Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Якимив, О числе компонент фиксированного объема случайного A -отображения, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 3, 462–470

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9094>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 16:57:56

О числе компонент фиксированного объема случайного A -отображения

А. Л. Якимив

Пусть $\mathfrak{S}_n$ – полугруппа отображений множества из n элементов в себя, A – некоторое фиксированное подмножество множества натуральных чисел $\mathbb{N}$, $V_n(A)$ – множество отображений из $\mathfrak{S}_n$, размеры контуров которых принадлежат множеству A . Отображения из $V_n(A)$ принято называть A -отображениями. Рассмотрим случайное отображение σ_n , равномерно распределенное на $V_n(A)$. Предполагается, что множество A имеет асимптотическую плотность ϱ , причем допускается, что $\varrho = 0$. Пусть ξ_{in} – число компонент связности случайного отображения σ_n объема $i \in \mathbb{N}$. В настоящей статье изучено асимптотическое поведение совместного распределения случайных величин $\xi_{1n}, \xi_{2n}, \dots, \xi_{bn}$ при $n \rightarrow \infty$ и фиксированном $b \in \mathbb{N}$. Показано, что это распределение слабо сходится совместному распределению независимых пуассоновских случайных величин $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_b$ с некоторыми параметрами $\lambda_i = E\eta_i$, $i \in \mathbb{N}$.

Библиография: 32 названия.

DOI: 10.4213/mzm9094

1. Введение. Пусть $\mathfrak{S}_n$ – симметрическая полугруппа однозначных отображений множества X из n элементов в себя. Граф отображения $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ является ориентированным графом $\Gamma(X, \sigma)$, вершины которого $x, y \in X$ соединены дугой (x, y) , если $y = \sigma(x)$. Каждый граф $\Gamma(X, \sigma)$ состоит из связных компонент, причем компонента состоит из одного контура и деревьев, корнями которых являются вершины контура, называемые циклическими элементами. Все дуги деревьев ориентированы в направлении к корням. Обозначим через $V_n = V_n(A)$ совокупность отображений $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, для которых размеры контуров соответствующих графов $\Gamma(X, \sigma)$ являются элементами заданной последовательности $A \subseteq \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Такие отображения называются A -отображениями. Более подробно об A -отображениях см. в книгах Сачкова [1]–[3].

Через $T_n = T_n(A)$ обозначим подмножество отображений $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, которые являются взаимно однозначными отображениями, т.е. некоторыми перестановками множества X . Пусть $\sigma_n = \sigma_n(A)$ – случайное отображение, равномерно распределенное на $V_n(A)$, а $\tau_n = \tau_n(A)$ – случайная подстановка, равномерно распределенная на

$T_n(A)$. В ряде работ изучались асимптотические свойства числа циклов и некоторых других числовых характеристик случайной подстановки $\tau_n(A)$, а также числа элементов множества $T_n(A)$ при $n \rightarrow \infty$ в широком классе множеств A (см., например, статьи Бендера [4], Болотникова, Сачкова и Тараканова [5], Вольнец [6], Грушо [7], Ивченко и Медведева [8], Колчина [9], Колчина [10], Манставичюса [11], Минеева и Павлова [12], Павлова [13], Тимашева [14], автора [15]; более подробная библиография содержится в книге [15]).

Аналогичные задачи для случайных A -отображений $\sigma_n(A)$ с множеством A общего вида практически не решались, исключение здесь составляют статьи Сачкова [16], [17]. Тем не менее, отметим, что в случаях $A = \{1\}$ и $A = \mathbb{N}$ существует глубокая и продвинутая теория (см., например, книгу Павлова [18] и книги Колчина [19], [20]). Речь в этих книгах идет соответственно о случайных лесах и случайных отображениях. В качестве недавних исследований в этих направлениях отметим статьи Павлова [21], Севастьянова [22], Тимашева [23] и Чеплюковой [24].

