Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. С. Коломойцев, О представлении функций в виде интеграла Фурье, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 4, 555–565

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9093>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 14:05:25

О представлении функций в виде интеграла Фурье

Ю. С. Коломойцев

Получены достаточные условия представления функций в виде интеграла Фурье в $\mathbb{R}^d$ от функции, принадлежащей пространству $L_1 \cap L_p$ при $0 < p < 2$. Показана точность полученных условий.

Библиография: 15 названий.

DOI: 10.4213/mzm9093

1. Введение. Пусть $\mathbb{R}^d$ – d -мерное евклидово пространство элементов $x = (x_1, \dots, x_d)$ со скалярным произведением $(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$ и нормой $|x| = (x, x)^{1/2}$. Как обычно, пространство $L_p(\mathbb{R}^d)$ состоит из измеримых функций $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, для которых при $0 < p < \infty$

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty,$$

а при $p = \infty$

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)| < \infty.$$

Через $C_0(\mathbb{R}^d)$ обозначим класс непрерывных функций f таких, что

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Если

$$f(y) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) e^{i(x,y)} dx, \quad g \in L_1(\mathbb{R}^d), \quad (1)$$

то пишут $f \in A(\mathbb{R}^d)$. Задача о представлении функции в виде абсолютно сходящегося интеграла Фурье имеет важное значение в разных вопросах анализа. Данная задача изучалась многими математиками (см., например, работы [1], [2; § 2] и монографию [3; гл. 6], в которых содержится ряд достаточных и необходимых условий принадлежности функции f пространству $A(\mathbb{R}^d)$).

В недавних работах Лифлянда и Тригуба (см. [2]–[5]) были получены новые достаточные условия представления функции в виде абсолютно сходящегося интеграла Фурье в $\mathbb{R}^d$, а также показана применимость и точность полученных условий. Приведем здесь один из одномерных результатов статьи [4] (см. также [5]).

ТЕОРЕМА А. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ локально абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}$ и существует число c такое, что для всех $t \in \mathbb{R}$ и почти всех t соответственно

$$|f(t)| \leq \frac{c}{(1+|t|)^{\gamma_0}}, \quad \gamma_0 > 0, \quad |f'(t)| \leq \frac{c}{(1+|t|)^{\gamma_1}}, \quad \gamma_1 \in \mathbb{R}.$$

Если $\gamma_0 + \gamma_1 > 1$, то $f \in A(\mathbb{R})$, а при $\gamma_0 + \gamma_1 < 1$ такая функция может не принадлежать $A(\mathbb{R})$.

В настоящей работе изучаются классы функций f , для которых имеет место представление (1) при дополнительном предположении $g \in L_1 \cap L_p(\mathbb{R}^d)$, где $0 < p < 2$. Точнее, мы будем изучать следующий класс функций:

$$A_p(\mathbb{R}^d) = \{f : f = \widehat{g}, g \in L_1 \cap L_p(\mathbb{R}^d)\},$$

где

$$\widehat{g}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) e^{i(x,y)} dx$$

– преобразование Фурье функции g .

Отметим, что некоторые достаточные и необходимые условия принадлежности функций пространству $A_p(\mathbb{R}^d)$ содержатся в монографии [3; гл. 6]. Отметим также, что интегрируемая функция f принадлежит $A_p(\mathbb{R}^d)$ тогда и только тогда, когда $\widehat{f} \in L_1 \cap L_p(\mathbb{R}^d)$. Это свойство преобразования Фурье является основным инструментом, например, в теории мультипликаторов степенных рядов в пространствах Харди $H_p(D^n)$, $0 < p < 1$ (см. [3; гл. 7], [6]), а также при исследовании аппроксимации функций семействами линейных полиномиальных операторов, являющихся заменой средних Фурье в пространствах $L_p(\mathbb{T}^d)$, $0 < p < 1$ (см., например, [7]). В настоящей работе мы обобщим теорему А, а также ее многомерный аналог на классы функций $A_p(\mathbb{R}^d)$ при $0 < p < 2$.

Всюду в статье через C будем обозначать некоторые положительные константы, зависящие от указанных параметров.

2. Основные результаты. Следуя работе [4], введем необходимые обозначения. Символами χ , η и ζ обозначим d -мерные векторы, у которых компоненты либо 0, либо 1. Каждый из них или даже два одновременно могут быть нулевыми: $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$. Такой же смысл у вектора σ , но употреблять его мы будем вне всякой связи с вводимыми ниже мажорантами, зависящими от χ , η и ζ . Запись $\chi \leq \eta$ будет означать, что $\chi_j \leq \eta_j$ при всех $j = 1, \dots, d$.

