Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Чеботарев, Т. В. Тлячев, А. А. Радионов, Сжатые состояния и их применение в задачах квантовой эволюции, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 4, 614–634

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9096>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 09:56:51

Сжатые состояния и их применение в задачах квантовой эволюции

А. М. Чеботарев, Т. В. Тлячев, А. А. Радионов

Рассматриваются задачи, допускающие точные решения с помощью методов вторичного квантования. Обосновано многомерное обобщение формулы Н. Н. Боголюбова, являющейся важным частным случаем формулы Бейкера–Хаусдорфа. Вычислено скалярное произведение многомерных сжатых состояний, что позволяет строить ортонормированные системы, порождаемые линейными комбинациями сжатых состояний.

Обосновано представление решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера в виде корректно определенного континуального интеграла, описывающего движение заряженной частицы в скрещенных (E, H) -полях, наложенных на периодическое электрическое поле. Показано, что эволюция сжатых состояний происходит по компактным одномерным орбитам матриц сжатий, а эволюция сдвигов описывается марковским скачкообразным случайным процессом, связанным с потенциалом периодической компоненты поля.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. Методы некоммутативного анализа применяются в современной теоретической физике для классификации уравнений с точки зрения симметрии физических систем, построения точных решений и обоснования численных и асимптотических приближений. Ряд задач некоммутативной квантовой динамики состояний и наблюдаемых был успешно решен с использованием теории сжатых состояний [1]–[7]. В настоящей работе рассматриваются математические задачи квантовой динамики во внешних полях, допускающие точные решения с помощью методов вторичного квантования [8], [9]. Основные результаты данной работы состоят в многомерном обобщении формулы Н. Н. Боголюбова (лемма 2, важный частный случай формулы Бейкера–Хаусдорфа), вычислении скалярного произведения сжатых состояний (теорема 3) и средних значений наблюдаемых в сжатых состояниях (теорема 4).

Используя представление решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера в виде корректно определенного континуального интеграла, мы показываем, что эволюция сжатых состояний происходит по компактным одномерным орбитам матриц сжатий, а эволюция сдвигов описывается подчиненным марковским скачкообразным случайным процессом (теорема 5). Полученные результаты используются для описания динамики частиц в скрещенных электрических и магнитных полях.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФНБИК (грант № 2.1.1/4540).

2. Канонические преобразования. Обозначим через $a^\dagger = \{a_1^\dagger, \dots, a_n^\dagger\}$, $a = \{a_1, \dots, a_n\}$ n -частичные операторы рождения-уничтожения со стандартными каноническими коммутационными соотношениями, $\langle f, g \rangle$ – полуторалинейная форма в гильбертовом пространстве, $(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ – билинейная форма в $\mathbb{C}^n$. Черта $\bar{z} \in \mathbb{C}$ означает комплексное сопряжение, а звездочка A^* – эрмитово сопряжение. Индекс M^T у матрицы означает транспонирование.

Пусть $\mathcal{H} = \bigotimes_1^n \ell_2$ – гильбертово пространство со скалярным произведением, заданным на “простых” элементах

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} = \prod_{k=1}^n \bar{\lambda}_k \mu_k \langle f_k, g_k \rangle_{\ell_2},$$

$$f = \bigotimes_{k=1}^n \lambda_k f_k, \quad g = \bigotimes_{k=1}^n \mu_k g_k \in \mathcal{H}, \quad f_k, g_k \in \ell_2, \quad \lambda_k, \mu_k \in \mathbb{C}.$$

Обозначим через U_t семейство унитарных операторов в $\mathcal{H}$ и $a_t \stackrel{\text{def}}{=} U_t a U_t^*$, $a_t^\dagger \stackrel{\text{def}}{=} U_t a^\dagger U_t^*$ – семейство операторов, удовлетворяющих каноническим коммутационным соотношениям $[(a_t)_k, (a_t^\dagger)_j] = \delta_{k,j}$. Пусть $A = A^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ – симметричная $(n \times n)$ -матрица, $A = U_A |A|$ – ее полярное разложение. Рассмотрим многомерные канонические преобразования, для которых $U_t = S_{At} \stackrel{\text{def}}{=} e^{-((a^\dagger, Aa^\dagger)/2 - (a, \bar{A}a)/2)t}$ – унитарный оператор, называемый *оператором сжатия*.