Через $|Y|$ везде далее будем обозначать число элементов конечного множества Y . Пусть ξ_{in} – число компонент связности случайного отображения σ_n объема $i \in \mathbb{N}$. В настоящей статье изучено асимптотическое поведение совместного распределения случайных величин $\xi_{1n}, \xi_{2n}, \dots, \xi_{bn}$ при $n \rightarrow \infty$ и фиксированном $b \in \mathbb{N}$. Показано, что это распределение слабо сходится совместному распределению независимых пуассоновских случайных величин $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_b$ с некоторыми параметрами $\lambda_i = E\eta_i$, $i \in \mathbb{N}$. Более конкретно, мы предполагаем, что существует следующий предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{k : k \leq n, k \in A\}|}{n} = \varrho, \quad (1)$$

называемый в теории чисел асимптотической плотностью множества A (см. книгу Постникова [25; раздел 3.1]), причем допускается, что $\varrho = 0$. Различные примеры множеств A , удовлетворяющих (1), приведены в статье [26].

2. Основной результат. Зафиксируем непустое множество $A \subseteq \mathbb{N}$. Положим

$$v(n) = |V_n(A)|, \quad n \in \mathbb{N}, \quad v(0) = 1.$$

Согласно книге Арратиа, Барбура и Таваре [27; с. 46] (2003),

$$\sum_{n \geq 0} \frac{v(n)}{n!} s^n = \exp \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} m_i \frac{s^i}{i!} \right), \quad (2)$$

где m_i – число отображений, принадлежащих $V_i(A)$ и имеющих одну компоненту связности; результат восходит к работе Ридделля и Уленбека 1953 г. [28]. Формула (2) носит весьма общий характер и справедлива для большого числа комбинаторных объектов, разложимых на компоненты и называется экспоненциальной формулой. Более подробно об этом см. цитированную ранее книгу Арратиа, Барбура и Таваре [27]. В данном случае сходимость степенных рядов в левой и правой части равенства (2) имеет место при $|s| \leq 1/e$. Заметим, что m_i есть сумма чисел m_{ij} отображений, принадлежащих $V_i(A)$ и имеющих одну компоненту связности и j нециклических элементов таких, что $i - j \in A$, т.е.

$$m_i = \sum_{j \in \{i-k : k \in A(i)\}} m_{ij},$$

$m_i = 0$ при $A(i) = \emptyset$, где $A(i) = A \cap [1, i]$. Далее,

$$m_{ij} = (i-1)! \frac{i^j}{j!}$$

(см. работу Каца [29] (1955) или книги Боллобаша [30] (1985) и [31] (2001)). Стало быть,

$$m_i = (i-1)! \sum_{j \in \{i-k: k \in A(i)\}} \frac{i^j}{j!}. \quad (3)$$

Пусть $\eta_1, \eta_2, \dots$ – независимые в совокупности пуассоновские случайные величины с параметрами

$$\lambda_i = \mathbb{E}\eta_i = \frac{m_i e^{-i}}{i!}. \quad (4)$$

Сформулируем основной результат настоящей заметки.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнено (1), причем при $\varrho = 0$ дополнительно предполагается, что для некоторого $\alpha \in (0, 1]$ и медленно меняющейся на бесконечности по Карамата функции $L(n)$ [32] имеет место равенство

$$|\{k: k \leq n, k \in A\}| = n^\alpha L(n), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Тогда конечномерные распределения случайного процесса $\{\xi_{in}, i \in \mathbb{N}\}$ слабо сходятся при $n \rightarrow \infty$ к конечномерным распределениям случайного процесса $\{\eta_i, i \in \mathbb{N}\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае, когда $A = \mathbb{N}$, т.е. когда рассматривается равномерное распределение на всей симметрической полугруппе $\mathfrak{S}_n$ отображений множества X из n элементов в себя, соответствующий результат получен Колчиным в книге [19; раздел 1.12, теорема 5].

Расположим объемы компонент отображения σ_n в возрастающем порядке:

$$l_n(1) \leq l_n(2) \leq \dots \leq l_n(\zeta_n),$$

где ζ_n – число компонент случайного A -отображения σ_n .

СЛЕДСТВИЕ 1. Для произвольных фиксированных $m, r \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}\{l_n(m) \leq r\} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\Lambda_r^k e^{-\Lambda_r}}{k!} + o(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

где

$$\Lambda_r = \sum_{i=1}^r \lambda_i,$$

а λ_i определяются из равенств (3) и (4).

Действительно,

$$\mathbb{P}\{l_n(m) \leq r\} = \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^r \xi_{in} \geq m\right\},$$

и для доказательства следствия 1 нам остается воспользоваться теоремой 1.

При доказательстве теоремы 1 нами будут использоваться две следующие леммы.