Через $\Theta = (\chi, \eta, \zeta)$ обозначим тройку указанных векторов, а через $/\Theta/$ их сумму: $/\Theta/ = \chi + \eta + \zeta$. Положим при $/\Theta/ \leq \mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$ и $\nu \in \mathbb{N}$

$$f_{\Theta; \nu}(x) = f_{\chi, \eta, \zeta; \nu}(x) = \sup_{\substack{|u_i| \geq |x_i| \\ i: \chi_i=1}} \operatorname{ess\,sup}_{\substack{0 < |x_j| \leq |u_j| \\ j: \eta_j=1}} \operatorname{ess\,sup}_{\substack{0 < |u_k| \leq |x_k| \\ k: \zeta_k=1}} |D_\nu^{\eta+\zeta} f(u)|,$$

где

$$D_\nu^\sigma f(x) = \left(\prod_{j: \sigma_j=1} \frac{\partial^\nu}{\partial x_j^\nu} \right) f(x).$$

Далее полагаем $/\Theta/ = \mathbf{1}$. Каждому вектору χ , $\mathbf{0} \leq \chi \leq \mathbf{1}$, соответствует некий набор η и ζ , характеризующий изучаемую функцию. Тогда каждую из мажорант,

при фиксированном ν , можно считать зависящей лишь от χ и обозначать $f_{\chi;\nu}$ в том смысле, что при заданном χ берется лишь одна тройка $\Theta := \Theta(\chi)$. С учетом сказанного условия следующей теоремы даны в терминах функций

$$\prod_{0 \leq \chi \leq 1} f_{\chi;\nu}^{\delta_j(\chi;\nu)},$$

где $j = 1, 2, \dots, 2^d$ и при некоторых $\delta_+^{(\nu)}, \delta_-^{(\nu)} \in [-1, 1]$

$$\delta_j(\chi; \nu) = \frac{1}{2^{d-1}} \prod_{i=1}^d (1 + (-1)^{x_i+1} \delta_{\omega_{ji}(\chi_i)}^{(\nu)})$$

где $\omega_{ji}(\chi_i)$ обозначают знак “+” или “−” по следующему правилу: наборы $\{\omega_{ji}(1)\}_{i=1}^d$ различны при различных j , $\omega_{ji}(0)$ отлично от $\omega_{ji}(1)$.

Следующая теорема является главным результатом настоящей статьи. Отметим, что данная теорема в случае $p = 1$ доказана в статье [4] (см. также [2]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < p < 2$, $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ и при некотором натуральном $r > 1/p - 1/2$ функция f имеет локально абсолютно непрерывные по всем переменным на $\mathbb{R}^d$ частные производные $D_{r-1}^\sigma f(x)$, $0 \leq \sigma \leq 1$, а частные производные $D_r^\sigma f(x)$, $\sigma \neq 1$, локально абсолютно непрерывны на $\mathbb{R}^d$ по переменным x_j для j таких, что $\sigma_j = 0$.

(I) Если при некоторых наборах $\Theta(\chi)$ и числах $\delta_+^{(\nu)}, \delta_-^{(\nu)}$, $\nu = 1, r$, удовлетворяющих неравенствам

$$-1 \leq \delta_-^{(1)} < 0 < \delta_+^{(1)} \leq 1, \quad (2)$$

$$-1 \leq \delta_-^{(r)} < \frac{2}{r} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) - 1 < \delta_+^{(r)} \leq 1, \quad (3)$$

имеет место

$$\int_{\mathbb{R}_+^d} \sum_{j=1}^{2^d} \prod_{0 \leq \chi \leq 1} f_{\chi;\nu}^{\delta_j(\chi;\nu)}(x + 2\pi\nu\zeta) dx < \infty, \quad \nu = 1, r,$$

то $f \in A_p(\mathbb{R}^d)$.

(II) Пусть для самой функции выполняется

$$|f(x)| \leq \frac{c}{(1 + |x|)^{\gamma_0}}, \quad \gamma_0 > 0,$$

а при $j = \sigma_1 + \dots + \sigma_d$ для производных выполняется

$$|D_\nu^\sigma f(x)| \leq \frac{c}{(1 + |x|)^{\gamma_j^{(\nu)}}}, \quad \gamma_j^{(\nu)} \in \mathbb{R}, \quad \nu = 1, r.$$

Если

$$\sum_{j=0}^d \binom{d}{j} \gamma_j^{(1)} > d2^{d-1}, \quad \gamma_0^{(1)} = \gamma_0, \quad (4)$$

$$\sum_{j=0}^d \binom{d}{j} \left(r - \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \right)^{d-j} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right)^j \gamma_j^{(r)} > \frac{dr^d}{2}, \quad \gamma_0^{(r)} = \gamma_0, \quad (5)$$

то $f \in A_p(\mathbb{R}^d)$.