ЛЕММА 1. Операторы $a_t = S_{At} a S_{At}^*$ и $a_t^\dagger = S_{At} a^\dagger S_{At}^*$ удовлетворяют системе

$$\dot{a}_t = A a_t^\dagger, \quad \dot{a}_t^\dagger = \bar{A} a_t. \quad (2.1)$$

Разрешающий оператор системы (2.1) имеет вид канонического преобразования

$$\begin{pmatrix} a_t \\ a_t^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_A(t) & \Psi_A(t) \\ \bar{\Psi}_A(t) & \bar{\Phi}_A(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_A(t)a + \Psi_A(t)a^\dagger \\ \bar{\Phi}_A(t)a^\dagger + \bar{\Psi}_A(t)a \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

с матричными коэффициентами

$$\Phi_A(t) \stackrel{\text{def}}{=} U_A \cosh |A|t U_A^* = \Phi_A^*(t), \quad \Psi_A(t) \stackrel{\text{def}}{=} U_A \sinh |A|t = \Psi_A^T(t), \quad (2.3)$$

причем $\bar{\Phi}_A(t) = \cosh |A|t$, $\bar{\Psi}_A(t) = \sinh |A|t U_A^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если оператор A имеет ограниченный обратный, то $\bar{A}$ также имеет ограниченный обратный и можно убедиться, что операторы

$$\begin{aligned} a_t &= (\cosh(A\bar{A})^{1/2}t)a + \bar{A}^{-1}(\bar{A}A)^{1/2}(\sinh(\bar{A}A)^{1/2}t)a^\dagger, \\ a_t^\dagger &= (\cosh(\bar{A}A)^{1/2}t)a^\dagger + A^{-1}(A\bar{A})^{1/2}(\sinh(A\bar{A})^{1/2}t)a \end{aligned} \quad (2.4)$$

удовлетворяют системе (2.1). Поскольку $A = A^T$, то $\bar{A} = A^*$ и

$$A = U_A |A| = U_A (\bar{A}A)^{1/2}, \quad \bar{A} = \bar{U}_A (A\bar{A})^{1/2} = A^* = (\bar{A}A)^{1/2} U_A^*.$$

Поэтому $A\bar{A} = U_A \bar{A} A U_A^*$, $(A\bar{A})^n = U_A (\bar{A}A)^n U_A^*$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \cosh(A\bar{A})^{1/2}t &= U_A (\cosh |A|t) U_A^* = \Phi_A(t), & \cosh(\bar{A}A)^{1/2}t &= \cosh |A|t = \bar{\Phi}_A(t), \\ \bar{A}^{-1} &= (A^*)^{-1} = U_A |A|^{-1}, & \bar{A}^{-1}(\bar{A}A)^{1/2}(\sinh(\bar{A}A)^{1/2}t) &= U_A \sinh(|A|t) = \Psi_A(t), \\ A^{-1} &= |A|^{-1} U_A^*, & A^{-1}(A\bar{A})^{1/2}(\sinh(A\bar{A})^{1/2}t) &= (\sinh |A|t) U_A^* = \bar{\Psi}_A(t). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Отсюда следует эквивалентность (2.3) и (2.5) в случае обратимого оператора A . Полезно заметить, что из тождества $-A = -U_A|A|$ следует, что $U_{-A} = -U_A$.

