономорфен и эпиморфен, сохраняет вес, пересечения, прообразы, точку и пустое множество (см. [5; 7.5]), а также удовлетворяет условию: для любого паракомпактного p -пространства X и любого натурального n отображение $\pi_n: X^n \times \mathcal{F}(n) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ непрерывно. Все вышеупомянутые свойства функторов определяются аналогично соответствующим свойствам нормальных функторов в категории Comp с той лишь разницей, что вместо компактных пространств и их непрерывных отображений рассматриваются паракомпактные p -пространства и их совершенные отображения. Очевидно, ограничение нормального функтора в категории $\mathcal{P}$ на категорию Comp является нормальным функтором в категории Comp в смысле стандартного определения (см. [5; 7.5]). Заметим, что функтор $\text{exr}_c(\cdot)$ является нормальным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть X – паракомпактное p -пространство, $\mathcal{F}$ – нормальный функтор в категории $\mathcal{P}$. Тогда отображение $\text{supp}: \mathcal{F}(X) \rightarrow X$ полунепрерывно снизу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, что отображение $\text{supp}: \mathcal{F}(X) \rightarrow X$ полунепрерывно снизу тогда и только тогда, когда для любого замкнутого подмножества $A \subset X$ верно, что $\mathcal{F}(A)$ замкнуто в $\mathcal{F}(X)$. С другой стороны, в таком случае вложение $i: A \rightarrow X$ совершенно. Тогда $\mathcal{F}(i): \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ также совершенное вложение. Значит, $\mathcal{F}(A)$ замкнуто в $\mathcal{F}(X)$ и отображение supp полунепрерывно снизу. Предложение 8 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $\mathcal{F}$ – нормальный функтор, то подпространство $\mathcal{F}_n(X)$ замкнуто в $\mathcal{F}(X)$ для любого X и любого n .

СЛЕДСТВИЕ 2. Соответствие $X \rightarrow \mathcal{F}_n(X)$ однозначно определяет подфунктор $\mathcal{F}_n$ нормального функтора $\mathcal{F}$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для нормального функтора $\mathcal{F}$ верно, что $\mathcal{F}_1(X)$ гомеоморфно X .

Функтор $\mathcal{F}$ сохраняет носители, если для любого отображения $f: X \rightarrow Y$ и всякого $a \in \mathcal{F}(X)$ верно $f(\text{supp}(a)) = \text{supp}(\mathcal{F}(f)(a))$. Справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Мономорфный, сохраняющий пересечения функтор сохраняет носители тогда и только тогда, когда он сохраняет прообразы.

Пусть $\mathcal{F}$ – нормальный функтор степени $\geq n$. Тогда в пространстве $\mathcal{F}(n)$ найдется элемент $a \in \mathcal{F}(n)$ такой, что $|\text{supp}(a)| = n$. Определим отображение $p_n: X^n \times \{a\} \rightarrow \text{exr}_n(X)$

следующим образом: $p_n(\xi, a) = \xi(n)$. Заметим, что отображение p_n эпиморфно и совершенно, а π_n отображает $X^n \times \mathcal{F}(n)$ на $\mathcal{F}_n(X)$. Далее, положим $\mathcal{F}_a(X) = \pi_n(X^n \times \{a\}) \subset \mathcal{F}(X)$ и будем рассматривать отображение supp как однозначное, действующее из $\mathcal{F}_a(X)$ в $\text{exr}_n(X)$.

ЛЕММА 1. *Отображение $\text{supp}: \mathcal{F}_a(X) \rightarrow \text{exr}_n(X)$ совершенно и является эпиморфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы будет следовать из равенства $p_n = \text{supp} \circ \pi_n$. Проверим его. Носитель $\text{supp}(a) = n$ и, кроме того, $\text{supp}(\pi_n(\xi, a)) = \text{supp } \mathcal{F}(\xi)(a)$. Далее, так как нормальный функтор сохраняет носители, $\text{supp } \mathcal{F}(\xi)(a) = \xi(\text{supp}(a)) = \xi(n)$ и, по определению отображения p_n , $\xi(n) = p_n(\xi, a)$. То есть, $\text{supp}(\pi_n(\xi, a)) = p_n(\xi, a)$. Лемма 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Так как $\mathcal{F}$ – нормальный функтор степени ≥ 3 , найдется элемент $a \in \mathcal{F}(3)$ степени 3. Далее, из леммы 1 следует, что $\text{exr}_3(X)$ – совершенный образ наследственно нормального пространства $\mathcal{F}_a(X) \subset \mathcal{F}(X)$. Тогда $\text{exr}_3(X)$ также наследственно нормально. Значит, по предложению 7 X метризуемо. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. Katětov, *Fund. Math.*, **35** (1948), 271–274. [2] В.В. Федорчук, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1989, № 4, 93–96. [3] А.В. Архангельский, *Матем. сб.*, **67:1** (1965), 55–88. [4] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Наука, М., 1986. [5] В.В. Федорчук, В.В. Филиппов, *Общая топология. Основные конструкции*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1988. [6] В.Н. Басманов, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1984, № 6, 40–42.

М. А. Добрынина

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: mary_dobr@mail.ru

Поступило

23.03.2011