Если $\gamma_j^{(\nu)} = \beta - j\nu(\alpha - 1)$, $j = 1, \dots, d$, где $\alpha, \beta > 0$ и $\beta \neq 1/(2d)$ при $\alpha = 1$, а в одном из этих неравенств знак $>$ заменить на $\leq$, то такая функция f может и не принадлежать $A_p(\mathbb{R}^d)$.

Если $\alpha = 1$ и $\beta = 1/(2d)$, то такая функция может не принадлежать $A_p(\mathbb{R}^d)$, если знак $>$ заменить на $<$.

3. Вспомогательные утверждения. Обозначим через $\{e_j^0\}_{j=1}^d$ стандартный базис в $\mathbb{R}^d$, а через

$$\Delta_{u_j}^r f(x) = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k f(x + (2k - r)u_j e_j^0)$$

r -ю симметричную разность по j -й переменной с шагом u_j . Тогда $\Delta_{u_1, \dots, u_d}^r f(x) = (\prod_{j=1}^d \Delta_{u_j}^r) f(x)$ – смешанная разность.

Следующая лемма играет ключевую роль при доказательстве теоремы 1.

ЛЕММА 2. Пусть $0 < p < 2$ и $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$. Если при некотором $r \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{s_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{s_d=-\infty}^{\infty} 2^{(1/2) \sum_{j=1}^d s_j} \|\Delta_{\pi/(2^{s_1}), \dots, \pi/(2^{s_d})}^r(f)\|_2 &< \infty, \\ \sum_{s_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{s_d=-\infty}^{\infty} 2^{(1-p/2) \sum_{j=1}^d s_j} \|\Delta_{\pi/(2^{s_1}), \dots, \pi/(2^{s_d})}^r(f)\|_2^p &< \infty \end{aligned} \quad (6)$$

то $f \in A_p(\mathbb{R}^d)$.

Лемма 2 при $p = 1$ доказана в [8; лемма 4], а также в [9; теорема 3]. Общий случай $p \in (0, 2)$ доказан в [3; теорема 6.4.2].

Чтобы показать точность основного результата статьи, нам понадобится следующая функция:

$$m_{\alpha, \beta}(x) = \theta(x) \frac{e^{i|x|^\alpha}}{|x|^\beta}, \quad (7)$$

где θ является C^∞ -функцией на $\mathbb{R}^d$,

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| \leq 1, \\ 1 & \text{при } |x| \geq 2, \end{cases}$$

а $\alpha, \beta > 0$. Отметим, что функция $m_{\alpha, \beta}$ была предметом специального изучения в работах [10]–[14] и [15; гл. 4, 7.4].

Доказательство утверждений следующей леммы см. в [13; предложение 5.1] (см. также [11] и [14]).

ЛЕММА 3. Пусть $\alpha, \beta > 0$ и $\alpha \neq 1$. Тогда выполнены следующие утверждения:

- 1) функция $m_{\alpha, \beta} \in A(\mathbb{R}^d)$ тогда и только тогда, когда $\beta > d\alpha/2$;
- 2) если $\beta > d\alpha/2$ и $m_{\alpha, \beta} = \hat{K}_{\alpha, \beta}$, то при $\alpha > 1$

$$|K_{\alpha, \beta}(x)| \asymp |x|^{(\beta - d + d\alpha/2)/(1 - \alpha)}, \quad |x| \rightarrow \infty,$$

а при $\alpha < 1$

$$|K_{\alpha,\beta}(x)| \asymp |x|^{(\beta-d+d\alpha/2)/(1-\alpha)} + \gamma(x), \quad |x| \rightarrow 0,$$

где функция $\gamma \in C^1(\mathbb{R}^d)$ и $\gamma(x) \geq 0$.

В частности, если $0 < p < 2$ и $(\alpha - 1)(1/p - 1/2) \geq \beta/d - 1/2$, то $m_{\alpha,\beta} \notin A_p(\mathbb{R}^d)$.

Ниже мы покажем, что при $(\alpha - 1)(1/p - 1/2) < \beta/d - 1/2$ имеем $m_{\alpha,\beta} \in A_p(\mathbb{R}^d)$.

Следующая лемма выполняет техническую роль.

ЛЕММА 4. Пусть φ и ψ – положительные, убывающие и четные функции, определенные на $\mathbb{R}$. Тогда для любых $k, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \leq r$, и $h > 0$ имеет место неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\min|t \pm kh|) \psi(\min|t \pm rh|) dt \leq 8 \int_0^{\infty} \varphi(t) \psi(t) dt. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя четность функций φ и ψ , представляем интеграл в правой части (8) в виде удвоенной суммы трех интегралов по отрезкам $(0, kh)$, (kh, rh) и (rh, ∞) . После этого, применяя к каждому интегралу элементарные неравенства и преобразования и используя при этом монотонность функций φ и ψ , получаем (8).