Эрмитовость и неотрицательность матрицы $\Phi_A(t) = U_A(\cosh|A|t)U_A^*$ очевидны, поэтому Φ_A имеет спектральное разложение $\Phi_A = \sum_k \lambda_k \bar{\xi}_k \otimes \xi_k$, $\lambda_k \geq 0$. Симметричность матриц вида $\bar{A}^{-1}(\bar{A}A)^n$ вытекает из симметричности матрицы A и равенства

$$\bar{A}^{-1}(\bar{A}A)^n = (A\bar{A})^n \bar{A}^{-1} = (\bar{A}^{-1}(\bar{A}A)^n)^T.$$

Поскольку $\Psi_A(t) = \bar{A}^{-1}(\bar{A}A)^{1/2}(\sinh(\bar{A}A)^{1/2}t)$ – линейная комбинация таких матриц (см. (2.4)), то $\Psi_A(t) = \Psi_A^T(t)$. Ее собственные векторы ортогональны в пространстве $\mathbb{C}^n$ с билинейной формой: $\Psi_A = \sum_k \mu_k \chi_k \otimes \chi_k$, $\mu_k \in \mathbb{C}$.

Если оператор A имеет нетривиальное ядро $\ker A \supset \{0\}$, то, заменяя A в системе (2.1) ограниченно обратимым оператором $A_\epsilon = U(|A| + \epsilon I)$, $\epsilon > 0$, получаем решение в виде (2.4) с обратимым оператором A_ϵ вместо A . Поскольку решения эволюционного уравнения с ограниченным генератором непрерывны по параметру ϵ по норме, решение предельного уравнения в случае $\epsilon = 0$, совпадает с пределом решений (2.2) при $\epsilon \rightarrow 0$. Таким образом, формулы (2.3) остаются верными, если A имеет нетривиальное ядро.

Для унитарных операторов вида

$$U_{A,C} = e^{-(a^\dagger, Aa^\dagger)/2 + (a, \bar{A}a)/2 + i(a^\dagger, Ca)}, \quad A = A^T, \quad C = C^*,$$

не являющихся сжатиями, преобразования

$$a \rightarrow \tilde{a} = U_{A,C} a U_{A,C}^*, \quad a^\dagger \rightarrow \tilde{a}^\dagger = U_{A,C} a^\dagger U_{A,C}^*$$

остаются, очевидно, каноническими преобразованиями, сохраняющими канонические коммутационные соотношения:

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{a}^\dagger \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} U_{A,C} \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix} U_{A,C}^* = \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Из определения (2.6) и коммутационных соотношений для $\tilde{a}$, $\tilde{a}^\dagger$ выводятся соотношения $\Phi\Phi^* - \Psi\Psi^* = I$, $\Phi\Psi^T - \Psi\Phi^T = 0$ и соответствующие им комплексно сопряженные равенства¹. Все четыре соотношения можно записать в виде тождества

$$\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi^* & -\Psi^T \\ -\Psi^* & \Phi^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку в алгебре матриц левый и правый обратные элементы совпадают, то

$$\begin{pmatrix} \Phi^* & -\Psi^T \\ -\Psi^* & \Phi^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеют место шесть равенств, справедливых при $C \neq 0$:

$$\begin{aligned} \Phi\Phi^* - \Psi\Psi^* &= \bar{\Phi}\Phi^T - \bar{\Psi}\Psi^T = \Phi^*\Phi - \Psi^T\bar{\Psi} = \Phi^T\bar{\Phi} - \Psi^*\Psi = I, \\ \Phi\Psi^T - \Psi\Phi^T &= \bar{\Phi}\Psi^* - \bar{\Psi}\Phi^* = \Phi^*\Psi - \Psi^T\bar{\Phi} = \Phi^T\bar{\Psi} - \Psi^*\Phi = 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

¹Матрицы Φ , Ψ через элементарные функции в общем случае выразить невозможно.