ЛЕММА 1 [27; с. 48–49]. Пусть $n \in \mathbb{N}$ таково, что $n \geq \min A$. Тогда для произвольных неотрицательных целых чисел $a_1, \dots, a_n$ имеет место равенство

$$P\{\xi_{in} = a_i \text{ для всех } i = 1, \dots, n\} = P\left\{\eta_i = a_i \text{ для всех } i = 1, \dots, n \mid \sum_{i=1}^n i\eta_i = n\right\}. \quad (6)$$

ЛЕММА 2. Пусть выполнены предположения теоремы 1. Тогда функция

$$\frac{v(n)}{n!e^n}$$

правильно меняется на бесконечности по Карамата с показателем $\beta > -3/2$ (т.е. представима в виде произведения степенной функции n^β на некоторую медленно меняющуюся на бесконечности по Карамата функцию [32]).

Далее через $L_0(n)$, $L_1(n)$ и т.д. без специальных оговорок будут обозначаться медленно меняющиеся на бесконечности по Карамата функции, т.е. неотрицательные функции $L_i(n)$, положительные для достаточно больших n и такие, что

$$\frac{L_i([\lambda n])}{L_i(n)} \rightarrow 1$$

при $n \rightarrow \infty$ для произвольного фиксированного положительного λ (см. [32]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Если выполнено (1) с $\varrho > 0$, то согласно теореме 1 из [26]

$$v(n) = n^{n-(1-\varrho)/2} L_0(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

В силу формулы Стирлинга для $n!$ отсюда следует, что функция

$$\frac{v(n)}{n!e^n} = \frac{n^{n-(1-\varrho)/2}}{\sqrt{n} \cdot n^n} L_1(n) = n^{\varrho/2-1} L_1(n)$$

правильно меняется на бесконечности по Карамата с показателем $\beta = \varrho/2 - 1 > -1$. В случае, если $\varrho = 0$ и выполнено (5) с $\alpha \in (0, 1]$, то согласно теореме 2 из [26]

$$v(n) = n^{n-1+\alpha/2} L_2(n), \quad n \in \mathbb{N},$$

откуда в силу той же формулы Стирлинга для $n!$ следует, что функция

$$\frac{v(n)}{n!e^n} = \frac{n^{n-1+\alpha/2}}{\sqrt{n} \cdot n^n} L_3(n) = n^{(\alpha-3)/2} L_3(n)$$

правильно меняется на бесконечности по Карамата с показателем $\beta = \alpha/2 - 3/2 > -3/2$. Лемма 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Зафиксируем некоторое $b \in A$ и неотрицательные целые числа a_m , $m = 1, \dots, b$ такие, что

$$a \equiv \sum_{m \in A(b)} m a_m \leq n.$$

Положим при $0 \leq l < m$

$$\theta_{lm} = \sum_{i=l+1}^m i\eta_i. \quad (7)$$

Согласно лемме 1 и равенству (7) имеем

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{\xi_{mn} = a_m \text{ для всех } m = 1, \dots, b\} \\ &= \mathbb{P}\{\eta_m = a_m \text{ для всех } m = 1, \dots, b \mid \theta_{0n} = n\} \\ &= \frac{\mathbb{P}\{\eta_m = a_m \text{ для всех } m = 1, \dots, b, \sum_{m=1}^n m\eta_m = n\}}{\mathbb{P}\{\theta_{0n} = n\}} \\ &= \frac{\mathbb{P}\{\eta_m = a_m \text{ для всех } m = 1, \dots, b, \theta_{bn} = n - a\}}{\mathbb{P}\{\theta_{0n} = n\}} \\ &= \frac{\mathbb{P}\{\eta_m = a_m \text{ для всех } m = 1, \dots, b\} \mathbb{P}\{\theta_{bn} = n - a\}}{\mathbb{P}\{\theta_{0n} = n\}}. \end{aligned} \quad (8)$$

В силу (8) для доказательства теоремы 1 нам достаточно показать, что

$$\frac{\mathbb{P}\{\theta_{bn} = n - a\}}{\mathbb{P}\{\theta_{0n} = n\}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (9)$$