4. Доказательство теоремы 1. При доказательстве утверждения (I) теоремы 1 мы будем использовать схему доказательства теорем 1 и 2 работы [4]: сначала рассмотрим случай функций одной переменной, а затем сделаем переход к функциям нескольких переменных.

Случай одной переменной. При $d = 1$ утверждение (I) выглядит следующим образом.

Пусть $0 < p < 2$, $f \in C_0(\mathbb{R})$ и при некотором натуральном $r > 1/p - 1/2$ имеет на $\mathbb{R}$ локально абсолютно непрерывную производную $f^{(r-1)}$,

$$f_0(t) = \sup_{|s| \geq |t|} |f(s)|,$$

и при некоторых $\delta_+^{(\nu)}, \delta_-^{(\nu)}$, $\nu = 1, r$, удовлетворяющих (2) и (3), имеет место

$$\int_0^{\infty} [f_0^{1-\delta_+^{(\nu)}}(t) F_\nu^{1+\delta_+^{(\nu)}}(t) + f_0^{1-\delta_-^{(\nu)}}(t) F_\nu^{1+\delta_-^{(\nu)}}(t)] dt < \infty, \quad \nu = 1, r, \quad (9)$$

где

(а) если $f^{(\nu)}$ принадлежит L_∞ вне любой окрестности нуля, то

$$F_\nu(t) = \operatorname{ess\,sup}_{|s| \geq |t| > 0} |f^{(\nu)}(s)|;$$

(б) если $f^{(\nu)}$ не ограничена около бесконечности и принадлежит L_∞ вне любой окрестности бесконечности, то $F_\nu(t) = f_\infty(t + 2\nu\pi)$, где

$$f_{\nu,\infty}(t) = \operatorname{ess\,sup}_{0 < |s| \leq |t|} |f^{(\nu)}(s)|.$$

Тогда $f \in A_p(\mathbb{R})$.

Как было показано в [4], условие (9) при $\nu = 1$ обеспечивает сходимость ряда (6) в лемме 2. Следовательно, согласно лемме 2 нам остается только доказать сходимость следующих двух рядов:

$$\sum_{s=0}^{\infty} 2^{(1-p/2)s} [\Delta^r(h(s))]^p, \quad \sum_{s=1}^{\infty} 2^{-(1-p/2)s} [\Delta^r(h(-s))]^p, \quad (10)$$

где

$$\Delta^r(h) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\Delta_h^r f(t)|^2 dt \right)^{1/2}, \quad h = h(s) = \frac{\pi}{2s}, \quad s \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку ниже рассматривается только случай $\nu = r$, мы обозначим $\delta_+ = \delta_+^{(r)}$ и $\delta_- = \delta_-^{(r)}$. Доказательство начнем со случая (а). Очевидно, что при $h > 0$

$$|\Delta_h^r f(t)| = \left| \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k f(t + (2k - r)h) \right| \leq C \max_{0 \leq k \leq r} f_0(\min|t \pm kh|), \quad (11)$$

$$|\Delta_h^r f(t)| = \left| \int_{t-h}^{t+h} du_1 \cdots \int_{u_{r-1}-h}^{u_{r-1}+h} f^{(r)}(u_r) du_r \right| \leq Ch^r F_r(\min|t \pm rh|), \quad (12)$$

где C – константы, зависящие только от r .

Пусть $\delta \in [-1, 1]$; используя (11) и (12), находим

$$\begin{aligned} [\Delta^r(h)]^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\Delta_h^r f(t)|^{1-\delta} |\Delta_h^r f(t)|^{1+\delta} dt \\ &\leq Ch^{r(1+\delta)} \int_{-\infty}^{\infty} \max_{0 \leq k \leq r} f_0^{1-\delta}(\min|t \pm kh|) F_r^{1+\delta}(\min|t \pm rh|) dt. \end{aligned} \quad (13)$$

Вынося в неравенстве (13) знак $\max$ за интеграл и учитывая при этом лемму 4, получаем, что

$$[\Delta^r(h)]^2 \leq Ch^{r(1+\delta)} \int_0^{\infty} f_0^{1-\delta}(t) F_r^{1+\delta}(t) dt.$$

Следовательно, для $\delta = \delta_+$ и $h = h(s)$, $s = 0, 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} 2^{(1-p/2)s} [\Delta^r(h(s))]^p &\leq C \sum_{s=0}^{\infty} 2^{(1-p/2-r(1+\delta_+)p/2)s} \left(\int_0^{\infty} f_0^{1-\delta_+}(t) F_r^{1+\delta_+}(t) dt \right)^{p/2} \\ &= C \left(\int_0^{\infty} f_0^{1-\delta_+}(t) F_r^{1+\delta_+}(t) dt \right)^{p/2} < \infty. \end{aligned} \quad (14)$$