причем $\Phi^* = \Phi$, $\Phi^T = \bar{\Phi}$, $\Psi^T = \Psi$ в случае $C = 0$. Из первого равенства следует, что $\Phi \geq I$, так что существует Φ^{-1} , а из второго – что операторы вида $R = \Phi^{-1}\Psi$ в общем случае симметричны, поэтому

$$R = R^T, \quad \bar{R} = R^*, \quad I - RR^* = I - \Phi^{-1}\Psi(\Phi^{-1}\Psi)^* = |\Phi|^{-2}, \\ \det(I - |R|^2) = \det|\Phi|^{-2}.$$

Нетрудно убедиться, что композиция канонических преобразований, соответствующих матрицам $\{\Phi_k, \Psi_k\}_{k=1}^2$, является каноническим преобразованием и матрицы

$$\Phi = \Phi_1\Phi_2 \pm \Psi_1\bar{\Psi}_2, \quad \Psi = \Phi_1\Psi_2 \pm \Psi_1\bar{\Phi}_2$$

удовлетворяют соотношениям (2.7). Матрица Φ не обязана быть эрмитовой, а Ψ – симметричной, даже если этими свойствами обладали $\{\Phi_k, \Psi_k\}_{k=1}^2$. Отсюда следует, что композиция сжатий, вообще говоря, не является сжатием. Примеры, связанные с динамикой частиц в магнитном поле, рассматриваются в п. 7.

Из формул (2.2) следует, что сжатые состояния принадлежат области определения полинома $P_n(a^\dagger, a)$ любой конечной степени n от операторов рождения-уничтожения, так как образ

$$P_{2n}^A(a^\dagger, a) \stackrel{\text{def}}{=} S_A^* P_n^*(a^\dagger, a) P_n(a^\dagger, a) S_A$$

является полиномом степени $2n$, т.е. наблюдаемой, корректно определенной на вакуумном состоянии $|0\rangle\langle 0|$.

Пусть $S_A = e^{-(1/2)((a^\dagger, Aa^\dagger) - (a, \bar{A}a))}$ – оператор сжатия, $T_g = e^{(a^\dagger, g) - (a, \bar{g})}$ – оператор сдвига, $|g\rangle = \bigotimes_k |g_k\rangle = T_g|0\rangle$ – когерентное состояние, а $|g, A\rangle \stackrel{\text{def}}{=} T_g S_A|0\rangle$ – сжатое состояние. При этом $T_{-g} a T_g = a + g$, а формулы (2.2) позволяют выразить среднее и дисперсию операторов координаты и импульса через параметры сжатого состояния:

$$\langle a \rangle_{g,A} \stackrel{\text{def}}{=} \langle g, A | a | g, A \rangle = g, \quad \langle a^\dagger \rangle_{g,A} \stackrel{\text{def}}{=} \langle g, A | a^\dagger | g, A \rangle = \bar{g}, \\ \langle \hat{x} \rangle_{g,A} \stackrel{\text{def}}{=} \langle g, A | \hat{x} | g, A \rangle = \sqrt{2} \operatorname{Re} g, \quad \langle \hat{p} \rangle_{g,A} \stackrel{\text{def}}{=} \langle g, A | \hat{p} | g, A \rangle = \sqrt{2} \operatorname{Im} g, \quad (2.8)$$

где $\hat{x} = (a + a^\dagger)/\sqrt{2}$, $\hat{p} = (a - a^\dagger)/i\sqrt{2}$, что объясняет смысл сдвига $g \in \mathbb{C}^n$. Учитывая, что $\Phi_A = \Phi_A^*$ и $\Psi_A = \Psi_A^T$, нетрудно вычислить ковариационные матрицы

$$\langle \hat{x} \otimes \hat{x} \rangle_{g,A} = \frac{1}{2}(\Phi_A - \Psi_A)^*(\Phi_A - \Psi_A) + 2 \operatorname{Re} g \otimes \operatorname{Re} g, \\ \langle \hat{p} \otimes \hat{p} \rangle_{g,A} = \frac{1}{2}(\Phi_A + \Psi_A)^*(\Phi_A + \Psi_A) + 2 \operatorname{Im} g \otimes \operatorname{Im} g, \\ \langle \hat{x} \otimes \hat{p} \rangle_{g,A} = \frac{1}{2i}(\Psi_A - \Phi_A)^*(\Psi_A + \Phi_A) + 2 \operatorname{Re} g \otimes \operatorname{Im} g, \\ \langle \hat{p} \otimes \hat{x} \rangle_{g,A} = \frac{1}{2i}(\Phi_A + \Psi_A)^*(\Phi_A - \Psi_A) + 2 \operatorname{Im} g \otimes \operatorname{Re} g. \quad (2.9)$$

