Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Н. Бояринов, О больших значениях функции $S(t)$ на коротких интервалах, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 4, 495–502

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9095>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 05:50:02

О больших значениях функции $S(t)$ на коротких интервалах

Р. Н. Бояринов

Доказывается теорема о верхней и нижней гранях аргумента $S(t)$ дзета-функции Римана на коротких интервалах критической прямой.

Библиография: 3 названия.

1. Введение. В работе [1] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1 (Королёв). Пусть

$$T > T_0 > 0, \quad (\ln T)(\ln \ln T)^{-3/2} < H < T.$$

Если гипотеза Римана верна, то справедливы неравенства

$$\sup_{T-H \leq t \leq T+2H} (\pm S(t)) \geq \frac{1}{90\pi} \sqrt{\frac{\ln H}{\ln \ln H}}.$$

Здесь $S(t)$ – аргумент дзета-функции Римана (см. [?]).

Настоящая работа посвящена доказательству подобного утверждения с еще меньшим значением H . Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Существует абсолютная положительная постоянная T_1 такая, что для любых вещественных чисел $T > T_1$ и $\sqrt{\ln \ln T} \leq H \leq (\ln T)(\ln \ln T)^{-3/2}$ при справедливости гипотезы Римана будут верны неравенства

$$\sup_{T-H \leq t \leq T+2H} (\pm S(t)) \geq \frac{1}{900} \frac{\sqrt{\ln H}}{\ln \ln H}.$$

2. Вспомогательные леммы. Справедливы следующие утверждения.

ЛЕММА 1. Пусть $\pi(n)$ – количество простых чисел, не превосходящих натурального числа $n \geq 2$. Тогда верны неравенства

$$\frac{n}{3 \ln(2n)} < \pi(2n) - \pi(n) < \ln 4 \frac{n}{\ln n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [2; с. 70].

ЛЕММА 2. Для любого $x \geq 2^{12}$ справедливы неравенства

$$\frac{\ln(6/5)}{6 \ln 2} \leq \sum_{x^{2/3} < p \leq x} \frac{1}{p}, \quad \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \leq 6 \ln \ln x. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится с помощью леммы 1.

ЛЕММА 3 (П. Л. Чебышев). Пусть натуральное $n \geq 2$. Тогда справедливы неравенства

$$\frac{2n}{3 \ln n} < \pi(n) < \frac{8n}{5 \ln n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [2; с. 65].

ЛЕММА 4. Пусть p_k – k -е простое число. Тогда для любого $k \geq 3$ справедливы неравенства

$$\frac{5k \ln k}{8} \leq p_k \leq 6k \ln k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится с помощью леммы 3.

ЛЕММА 5. Если верна гипотеза Римана, то для любого вещественного t такого, что $|t| \geq \exp(2^{87})$, справедливо неравенство $|S(t)| \leq 2 \ln |t|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим в приближенной формуле Сельберга [3; с. 61] $x = \sqrt{\ln |t|}$. Поскольку $\Lambda_x(n) \leq \ln n$, то

$$|S(t)| \leq \frac{1}{\pi} \sum_{2 \leq n \leq x^3} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\Lambda_x(n)}{\ln n} + 15(\sigma_{x,t} - 0.5) \left(\sum_{2 \leq n \leq x^3} \frac{\Lambda_x(n)}{\sqrt{n}} + \ln |t| \right) \leq 2 \ln |t|.$$

ЛЕММА 6. Пусть $H > 0$, $M > 0$, k – целое, $k \geq 1$, и пусть вещественная непрерывная функция $W(t)$ удовлетворяет условиям

$$\int_T^{T+H} (W(t))^{2k} dt \geq HM^{2k}, \quad \left| \int_T^{T+H} (W(t))^{2k+1} dt \right| \leq \frac{1}{2} HM^{2k+1}.$$

Тогда справедливы неравенства

$$\max_{T \leq t \leq T+H} W(t) \geq \frac{1}{2} M, \quad \min_{T \leq t \leq T+H} W(t) \leq -\frac{1}{2} M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [1; с. 117].