Если $\delta = \delta_-$ и $h = h(-s)$, $s = 1, 2, \dots$, то для второго ряда в (10) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{\infty} 2^{-(1-p/2)s} [\Delta^r(h(-s))]^p &\leq C \sum_{s=0}^{\infty} 2^{-(1-p/2-r(1+\delta_-)p/2)s} \left(\int_0^{\infty} f_0^{1-\delta_-}(t) F_r^{1+\delta_-}(t) dt \right)^{p/2} \\ &= C \left(\int_0^{\infty} f_0^{1-\delta_-}(t) F_r^{1+\delta_-}(t) dt \right)^{p/2} < \infty. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, из (14) и (15), а также леммы 2 получаем, что в случае (а) функция $f \in A_p(\mathbb{R})$.

Доказательство в случае (b) также основано на лемме 2. Очевидно, что при $h > 0$

$$|\Delta_h^r f(t)| = \left| \int_{t-h}^{t+h} du_1 \cdots \int_{u_{r-1}-h}^{u_{r-1}+h} f^{(r)}(u_r) du_r \right| \leq Ch^r f_{\infty,r}(\max|t \pm rh|). \quad (16)$$

Возьмем $\delta \in [-1, 1]$ и $h = h(s)$, $s = 0, 1, 2, \dots$. Как и выше, используя (11) и (16), имеем

$$[\Delta^r(h)]^2 \leq Ch^{r(1+\delta)} \max_{0 \leq k \leq r} \int_{-\infty}^{\infty} f_0^{1-\delta}(\min|t \pm kh|) f_{\infty,r}^{1+\delta}(\max|t \pm rh|) dt. \quad (17)$$

Разобьем интеграл в (17) на два: по $|x| \leq r\pi$ и $|x| \geq r\pi$. На конечном интервале имеем

$$\max_{0 \leq k \leq r} \int_{|x| \leq r\pi} f_0^{1-\delta}(\min|t \pm kh|) f_{\infty,r}^{1+\delta}(\max|t \pm rh|) dt \leq C \|f\|_{\infty}^{1-\delta} f_{\infty,r}^{1+\delta}(2r\pi). \quad (18)$$

На бесконечном интервале имеем

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq k \leq r} \int_{|x| \geq r\pi} f_0^{1-\delta}(\min|t \pm kh|) f_{\infty,r}^{1+\delta}(\max|t \pm rh|) dt \\ & \leq 2 \int_{r\pi}^{\infty} f_0^{1-\delta}(t - r\pi) f_{\infty,r}^{1+\delta}(t + r\pi) dt = 2 \int_0^{\infty} f_0^{1-\delta}(t) f_{\infty,r}^{1+\delta}(t + 2r\pi) dt. \end{aligned} \quad (19)$$

Объединяя (17), (18) и (19) при $\delta = \delta_+$, получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^{\infty} 2^{(1-p/2)s} [\Delta^r(h)]^p \\ & \leq C \sum_{s=0}^{\infty} 2^{(1-p/2-r(1+\delta_+)p/2)s} \left\{ \|f\|_{\infty}^{1-\delta_+} F_r^{1+\delta_+}(0) + \int_0^{\infty} f_0^{1-\delta_+}(t) F_r^{1+\delta_+}(t) dt \right\} < \infty. \end{aligned} \quad (20)$$

Оценим теперь второй ряд в (10). При $h = h(-s)$, $s = 1, 2, \dots$, находим

$$\begin{aligned} [\Delta^r(h)]^2 &= \int_{|t| \leq 2r\pi} |\Delta_h^r f(t)|^2 dt + \int_{|t| \geq 2r\pi} |\Delta_h^r f(t)|^2 dt \\ &\leq C \left\{ \|f\|_{\infty}^2 + C \int_{|t| \geq 2r\pi} f_0^2(t) dt \right\} \\ &\leq C \left\{ \|f\|_{\infty}^2 + f_0^{1+\delta_+}(r\pi) \int_{r\pi}^{\infty} f_0^{1-\delta_+}(t) \frac{F_r^{1+\delta_+}(t)}{F_r^{1+\delta_+}(t)} dt \right\} \\ &\leq C \left\{ \|f\|_{\infty}^2 + \frac{f_0^{1+\delta_+}(r\pi)}{F_r^{1+\delta_+}(r\pi)} \int_{r\pi}^{\infty} f_0^{1-\delta_+}(t) F_r^{1+\delta_+}(t) dt \right\} = I < \infty. \end{aligned}$$

Откуда сразу следует, что

$$\sum_{s=1}^{\infty} 2^{-(1-p/2)s} [\Delta^r(h)]^p \leq I^{p/2} \sum_{s=1}^{\infty} 2^{-(1-p/2)s} < \infty. \quad (21)$$

Как и в случае (a), из (20) и (21) мы получаем, что $f \in A_p(\mathbb{R}^d)$.