Величины $1 + \operatorname{Tr} \langle \hat{x} \otimes \hat{x} \rangle_{g,A}$ и $1 + \operatorname{Tr} \langle \hat{p} \otimes \hat{p} \rangle_{g,A}$ являются $W_2^1(\mathbb{R}^n)$ -нормами сжатых состояний в импульсном и координатном представлениях. Этот факт важен для упорядочения по гладкости элементов линейной оболочки множества сжатых состояний.

Сжатое состояние может быть задано различными способами. Например, используя лемму 1, можно двумя способами прокоммутировать сжатие и сдвиг (см. [5]):

$$\begin{aligned} |g, A\rangle &= T_g S_A |0\rangle = S_A S_A^* T_g S_A |0\rangle = S_A T_f |0\rangle \stackrel{\text{def}}{=} |A, f\rangle, \\ f &= \Phi_A^* g + \Psi_A^T \bar{g} = \Phi_A g + \Psi_A \bar{g}, \\ |g, A\rangle &= T_g S_A T_{-g} T_g |0\rangle = e^{-(1/2)((a^\dagger - \bar{g}, Aa^\dagger - \bar{g}) - (a - g, \bar{A}a - g))} T_g |0\rangle. \end{aligned}$$

Полезными оказываются тождества

$$|g, A\rangle = |A, \Phi_A g + \Psi_A \bar{g}\rangle, \quad |\Phi_A \xi - \Psi_A \bar{\xi}, A\rangle = |A, \xi\rangle$$

и представление, в котором сжатие факторизуется по формуле Киржница–Боголюбова [8], что упрощает вычисление нормального символа сжатия в п. 4 настоящей статьи. Далее мы рассмотрим многомерное обобщение формулы факторизации оператора сжатия, которая позволяет связать различные представления сжатых состояний.

3. Нормальный символ оператора сжатия. Пусть $A = A^T = U_A |A|$ – симметричная матрица и S_A – унитарное сжатие. Обозначим $\Phi = \Phi_A(1)$, $\Psi = \Psi_A(1)$ (см. формулы (2.3)). Утверждение следующей леммы можно рассматривать как вариант формулы Бейкера–Хаусдорфа $e^{V+W} = e^X e^Y e^Z$.

ЛЕММА 2 (о факторизации сжатий). Пусть $S_A \stackrel{\text{def}}{=} e^{-(1/2)(a^\dagger, Aa^\dagger) + (1/2)(a, \bar{A}a)}$ – оператор сжатия. Тогда

$$S_A = e^{-(1/2)(a^\dagger, Ra^\dagger)} e^{(a^\dagger, Ca)} e^{(1/2)(a, \bar{R}a)} e^S = e^{-(1/2)(a^\dagger, Ra^\dagger)} : e^{(a^\dagger, (\Phi^{-1} - I)a)} : e^{(1/2)(a, \bar{R}a)} e^s, \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi &= U_A \cosh |A| U_A^*, \quad R = U_A \operatorname{th} |A| = \Phi^{-1} \Psi = R^T, \quad C = \ln \Phi^{-1} = C^*, \\ s &= -\frac{1}{2} \operatorname{Tr} \ln \cosh |A| = \operatorname{Tr} \ln \Phi^{-1/2} = -\sum_k \ln \sqrt{\cosh \lambda_k}, \end{aligned}$$