ЛЕММА 7. Если гипотеза Римана верна, то для любых вещественных чисел τ , T , H и t таких, что

$$\tau \geq 4, \quad T \geq T_0, \quad 0 < H \leq 0.5T, \quad T \leq t \leq T+H,$$

справедливо равенство

$$\int_{-H\tau/2}^{H\tau/2} e^{-v^2} S\left(t + \frac{2v}{\tau}\right) dv = W(t) + \theta 12 \left(\ln \tau + \exp\left(-\frac{H^2 \tau^2}{8}\right) \ln T \right),$$

где

$$W(t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{p \leq e^{\tau^2}} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \exp\left(-\frac{\ln^2 p}{\tau^2}\right), \quad |\theta| \leq 1, \quad A = \exp(2^{87}),$$

$$B = \sup_{|t| \leq A} |S(t)|, \quad T_0 = \max(2A; e^{B/2}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся [3; с. 69]. Пусть

$$f(u) = \exp\left(-\frac{\tau^2 u^2}{4}\right).$$

Тогда

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-ixu} du = \frac{2\sqrt{\pi}}{\tau} \exp\left(-\frac{x^2}{\tau^2}\right).$$

Если гипотеза Римана верна, то выполняется равенство

$$\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) S(t+u) du = -\frac{2\sqrt{\pi}}{\tau} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} \frac{\sin(t \ln n)}{\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{\ln^2 n}{\tau^2}\right) - 2\pi \operatorname{Im} \int_0^{1/2} f(-t - i\xi) d\xi.$$

При $0 \leq \xi \leq 1/2$, $\tau \geq 4$ и $t \geq 8$ верны неравенства

$$\left| \exp\left(-\frac{\tau^2(t + i\xi)^2}{4}\right) \right| \leq \frac{\ln \tau}{8\tau}.$$

Отсюда

$$\left| 2\pi \operatorname{Im} \int_0^{1/2} f(-t - i\xi) d\xi \right| \leq \frac{\pi \ln \tau}{4\tau} \leq \frac{0.8 \ln \tau}{\tau}.$$

Далее,

$$\frac{2\sqrt{\pi}}{\tau} \left| \sum_{n > e^{\tau^2}} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} \frac{\sin(t \ln n)}{\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{\ln^2 n}{\tau^2}\right) \right| \leq \frac{0.2 \ln \tau}{\tau}.$$

Используя неравенства из леммы 4, при $\tau \geq 4$ получим

$$\left| \sum_{k \geq 2} \sum_{n=p^k \leq e^{\tau^2}} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} \frac{\sin(t \ln n)}{\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{\ln^2 n}{\tau^2}\right) \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{p \leq e^{\tau^2/2}} \sum_{k \geq 2} p^{-k/2} \leq 24 \ln \tau.$$

Таким образом, исходная формула принимает вид

$$\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\tau^2 u^2}{4}\right) S(t+u) du = -\frac{2\sqrt{\pi}}{\tau} \sum_{p \leq e^{\tau^2}} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \exp\left(-\frac{\ln^2 p}{\tau^2}\right) + \theta \frac{70 \ln \tau}{\tau},$$

где $|\theta| \leq 1$, $\tau \geq 4$ и $t \geq 8$. Делая в интеграле замену $v = \tau u/2$ и сокращая обе части последнего равенства на $2\pi/\tau$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} S\left(t + \frac{2v}{\tau}\right) dv = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{p \leq e^{\tau^2}} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \exp\left(-\frac{\ln^2 p}{\tau^2}\right) + \theta 12 \ln \tau,$$