Случай нескольких переменных. Мы будем рассматривать лишь случай функций двух переменных. Доказательство для более высоких размерностей отличается только количеством повторений шагов из доказательства одномерного случая. Как и в одномерном случае, мы будем использовать лемму 2. Для упрощения вычислений, применяемых к $\Delta_{\pi/(2^{s_1}), \pi/(2^{s_2})}^\nu(f)$, $\nu = 1, r$, мы введем обозначение $F_{i,j}$ с $i, j = 0$ или ν . Здесь $i = 0$ или $j = 0$ означает, что мы работаем с соответствующей переменной по образцу одномерного доказательства в тех ситуациях, когда дифференцирование не производится. Аналогично, $i = \nu$ или $j = \nu$ означает, что производятся соответствующие операции, ведущие к введенной выше функции F_ν . Например,

$$F_{0,0}(x_1, x_2) = \sup_{|u_i| \geq |x_i|, i=1,2} |f(u_1, u_2)|,$$

а $F_{0,\nu}(x_1, x_2)$ означает

$$\sup_{|u_1| \geq |x_1|} \operatorname{ess\,sup}_{0 < |x_2| \leq |u_2|} \left| \frac{\partial^\nu}{\partial u_2^\nu} f(u_1, u_2) \right|,$$

или

$$\sup_{|u_1| \geq |x_1|} \operatorname{ess\,sup}_{0 < |u_2| \leq |x_2|} \left| \frac{\partial^\nu}{\partial u_2^\nu} f(u_1, u_2 + 2\nu\pi) \right|.$$

Аналогичным образом понимаются $F_{\nu,0}$ и $F_{\nu,\nu}$.

Сформулируем двумерный вариант утверждения (I).

Пусть $f \in C_0(\mathbb{R}^2)$, $0 < p < 2$, и при некотором натуральном $r > 1/p - 1/2$ функция f имеет локально абсолютно непрерывные по каждой переменной на $\mathbb{R}^2$ частные производные D_{r-1}^σ , $\mathbf{0} \leq \sigma \leq \mathbf{1}$, а частные производные

$$\frac{\partial^r}{\partial u_1^r} f(u_1, u_2) \quad \text{и} \quad \frac{\partial^r}{\partial u_2^r} f(u_1, u_2)$$

локально абсолютно непрерывны по переменной u_2 и u_1 соответственно. Если при некоторых $\delta_+^{(\nu)}, \delta_-^{(\nu)}$, $\nu = 1, r$, удовлетворяющих (2) и (3), имеет место

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+^2} F_{0,0}^{(1-\delta_\pm^{(\nu)})(1-\delta_\pm^{(\nu)})/2}(x) F_{0,\nu}^{(1-\delta_\pm^{(\nu)})(1+\delta_\pm^{(\nu)})/2}(x) \\ & \times F_{\nu,0}^{(1+\delta_\pm^{(\nu)})(1-\delta_\pm^{(\nu)})/2}(x) F_{\nu,\nu}^{(1+\delta_\pm^{(\nu)})(1+\delta_\pm^{(\nu)})/2}(x) dx < \infty \end{aligned} \quad (22)$$

для $\nu = 1, r$ и всех возможных комбинаций знаков $+$ и $-$ при $\delta^{(\nu)}$ в показателе степени $F_{0,0}$, то $f \in A_p(\mathbb{R}^2)$.

Рассмотрим только случай $\zeta = (0, 0)$. При $\zeta \neq (0, 0)$ доказательство аналогично приведенным ниже рассуждениям с использованием схемы доказательства одномерного случая.

Как и в одномерном случае, достаточно рассмотреть условие (22) только в случае $\nu = r$, т.е. проверить на сходимость следующие четыре ряда:

$$\sum_{s_1=0}^{\infty} \sum_{s_2=0}^{\infty} 2^{(1-p/2)(s_1+s_2)} \|\Delta_{\pi/(2^{s_1}), \pi/(2^{s_2})}^r f\|_2^p, \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{s_1=0}^{\infty} \sum_{s_2=1}^{\infty} 2^{(1-p/2)(s_1-s_2)} \|\Delta_{\pi/(2^{s_1}), \pi 2^{s_2}}^r f\|_2^p, \\
& \sum_{s_1=1}^{\infty} \sum_{s_2=0}^{\infty} 2^{(1-p/2)(s_2-s_1)} \|\Delta_{\pi 2^{s_1}, \pi/(2^{s_2})}^r f\|_2^p, \\
& \sum_{s_1=1}^{\infty} \sum_{s_2=1}^{\infty} 2^{-(1-p/2)(s_1+s_2)} \|\Delta_{\pi/(2^{s_1}), \pi/(2^{s_2})}^r f\|_2^p.
\end{aligned} \tag{24}$$