где $\{\lambda_k^2\}$ – спектр матрицы $A^*A > 0$, а скобки $:$: устанавливают нормальный порядок операторов рождения-уничтожения. Нормальный символ оператора сжатия равен

$$\operatorname{Symb} S_A(\bar{\xi}, \chi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\langle \xi | S_A | \chi \rangle}{\langle \xi | \chi \rangle} = \frac{1}{\sqrt{\det \Phi}} e^{-(1/2)(\bar{\xi}, R\bar{\xi}) + (\bar{\xi}, (\Phi^{-1} - I)\chi) + (1/2)(\chi, \bar{R}\chi)}. \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одномерном случае наше утверждение совпадает с известным результатом (см. [8; (Б.9), (Б.10)] или [5; 3.5.10]), где унитарные обкладки в формуле для Φ пропадают, так как становятся скалярными множителями и сокращаются.

Рассмотрим производную параметризованного семейства экспонент (3.1):

$$\begin{aligned} 2 \frac{d}{dt} e^{-(1/2)(a^\dagger, Aa^\dagger)t + (1/2)(a, \bar{A}a)t} \\ = -(a^\dagger, Aa^\dagger) + (a, \bar{A}a) e^{-(1/2)(a^\dagger, Aa^\dagger)t + (1/2)(a, \bar{A}a)t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -(a^\dagger, \dot{R}_t a^\dagger) e^{-(1/2)(a^\dagger, R_t a^\dagger)} e^{(a^\dagger, C_t a)} e^{(1/2)(a, \bar{R}_t a)} e^{s_t} \\
&\quad + e^{-(1/2)(a^\dagger, R_t a^\dagger)} e^{(a^\dagger, C_t a)} (a, \bar{R}_t a) e^{(1/2)(a, \bar{R}_t a)} e^{s_t} \\
&\quad + 2e^{-(1/2)(a^\dagger, R_t a^\dagger)} ((a^\dagger, \dot{C}_t a) + \dot{s}_t) e^{(a^\dagger, C_t a)} e^{(1/2)(a, \bar{R}_t a)} e^{s_t}. \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Используя коммутационные соотношения для симметричных операторов R

$$\begin{aligned}
[(a^\dagger, \dot{C}a), (a^\dagger, Ra^\dagger)] &= \sum a_\alpha^\dagger a_j^\dagger \dot{C}_{\alpha, \beta} (R_{\beta, j} + R_{\beta, j}^T) = 2(a^\dagger, \dot{C}Ra^\dagger), \\
[(a^\dagger, Ca), (a, \bar{R}a)] &= -\sum a_\alpha a_j C_{\alpha, j} (\bar{R}_{\alpha, k} + \bar{R}_{k, \alpha}) = -(a, (C^T \bar{R} + \bar{R}C)a), \\
[(a, \bar{R}a), (a^\dagger, Ra^\dagger)] &= 2 \sum a_j^\dagger a_\alpha (R_{k, j} + R_{k, j}^T) \bar{R}_{\alpha, k} + 2 \sum R_{k, j} \bar{R}_{j, k} \\
&= 4(a^\dagger, R\bar{R}a) + 2 \operatorname{Tr} R\bar{R},
\end{aligned}$$

нетрудно получить замкнутую систему формул выпутывания для операторов R_t :

$$\begin{aligned}
e^{(a^\dagger, C_t a)} (a, \bar{R}_t a) e^{-(a^\dagger, C_t a)} &= (a, e^{-C_t^T} \bar{R}_t e^{-C_t} a), \\
e^{-(\tau/2)(a^\dagger, R_t a^\dagger)} (a^\dagger, \dot{C}_t a) e^{(\tau/2)(a^\dagger, R_t a^\dagger)} &= (a^\dagger, \dot{C}_t a) + \tau(a^\dagger, \dot{C}_t R_t a^\dagger), \\
\frac{d}{d\tau} e^{-(\tau/2)(a^\dagger, R_t a^\dagger)} (a, \bar{R}_t a) e^{(\tau/2)(a^\dagger, R_t a^\dagger)} \\
&= \operatorname{Tr} R_t \bar{R}_t + 2e^{-(\tau/2)(a^\dagger, R_t a^\dagger)} (a^\dagger, R_t \bar{R}_t a) e^{(\tau/2)(a^\dagger, R_t a^\dagger)} \\
&= \operatorname{Tr} R_t \bar{R}_t + 2(a^\dagger, R_t \bar{R}_t a) + 2\tau(a^\dagger, R_t \bar{R}_t R_t a^\dagger), \\
e^{-(1/2)(a^\dagger, R_t a^\dagger)} (a, \bar{R}_t a) e^{(1/2)(a^\dagger, R_t a^\dagger)} \\
&= (a, \bar{R}_t a) + \operatorname{Tr} R_t \bar{R}_t + 2(a^\dagger, R_t \bar{R}_t a) + (a^\dagger, R_t \bar{R}_t R_t a^\dagger).
\end{aligned}$$