где $|\theta| \leq 1$, $\tau \geq 4$ и $t \geq 8$. Оценим интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{-H\tau/2} e^{-v^2} S\left(t + \frac{2v}{\tau}\right) dv = \frac{\tau}{2} \int_{-\infty}^{-H} e^{-\tau^2 u^2/4} S(t+u) du = I_1 + I_2,$$

$$I_1 = \frac{\tau}{2} \int_{-2T}^{-H} e^{-\tau^2 u^2/4} S(t+u) du, \quad I_2 = \frac{\tau}{2} \int_{-\infty}^{-2T} e^{-\tau^2 u^2/4} S(t+u) du.$$

Оценим I_1 . Так как $-2T \leq u \leq -H$, а $T \leq t \leq T+H$, то

$$-T \leq t - 2T \leq t + u \leq t - H \leq T.$$

Пусть

$$A = \exp(2^{87}), \quad B = \sup_{|y| \leq A} |S(y)|, \quad T_0 = \max(2A; e^{B/2}).$$

Тогда для любого $T \geq T_0$ верны неравенства (см. лемму 5)

$$B \leq 2 \ln T, \quad |S(y)| \leq 2 \ln |y| \leq 2 \ln T \quad \text{при} \quad A \leq |y| \leq T.$$

Отсюда при $|y| \leq T$ верно неравенство $|S(y)| \leq 2 \ln T$. Поэтому

$$|I_1| \leq \frac{\tau}{2} \int_{-2T}^{-H} e^{-\tau^2 u^2/4} |S(t+u)| du \leq \tau \ln T \int_{-2T}^{-H} e^{-\tau^2 u^2/4} du$$

$$\leq \tau \ln T e^{-\tau^2 H^2/8} \int_0^{+\infty} e^{-\tau^2 u^2/8} du = \sqrt{2\pi} \ln T e^{-\tau^2 H^2/8} \leq 3 \ln T e^{-\tau^2 H^2/8}.$$

Оценим I_2 . Так как $u \leq -2T$, $0 < H \leq 0.5T$, а $T \leq t \leq T+H$, то

$$t + u \leq t - 2T \leq -T + H \leq -0.5T.$$

Поэтому при $T \geq T_0$ верно $t + u \leq -0.5T \leq -0.5T_0 \leq -A$. Отсюда $|t + u| \geq A$ и верны неравенства

$$|S(t+u)| \leq 2 \ln |t+u| \leq 2 \ln(|t| + |u|).$$

Так как $t \leq T+H \leq 2T$, а $|u| \geq 2T$, то верны неравенства

$$|t| + |u| \leq 2T + |u| \leq 2|u| \leq u^2.$$

Отсюда $|S(t+u)| \leq 4 \ln |u|$. Поэтому

$$|I_2| \leq \frac{\tau}{2} \int_{-\infty}^{-2T} e^{-\tau^2 u^2/4} |S(t+u)| du \leq 2\tau \int_{-\infty}^{-2T} e^{-\tau^2 u^2/4} \ln |u| du$$

$$\leq 2\tau \int_{2T}^{+\infty} e^{-\tau^2 u^2/4} u du = \frac{4}{\tau} \int_{T^2\tau^2}^{+\infty} e^{-z} dz = \frac{4}{\tau} e^{-\tau^2 T^2} \leq \ln T e^{-\tau^2 H^2/8}.$$

Отсюда $|I| \leq |I_1| + |I_2| \leq 4 \ln T e^{-\tau^2 H^2/8}$. Оценим интеграл

$$J = \int_{H\tau/2}^{+\infty} e^{-v^2} S\left(t + \frac{2v}{\tau}\right) dv = \frac{\tau}{2} \int_H^{+\infty} e^{-\tau^2 u^2/4} S(t+u) du = J_1 + J_2,$$

$$J_1 = \frac{\tau}{2} \int_H^{2T} e^{-\tau^2 u^2/4} S(t+u) du, \quad J_2 = \frac{\tau}{2} \int_{2T}^{+\infty} e^{-\tau^2 u^2/4} S(t+u) du.$$