Очевидно, что для любых $h_1, h_2 > 0$ имеет место следующее неравенство:

$$|\Delta_{h_1, h_2}^r f(x)| \leq C \max_{0 \leq k_1, k_2 \leq r} F_{0,0}(\min|x \pm k_1 h_1|, \min|x \pm k_2 h_2|). \tag{25}$$

Если $\chi = (1, 0)$ и $\eta = (0, 1)$, то

$$\begin{aligned}
|\Delta_{h_1, h_2}^r f(x)| &= \left| \Delta_{h_1}^r \left(\int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} dt_1 \cdots \int_{t_{r-1}-h_2}^{t_{r-1}+h_2} \frac{\partial^r}{\partial t_r^r} f(x_1, t_r) dt_r \right) \right| \\
&\leq C \sum_{k=0}^r \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} dt_1 \cdots \int_{t_{r-1}-h_2}^{t_{r-1}+h_2} \left| \frac{\partial^r}{\partial t_r^r} f(x_1 + (2k-r)h_1, t_r) \right| dt_r \\
&\leq C h_2^r \sum_{k=0}^r \operatorname{ess\,sup}_{0 < \min|x_2 \pm r h_2| \leq |u_2|} \left| \frac{\partial^r}{\partial t_r^r} f(x_1 + (2k-r)h_1, u_2) \right| \\
&\leq C h_2^r \max_{0 \leq k \leq r} F_{0,r}(\min|x_1 \pm k h_1|, \min|x_2 \pm r h_2|).
\end{aligned} \tag{26}$$

Аналогичные оценки нетрудно получить и с функциями $F_{r,0}$ и $F_{r,r}$:

$$|\Delta_{h_1, h_2}^r f(x)| \leq C h_1^r \max_{0 \leq k \leq r} F_{r,0}(\min|x_1 \pm r h_1|, \min|x_2 \pm k h_2|), \tag{27}$$

$$|\Delta_{h_1, h_2}^r f(x)| \leq C (h_1 h_2)^r F_{r,r}(\min|x_1 \pm r h_1|, \min|x_2 \pm r h_2|). \tag{28}$$

Отметим, что константы C в неравенствах (25)–(28) зависят только от r .

Далее, пусть $\delta_1, \delta_2 \in [-1, 1]$. Используя равенство

$$2 = \frac{(1-\delta_1)(1-\delta_2)}{2} + \frac{(1-\delta_1)(1+\delta_2)}{2} + \frac{(1+\delta_1)(1-\delta_2)}{2} + \frac{(1+\delta_1)(1+\delta_2)}{2},$$

а также неравенства (25)–(28), по аналогии с доказательством одномерного случая получаем

$$\begin{aligned}
\|\Delta_{h_1, h_2}^r f\|_2^p &\leq C (h_1^{1+\delta_1} h_2^{1+\delta_2})^{rp/2} \left(\int_{\mathbb{R}_+^2} F_{0,0}^{(1-\delta_1)(1-\delta_2)/2}(x) F_{0,r}^{(1-\delta_1)(1+\delta_2)/2}(x) \right. \\
&\quad \left. \times F_{r,0}^{(1+\delta_1)(1-\delta_2)/2}(x) F_{r,r}^{(1+\delta_1)(1+\delta_2)/2}(x) dx \right)^{p/2}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим ряд (23). Возьмем $\delta_1 = \delta_2 = \delta_+^{(r)}$ (для ряда (24) следует брать $\delta_1 = \delta_+^{(r)}$, а $\delta_2 = \delta_-^{(r)}$). Имеем

$$\sum_{s_1=0}^{\infty} \sum_{s_2=0}^{\infty} 2^{(1-p/2)(s_1+s_2)} \|\Delta_{\pi/(2^{s_1}), \pi/(2^{s_2})}^r f\|_2^p$$

$$\leq C \sum_{s_1=0}^{\infty} \sum_{s_2=0}^{\infty} 2^{(1-p/2-(\delta_+^{(r)}+1)rp/2)(s_1+s_2)} \times \left(\int_{\mathbb{R}_+^2} F_{0,0}^{(1-\delta_1)(1-\delta_1)/2}(x) F_{0,r}^{(1-\delta_1)(1+\delta_1)/2}(x) \times F_{r,0}^{(1+\delta_1)(1-\delta_1)/2}(x) F_{r,r}^{(1+\delta_1)(1+\delta_1)/2}(x) dx \right)^{p/2} < \infty.$$

Аналогично исследовав на сходимость оставшиеся три ряда, получаем доказательство утверждения (I).