Согласно формулам (3) и (4) для произвольного $s \in (0, 1)$ имеем

$$\begin{aligned} M s^{\theta_{0n}} &= \exp\left(-\sum_{i=1}^n \lambda_i (1 - s^i)\right) = \exp\left(-\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) \exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i s^i\right) \\ &= \exp\left(-\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) \exp\left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{i!} \left(\frac{s}{e}\right)^i\right). \end{aligned}$$

Поэтому в силу (2)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\theta_{0n} = n\} &= \exp\left(-\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) \text{coef}_{s^n} \exp\left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{i!} \left(\frac{s}{e}\right)^i\right) \\ &= \exp\left(-\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) \text{coef}_{s^n} \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{m_i}{i!} \left(\frac{s}{e}\right)^i\right) \\ &= \exp\left(-\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) \text{coef}_{s^n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{v(j)}{j! e^j} s^j \\ &= \exp\left(-\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) \frac{v(n)}{n! e^n} \equiv \exp\left(-\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) R(n). \end{aligned} \quad (10)$$

Точно так же

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\theta_{bn} = n\} &= \exp\left(-\sum_{i=b+1}^n \lambda_i\right) \text{coef}_{s^n} \exp\left(\sum_{i=b+1}^n \frac{m_i}{i!} \left(\frac{s}{e}\right)^i\right) \\ &= \exp\left(-\sum_{i=b+1}^n \lambda_i\right) \text{coef}_{s^n} \exp\left(\sum_{i=b+1}^{\infty} \frac{m_i}{i!} \left(\frac{s}{e}\right)^i\right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 P\{\theta_{bn} = n - a \equiv m\} &= \exp\left(-\sum_{i=b+1}^n \lambda_i\right) \text{coef}_{s^m} \exp\left(\sum_{i=b+1}^n \frac{m_i}{i!} \left(\frac{s}{e}\right)^i\right) \\
 &= \exp\left(-\sum_{i=b+1}^n \lambda_i\right) \text{coef}_{s^m} \exp\left(\sum_{i=b+1}^{\infty} \frac{m_i}{i!} \left(\frac{s}{e}\right)^i\right) \\
 &= \exp\left(-\sum_{i=b+1}^n \lambda_i\right) \text{coef}_{s^m}(f(s) \cdot g(s)), \tag{11}
 \end{aligned}$$

где

$$f(s) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{m_i}{i!} \left(\frac{s}{e}\right)^i\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{v(j)}{j! e^j} s^j, \tag{12}$$

$$g(s) = \exp\left(-\sum_{i=1}^b \frac{m_i}{i!} \left(\frac{s}{e}\right)^i\right). \tag{13}$$

В силу (10) и (11) для доказательства (9) достаточно показать, что

$$I_n \equiv \text{coef}_{s^{n-a}}(f(s) \cdot g(s)) = (1 + o(1)) \exp\left(-\sum_{i=1}^b \lambda_i\right) R(n) \tag{14}$$

при $n \rightarrow \infty$. Из (13) имеем

$$I_n \equiv \text{coef}_{s^m}(f(s) \cdot g(s)) = \sum_{k=0}^m R(m-k)q(k), \tag{15}$$

где $m = n - a$,

$$q(k) = \text{coef}_{s^k} g(s).$$

Обозначим

$$I_n = \sum_{k=0}^{[\sqrt{n}]} R(m-k)q(k) + \sum_{k=[\sqrt{n}]+1}^m R(m-k)q(k) = I_{1n} + I_{2n}. \tag{16}$$

Согласно лемме 2 имеем при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 I_{1n} &= \sum_{k=0}^{[\sqrt{n}]} R(n-a-k)q(k) = (1 + o(1))R(n) \sum_{k=0}^{[\sqrt{n}]} q(k) = (1 + o(1))R(n) \sum_{k=0}^{[\sqrt{n}]} \text{coef}_{s^k} g(s) \\
 &= (1 + o(1))R(n)(g(1) + o(1)) = (1 + o(1))R(n) \exp\left(-\sum_{i=1}^b \lambda_i\right). \tag{17}
 \end{aligned}$$

В силу (16) и (17) для доказательства (14) остается показать, что

$$I_{2n} = o(R(n)), \quad n \rightarrow \infty. \tag{18}$$

Согласно (13)

$$g(s) = \exp\left(-\sum_{i=1}^b \frac{m_i}{i!} \left(\frac{s}{e}\right)^i\right) = \exp\left(-\sum_{i=1}^b \lambda_i s^i\right) = \prod_{i=1}^b \sum_{k_i=0}^{\infty} (-1)^{k_i} \frac{s^{ik_i} \lambda_i^{k_i}}{k_i!}.$$