Оценим J_1 . Так как $H \leq u \leq 2T$, а $T \leq t \leq T + H$, то при $T \geq T_0$ имеем

$$2A \leq T_0 < T + H \leq t + u \leq T + H + 2T \leq 4T \leq T^2.$$

Поэтому $|S(t + u)| \leq 2 \ln |t + u| \leq 4 \ln T$. Отсюда

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq \frac{\tau}{2} \int_H^{2T} e^{-\tau^2 u^2/4} |S(t + u)| du \leq 2\tau \ln T \int_H^{2T} e^{-\tau^2 u^2/4} du \\ &\leq 2\tau \ln T e^{-\tau^2 H^2/8} \int_0^{+\infty} e^{-\tau^2 u^2/8} du = 2\sqrt{2\pi} \ln T e^{-\tau^2 H^2/8} \leq 6 \ln T e^{-\tau^2 H^2/8}. \end{aligned}$$

Оценим J_2 . Так как $u \geq 2T$, $0 < H \leq 0.5T$, а $T \leq t \leq T + H$, то

$$3T \leq t + 2T \leq t + u \leq 2T + u \leq 2u \leq u^2.$$

Поэтому при $T \geq T_0$ верны неравенства $|S(t + u)| \leq 2 \ln |t + u| \leq 4 \ln u$. Поэтому

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq \frac{\tau}{2} \int_{2T}^{+\infty} e^{-\tau^2 u^2/4} |S(t + u)| du \leq 2\tau \int_{2T}^{+\infty} e^{-\tau^2 u^2/4} \ln |u| du \\ &\leq 2\tau \int_{2T}^{+\infty} e^{-\tau^2 u^2/4} u du = \frac{4}{\tau} \int_{T^2\tau^2}^{+\infty} e^{-z} dz = \frac{4}{\tau} e^{-\tau^2 T^2} \leq \ln T e^{-\tau^2 H^2/8}. \end{aligned}$$

Отсюда $|J| \leq |J_1| + |J_2| \leq 7 \ln T e^{-\tau^2 H^2/8}$. Поэтому

$$|I + J| \leq |I| + |J| \leq 11 \ln T e^{-\tau^2 H^2/8} \leq 12 \ln T e^{-\tau^2 H^2/8}.$$

Отсюда

$$\int_{-H\tau/2}^{H\tau/2} e^{-v^2} S\left(t + \frac{2v}{\tau}\right) dv = W(t) + \theta 12 \left(\ln \tau + \exp\left(-\frac{H^2\tau^2}{8}\right) \ln T \right).$$

Лемма 7 доказана.

3. Доказательство теоремы. Пусть k – достаточно большое натуральное число, точное значение которого будет выбрано позже, $\tau \geq 4$ и

$$I_k = \int_T^{T+H} (W(t))^{2k} dt, \quad J_k = \int_T^{T+H} (W(t))^{2k+1} dt.$$

Представляем $W(t)$ в виде разности:

$$W(t) = \frac{V(t) - \bar{V}(t)}{2i\sqrt{\pi}}, \quad \text{где} \quad V(t) = \sum_{p \leq e^{\tau^2}} \frac{a(p)}{\sqrt{p}} p^{-it}, \quad a(p) = \exp\left(-\frac{\ln^2 p}{\tau^2}\right).$$

Далее,

$$\begin{aligned} I_k &= (2i\sqrt{\pi})^{-2k} \sum_{\nu=0}^{2k} (-1)^\nu \binom{2k}{\nu} j_{2k}(\nu), \\ J_k &= (2i\sqrt{\pi})^{-2k-1} \sum_{\nu=0}^{2k+1} (-1)^{\nu+1} \binom{2k+1}{\nu} j_{2k+1}(\nu), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} j_r(\nu) &= \int_T^{T+H} (V(t))^\nu (\bar{V}(t))^{r-\nu} dt \\ &= \sum_{p_1, \dots, p_\nu \leq e^{\tau^2}} \sum_{q_1, \dots, q_{r-\nu} \leq e^{\tau^2}} \frac{a(p_1) \cdots a(q_{r-\nu})}{\sqrt{p_1 \cdots q_{r-\nu}}} \int_T^{T+H} \left(\frac{q_1 \cdots q_{r-\nu}}{p_1 \cdots p_\nu} \right)^{it} dt. \end{aligned}$$