Доказательство утверждения (II). Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 2 статьи [4], нетрудно проверить положительную часть утверждения (II).

Используя функцию (7) и лемму 3, покажем точность условия (5). Точность условия (4) проверяется аналогичным способом (см. также [4]). Ясно, что $\gamma_0^{(r)} = \beta$, а при $j > 0$ прямым дифференцированием вычисляем $\gamma_j^{(r)} = \beta - rj(\alpha - 1)$. Используя равенства

$$\sum_{j=0}^d \binom{d}{j} a^{d-j} b^j = (a+b)^d, \quad \sum_{j=1}^d \binom{d}{j} j a^{d-j} b^j = db(a+b)^{d-1},$$

находим

$$\sum_{j=0}^d \binom{d}{j} \left(r - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}\right)^{d-j} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)^j (\beta - rj(\alpha - 1)) = r^d \left(\beta - (\alpha - 1)d \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)\right). \quad (29)$$

Из последнего соотношения и леммы 3 следует отрицательная часть утверждения (II), если $\alpha \neq 1$. Если же $\alpha = 1$, то можно считать, что на самом деле $\gamma_0^{(r)} < \gamma_1^{(r)}$.

Кроме того, из условия (5) и равенства (29) получаем, что функция $m_{\alpha,\beta} \in A_p(\mathbb{R}^d)$ при $(\alpha - 1)(1/p - 1/2) < \beta/d - 1/2$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $0 < p < 2$, $\alpha, \beta > 0$ и $\alpha \neq 1$. Функция $m_{\alpha,\beta} \in A_p(\mathbb{R}^d)$ тогда и только тогда, когда $\beta > d\alpha/2$ и $(\alpha - 1)(1/p - 1/2) < \beta/d - 1/2$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. G. Samko, G. S. Kostetskaya, "Absolute integrability of Fourier integrals", *Вестн. Рос. ун-та дружбы народов. Сер. матем.*, 1994, № 1, 138–168.
- [2] E. Liflyand, R. Trigub, "Conditions for the absolute convergence of Fourier integrals", *J. Approx. Theory*, **163**:4 (2011), 438–459.
- [3] R. M. Trigub, E. S. Bellinsky, *Fourier Analysis and Approximation of Functions*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004.
- [4] И. Р. Лифлянд, Р. М. Тригуб, "О представлении функции в виде абсолютно сходящегося интеграла Фурье", *Теория функций и дифференциальные уравнения*, Сборник статей. К 105-летию со дня рождения академика Сергея Михайловича Никольского, Тр. МИАН, **269**, МАИК, М., 2010, 153–166.
- [5] Р. М. Тригуб, "О мультипликаторах Фурье и абсолютной сходимости интегралов Фурье радиальных функций", *Укр. матем. журн.*, **62**:9 (2010), 1280–1293.
- [6] Р. М. Тригуб, "Мультипликаторы в пространствах Харди $H_p(D^m)$ при $p \in (0, 1]$ и аппроксимативные свойства методов суммирования степенных рядов", *Матем. сб.*, **188**:4 (1997), 145–160.

- [7] V. I. Rukasov, K. V. Runovski, H.-J. Schmeisser, “On convergence of families of linear polynomial operators”, *Funct. Approx. Comment. Math.*, **41**:1 (2009), 41–54.
- [8] Р. М. Тригуб, “Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами функций на торе”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **44**:6 (1980), 1378–1409.
- [9] О. В. Бесов, “К теореме Хермандера о мультипликаторах Фурье”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Часть 11*, Сборник работ, Тр. МИАН СССР, **173**, 1986, 3–13.
- [10] I. I. Hirschman, Jr., “On multiplier transformations”, *Duke Math. J.*, **26**:2 (1959), 221–242.
- [11] S. Wainger, *Special Trigonometric Series in k Dimensions*, Mem. Amer. Math. Soc., **59**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1965.
- [12] Ch. Fefferman, “Inequalities for strongly singular convolution operators”, *Acta Math.*, **124** (1970), 9–36.
- [13] A. Miyachi, “On some singular Fourier multipliers”, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **28**:2 (1981), 267–315.
- [14] A. Miyachi, “On some Fourier multipliers for $H^p(\mathbb{R}^n)$ ”, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **27**:1 (1980), 157–179.
- [15] И. М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973.

Ю. С. Коломойцев

Институт прикладной математики и механики НАН
Украины, г. Донецк
Донецкий национальный университет
E-mail: kolomusi@mail.ru

Поступило

23.03.2011