Поэтому

$$|q(n)| = |\text{coef}_{s^n} g(s)| \leq \sum_{k_1, \dots, k_b \geq 0, \sum_{i=1}^b ik_i = n} \prod_{i=1}^b \frac{\lambda_i^{k_i}}{k_i!}. \quad (19)$$

Мы имеем

$$n = \sum_{i=1}^b ik_i \leq \max_{i=1, \dots, b} k_i \sum_{i=1}^b i = \frac{b(b+1)}{2} \max_{i=1, \dots, b} k_i,$$

откуда

$$\max_{i=1, \dots, b} k_i \geq cn, \quad (20)$$

где $c = 2/(b(b+1))$. Далее, согласно (3) и (4)

$$\lambda_i = E\eta_i = \frac{m_i e^{-i}}{i!} = \frac{1}{i} \sum_{j \in \{i-k: k \in A(i)\}} \frac{i^j}{j!} e^{-i} < \frac{1}{i}. \quad (21)$$

Из (19), (20) и (21) следует, что

$$|q(n)| < \sum_{k_1, \dots, k_b \geq 0, \sum_{i=1}^b ik_i = n} \prod_{i=1}^b \frac{1}{i^{k_i} k_i!} \leq \frac{1}{[cn]!} \sum_{k_1, \dots, k_b \geq 0} \chi\left\{\sum_{i=1}^b ik_i = n\right\} \leq \frac{b^n}{[cn]!}, \quad (22)$$

где

$$\chi\left\{\sum_{i=1}^b ik_i = n\right\} = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i=1}^b ik_i = n, \\ 0, & \text{если } \sum_{i=1}^b ik_i \neq n. \end{cases}$$

Далее, согласно лемме 2 при фиксированном $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \sum_{k=[\sqrt{n}]+1}^m R(m-k)q(k) \leq \max_{k \geq [\sqrt{n}]} q(k) \sum_{k=[\sqrt{n}]+1}^m R(m-k) \leq \max_{k \geq [\sqrt{n}]} q(k) \sum_{i=1}^n R(i) \\ &= O(\max(nR(n), n^\varepsilon)) \cdot \max_{k \geq [\sqrt{n}]} q(k), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (23)$$

так как

$$\sum_{i=1}^n R(i) = \begin{cases} O(nR(n)), & \text{если } \beta > -1, \\ O(n^\varepsilon), & \text{если } \beta = -1, \\ O(1), & \text{если } \beta < -1, \end{cases}$$

при $n \rightarrow \infty$, где β – показатель правильно меняющейся функции $R(n)$ (это следует из свойства 1⁰ раздела 1.5 и теоремы 2.7 раздела 2.3 книги Е. Сенеты [32]). Из (22) и (23) получаем, что

$$I_{2n} = O(\max(nR(n), n^\varepsilon)) \frac{b\sqrt{n}}{[c\sqrt{n}]!} = o(R(n)), \quad n \rightarrow \infty,$$

так как функция

$$\varphi(n) = \frac{b^{\sqrt{n}}}{[c[\sqrt{n}]]!}$$

стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ быстрее произвольной правильно меняющейся функции, откуда убеждаемся в справедливости (17). Теорема 1 доказана.