Из основной теоремы арифметики следует, что равенство $q_1 \cdots q_{r-\nu} = p_1 \cdots p_\nu$ возможно лишь в случае, когда $r = 2k$, $\nu = k$. В остальных случаях, полагая для краткости $Q = q_1 \cdots q_{r-\nu}$, $P = p_1 \cdots p_\nu$ и замечая, что $P, Q \leq e^{\tau^2}$, находим

$$\begin{aligned} |j_r(\nu)| &\leq 2 \sum_{P \neq Q} \frac{1}{\sqrt{PQ}} \left| \ln \frac{Q}{P} \right|^{-1} \leq 2 \sum_{P, Q} \frac{1}{\sqrt{PQ}} \max(P, Q) \\ &\leq 2e^{r\tau^2} \sum_{P, Q} \frac{1}{\sqrt{PQ}} \leq 2e^{r\tau^2} \left(\sum_{p \leq e^{\tau^2}} \frac{1}{\sqrt{p}} \right)^r \leq 2e^{r\tau^2} \left(\sum_{2 \leq n \leq e^{\tau^2}} \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^r \leq e^{1.6r\tau^2}, \end{aligned}$$

так как $\tau \geq 4$. В случае $r = 2k$ и $\nu = k$ получаем

$$j_{2k}(k) = H\Sigma + \theta 2 \sum_{P \neq Q} \frac{1}{\sqrt{PQ}} \left| \ln \frac{Q}{P} \right|^{-1} = H\Sigma + \theta e^{3.2k\tau^2},$$

где $|\theta| \leq 1$, а

$$\Sigma = \sum_{q_1 \cdots q_k = p_1 \cdots p_k} \frac{a(p_1) \cdots a(q_k)}{\sqrt{p_1 \cdots q_k}} = \sum_{q_1 \cdots q_k = p_1 \cdots p_k} \frac{a^2(p_1) \cdots a^2(p_k)}{p_1 \cdots p_k}.$$

Оставляя в последней сумме слагаемые, отвечающие наборам $(p_1, \dots, p_k)$, не содержащим повторений, придем к нижней оценке величины Σ . Зафиксируем набор $(p_1, \dots, p_k)$, в котором все числа $p_1, \dots, p_k$ различны. Тогда число решений уравнения $q_1 \cdots q_k = p_1 \cdots p_k$ в простых числах $q_1, \dots, q_k$ равно $k!$ и поэтому

$$\Sigma \geq k! \sum_{p_1 \leq e^{\tau^2}} \frac{a^2(p_1)}{p_1} \sum_{\substack{p_2 \leq e^{\tau^2} \\ p_2 \neq p_1}} \frac{a^2(p_2)}{p_2} \sum_{\substack{p_3 \leq e^{\tau^2} \\ p_3 \neq p_1, p_2}} \frac{a^2(p_3)}{p_3} \dots \sum_{\substack{p_k \leq e^{\tau^2} \\ p_k \neq p_1, p_2, \dots, p_{k-1}}} \frac{a^2(p_k)}{p_k}.$$

Величины $a^2(p)/p$ с ростом p монотонно убывают. Следовательно, при любых значениях $p_1, \dots, p_{k-1}$ сумма по p_k не меньше суммы величин $a^2(p)/p$ по простым $p \leq e^{\tau^2}$, из которой исключены слагаемые, отвечающие первым $k-1$ простым числам. Считая k и τ такими, что $(k-1)$ -е простое число не превосходит $6k \ln k$ при $k \geq 3$ (см. лемму 4) и $6k \ln k \leq e^{2\tau/3}$, убеждаемся, что сумма по p_k оценивается снизу величиной $\sum_{e^{2\tau/3} < p \leq e^{\tau^2}} a^2(p)/p$, которая не зависит от $p_1, \dots, p_{k-1}$. Таким образом, при $\tau \geq 9$ будет $e^\tau \geq 2^{12}$. Отсюда получим (см. лемму 2)

$$\begin{aligned} \Sigma &\geq k! \left(\sum_{e^{2\tau/3} < p \leq e^{\tau^2}} \frac{a^2(p)}{p} \right)^k \geq k! \left(\sum_{e^{2\tau/3} < p \leq e^\tau} \frac{a^2(p)}{p} \right)^k \\ &\geq \frac{k!}{e^{2k}} \left(\sum_{e^{2\tau/3} < p \leq e^\tau} \frac{1}{p} \right)^k \geq k! \left(\frac{\ln(6/5)}{6e^2 \ln 2} \right)^k \geq k! (0.0055)^k. \end{aligned}$$

Итак, $j_{2k}(k) \geq (0.0055)^k k! H - e^{3.2k\tau^2}$. Так как при любом натуральном k верно неравенство $(2k)!/k! \geq (3k/e)^k$, то

$$\begin{aligned} I_k &\geq (2\sqrt{\pi})^{-2k} \binom{2k}{k} (0.0055)^k k! H - e^{3.2k\tau^2} (2\sqrt{\pi})^{-2k} \sum_{\nu=0}^{2k} \binom{2k}{\nu} \\ &\geq (0.00045k)^k H - e^{5k\tau^2}, \\ |J_k| &\leq (2\sqrt{\pi})^{-2k-1} e^{1.6(2k+1)\tau^2} \sum_{\nu=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{\nu} \leq e^{5k\tau^2}. \end{aligned}$$

Пусть $H \geq \exp(2^{28})$. Положим

$$\tau = 2 \ln \ln H, \quad k = \left\lceil \frac{\ln H}{24(\ln \ln H)^2} \right\rceil.$$

Тогда

$$\begin{aligned} k &> \frac{\ln H}{24(\ln \ln H)^2} - 1 > \frac{2^{28}}{24(28 \ln 2)^2} - 1 > 10^4, \\ 6k \ln k &\leq \frac{\ln H}{4(\ln \ln H)^2} \ln \ln H < \ln H < (\ln H)^{4/3} = e^{2\tau/3}, \\ e^{5k\tau^2} &= e^{20k(\ln \ln H)^2} \leq e^{5(\ln H)/6} = H^{5/6}, \\ I_k &\geq (0.00045k)^k H - H^{5/6} \geq (0.0004k)^k H, \end{aligned}$$

так как

$$H^{1/6} (k10^{-4})^k ((4.5)^k - 4^k) > 1, \quad |J_k| \leq H^{5/6} \leq \frac{1}{2} (0.0004k)^k H.$$

Таким образом, для функции $W(t)$ выполнены условия леммы 6 при $M = 0.02\sqrt{k}$, $k = \lceil \ln H / (24(\ln \ln H)^2) \rceil$. Следовательно, на отрезке $T \leq t \leq T + H$ найдутся такие точки t_0 и t_1 , что

$$W(t_0) \geq \frac{1}{2} M, \quad W(t_1) \leq -\frac{1}{2} M,$$

где

$$\frac{1}{2} M = 0.01\sqrt{k} > 0.01 \sqrt{\frac{\ln H}{24(\ln \ln H)^2} - 1} > \frac{\sqrt{\ln H}}{500 \ln \ln H}.$$

Воспользуемся результатами леммы 7. Пусть $H \geq \exp(2^{68})$, $\tau = 2 \ln \ln H$, а $T \geq T_0$, где T_0 – постоянная из леммы 7. Тогда для t_0 и t_1 будут верны неравенства

$$\begin{aligned} j_0 &= \int_{-H\tau/2}^{H\tau/2} e^{-v^2} S\left(t_0 + \frac{2v}{\tau}\right) dv \geq \frac{\sqrt{\ln H}}{500 \ln \ln H} - 12 \left(\ln \tau + \exp\left(-\frac{H^2 \tau^2}{8}\right) \ln T \right), \\ j_1 &= \int_{-H\tau/2}^{H\tau/2} e^{-v^2} S\left(t_1 + \frac{2v}{\tau}\right) dv \leq -\frac{\sqrt{\ln H}}{500 \ln \ln H} + 12 \left(\ln \tau + \exp\left(-\frac{H^2 \tau^2}{8}\right) \ln T \right). \end{aligned}$$