В заключение автор благодарит рецензента за ценные замечания, которые позволили избежать в статье ряда неточностей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Н. Сачков, *Комбинаторные методы дискретной математики*, Наука, М., 1977.
- [2] В. Н. Сачков, *Вероятностные методы в комбинаторном анализе*, Наука, М., 1978.
- [3] В. Н. Сачков, *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*, МЦНМО, М., 2004.
- [4] E. A. Bender, "Asymptotic methods in enumeration", *SIAM Rev.*, **16**:4 (1974), 485–515.
- [5] Ю. В. Болотников, В. Н. Сачков, В. Е. Тараканов, "Асимптотическая нормальность некоторых величин, связанных с цикловой структурой случайных подстановок", *Матем. сб.*, **99**:1 (1976), 121–133.
- [6] Л. М. Волюнец, "Пример нестандартной асимптотики числа подстановок с ограничениями на длины циклов", *Вероятностные процессы и их приложения*, МИЭМ, М., 1989, 85–90.
- [7] A. A. Grusho, "Properties of random permutations with constraints on the maximum cycle length", *Probabilistic Methods in Discrete Mathematics*, Progr. Pure Appl. Discrete Math., **1**, VSP, Utrecht, 1993, 459–469.
- [8] Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев, "О случайных подстановках", *Труды по дискретной математике*, Т. 5, Физматлит, М., 2002, 73–92.
- [9] А. В. Колчин, "Уравнения, содержащие неизвестную подстановку", *Дискрет. матем.*, **6**:1 (1994), 100–115.
- [10] V. F. Kolchin, "The number of permutations with cycle lengths from a fixed set", *Random Graphs*, Vol. 2, Wiley, New York, 1992, 139–149.
- [11] F. Manstavičius, "On random permutations without cycles of some lengths", *Period. Math. Hung.*, **42**:1-2 (2001), 37–44.
- [12] М. П. Минеев, А. И. Павлов, "Об одном уравнении в подстановках", *Теория чисел, математический анализ и их приложения*, Тр. МИАН СССР, **142**, 1976, 182–194.
- [13] А. И. Павлов, "О двух классах подстановок с теоретико-числовыми ограничениями на длины циклов", *Матем. заметки*, **62**:6 (1997), 881–891.
- [14] А. Н. Тимашев, "Предельные теоремы в схемах размещений частиц по различным ячейкам с ограничениями на заполнения ячеек", *ТВП*, **49**:4 (2004), 712–725.
- [15] А. Л. Якимив, *Вероятностные приложения тауберовых теорем*, Физматлит, М., 2005.
- [16] В. Н. Сачков, "Отображения конечного множества с ограничениями на контуры и высоту", *ТВП*, **17**:4 (1972), 679–694.
- [17] В. Н. Сачков, "Случайные отображения ограниченной высоты", *ТВП*, **18**:1 (1973), 122–132.
- [18] Ю. Л. Павлов, *Случайные леса*, Карельский научный центр РАН, Петрозаводск, 1996.
- [19] В. Ф. Колчин, *Случайные отображения*, Теория вероятностей и математическая статистика, Наука, М., 1984.
- [20] В. Ф. Колчин, *Случайные графы*, Теория вероятностей и математическая статистика, Физматлит, М., 2000.

- [21] Ю. Л. Павлов, “Предельные теоремы для объемов деревьев непомеченного графа случайного отображения”, *Дискрет. матем.*, **16**:3 (2004), 63–75.
- [22] Б. А. Севастьянов, “Сходимость по распределению случайных отображений конечных множеств к ветвящимся процессам”, *Дискрет. матем.*, **17**:1 (2005), 18–21.
- [23] А. Н. Тимашев, “Случайные отображения конечных множеств с известным числом компонент”, *ТВП*, **48**:4 (2003), 818–828.
- [24] И. А. Чеплюкова, “Один случай предельного распределения числа циклических вершин в случайном отображении”, *Дискрет. матем.*, **16**:3 (2004), 76–84.
- [25] А. Г. Постников, *Введение в аналитическую теорию чисел*, Наука, М., 1971.
- [26] А. Л. Якимив, “О числе циклических точек случайного A -отображения”, *Дискрет. матем.*, **25**:3 (2013), 116–127.
- [27] R. Arratia, A. D. Barbour, S. Tavaré, *Logarithmic Combinatorial Structures: A Probabilistic Approach*, EMS Monogr. Math., European Math. Soc., Zürich, 2003.
- [28] R. J. Riddell Jr., G. E. Uhlenbeck, “On the theory of the virial development of the equation of state of mono-atomic gases”, *J. Chem. Phys.*, **21** (1953), 2056–2064.
- [29] L. Katz, “Probability of indecomposability of a random mapping function”, *Ann. Math. Statist.*, **26**:3 (1955), 512–517.
- [30] B. Bollobás, *Random Graphs*, Academic Press, London, 1985.
- [31] B. Bollobás, *Random Graphs*, Second edition, Cambridge Stud. Adv. Math., **73**, Cambridge University Press, 2001.
- [32] Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, Наука, М., 1985.

А. Л. Якимив

Математический институт им. В. А. Стеклова,

г. Москва

E-mail: arsen@mi.ras.ru

Поступило

11.06.2013

Исправленный вариант

27.10.2014