Обозначая через M_0 и M_1 соответственно верхнюю и нижнюю грани функции $S(t)$ на отрезке $T - H \leq t \leq T + 2H$, находим

$$j_0 \leq M_0 \int_{-H\tau/2}^{H\tau/2} e^{-v^2} dv < M_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} dv = M_0 \sqrt{\pi},$$

$$j_1 \geq M_1 \int_{-H\tau/2}^{H\tau/2} e^{-v^2} dv > M_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} dv = M_1 \sqrt{\pi}.$$

Значит, при $r = 0$ и $r = 1$

$$\begin{aligned} (-1)^r M_r &> \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{\ln H}}{500 \ln \ln H} - 12(\ln \tau + e^{-H^2 \tau^2/8} \ln T) \right) \\ &= \frac{\sqrt{\ln H}}{500 \sqrt{\pi} \ln \ln H} \left(1 - \frac{2^{14} \ln \ln H \ln \ln \ln H}{\sqrt{\ln H}} - \frac{2^{13} \ln \ln H}{\sqrt{\ln H}} e^{-H^2 (\ln \ln H)^2/2} \ln T \right) \\ &\geq \frac{\sqrt{\ln H}}{900 \ln \ln H}, \end{aligned}$$

если

$$\frac{2^{14} \ln \ln H \ln \ln \ln H}{\sqrt{\ln H}} + \frac{2^{13} \ln \ln H}{\sqrt{\ln H}} e^{-H^2 (\ln \ln H)^2/2} \ln T \leq \frac{1}{90}.$$

Поэтому, при $H \geq \exp(2^{68})$

$$\frac{2^{14} \ln \ln H \ln \ln \ln H}{\sqrt{\ln H}} \leq \frac{2^{14} (\ln \ln H)^2}{\sqrt{\ln H}} \leq \frac{2^{14} (68 \ln 2)^2}{2^{34}} \leq \frac{2^{26}}{2^{34}} = \frac{1}{2^8}.$$

Пусть вещественное число T_1 удовлетворяет неравенствам

$$\begin{cases} T_1 \geq T_0, \\ \ln \ln T_1 \geq \exp(2^{69}). \end{cases}$$

Тогда для любого $T \geq T_1$ и любого $H > \sqrt{\ln \ln T}$ будут выполняться неравенства

$$\ln \ln H > 68 \ln 2 > 2, \quad e^{H^2 (\ln \ln H)^2/2} > \ln T.$$

Поэтому

$$\frac{2^{13} \ln \ln H}{\sqrt{\ln H}} e^{-H^2 (\ln \ln H)^2/2} \ln T \leq \frac{2^{13} \ln \ln H}{\sqrt{\ln H}} \leq \frac{1}{2^8}.$$

Следовательно,

$$\frac{2^{14} \ln \ln H \ln \ln \ln H}{\sqrt{\ln H}} + \frac{2^{13} \ln \ln H}{\sqrt{\ln H}} e^{-H^2 (\ln \ln H)^2/2} \ln T < \frac{1}{90}.$$

Теорема 2 полностью доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. А. Королёв, “О больших значениях функции $S(t)$ на коротких промежутках”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:1 (2005), 115–124.
- [2] Э. Трост, *Простые числа*, Физматгиз, М., 1959.
- [3] А. А. Карацуба, М. А. Королев, “Аргумент дзета-функции Римана”, *УМН*, **60**:3 (2005), 41–96.

Р. Н. Бояринов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: roma_boyarin@yahoo.com

Поступило

28.12.2009