Подставляя в правую часть (3.3) коммутационные соотношения и собирая матрицы билинейных форм операторов рождения-уничтожения одного и того же типа, получим замкнутую систему нелинейных уравнений относительно R_t , C_t и s_t :

$$\begin{aligned}
-A &= -\dot{R}_t + 2\dot{C}_t R_t + R_t e^{-C_t^T} \bar{R}_t e^{-C_t} R_t, & \bar{A} &= e^{-C_t^T} \bar{R}_t e^{-C_t}, \\
\dot{C}_t + R_t e^{-C_t^T} \bar{R}_t e^{-C_t} &= 0, & 2\dot{s}_t + \operatorname{Tr} R_t e^{-C_t^T} \bar{R}_t e^{-C_t} &= 0,
\end{aligned} \quad (3.4)$$

которая расщепляется на независимые уравнения с нулевыми начальными условиями:

$$\begin{aligned}
\bar{A}\dot{R}_t &= \bar{A}A - \bar{A}R_t \bar{A}R_t, & \dot{C}_t &= -R_t \bar{A}, & \dot{s}_t &= -\frac{1}{2} \operatorname{Tr} R_t \bar{A}; \\
R_0 &= C_0 = 0, & s_0 &= 0.
\end{aligned}$$

Первое уравнение удобно решить в базисе, диагонализующем неотрицательный эрмитов оператор $\bar{A}A = A^*A = \sum_k \lambda_k^2 \hat{\pi}_k > 0$, где $\lambda_k^2 > 0$ – его собственные значения, а $\hat{\pi}_k$ – ортогональные проекторы на собственные векторы. Если оператор A вырожден, то доказательство проводится для регуляризованного обратимого оператора $A_\epsilon = U_A(|A| + \epsilon I)$, $\epsilon > 0$. Затем, так же, как и при доказательстве леммы 1, переходя по непрерывности к пределу при $\epsilon \rightarrow 0$. Операция обращения оператора $\bar{A} = |A|U_A^*$ используется ниже для вычисления оператора R .

Пусть O – ортогональная матрица, диагонализующая оператор A^*A : $O^*A^*AO = \Lambda$, Λ – диагональная вещественная матрица, состоящая из неотрицательных собственных значений $\{\lambda_k^2\}$ оператора A^*A . Полученная система $O^*\bar{A}\dot{R}_tO \stackrel{\text{def}}{=} \dot{r}(t) = \Lambda - r(t)^2$ состоит из незацепляющихся скалярных уравнений Риккати $\dot{r}_k(t) = \lambda_k^2 - r_k^2(t)$, $r_k(0) = 0$. Поэтому $r_k(t) = \lambda_k \operatorname{th} t \lambda_k$. Из равенства $\bar{A} = A^* = |A|U_A^*$ и спектрального представления функций от самосопряженного оператора следуют формулы для факторизации сжатия (3.1):

$$\begin{aligned} \bar{A}R_t &= \sum_k \lambda_k \operatorname{th}(t\lambda_k) \hat{\pi}_k = |A| \operatorname{th} |A|t, & R &= R_t|_{t=1} = U_A \operatorname{th} |A|, \\ C &= C_t|_{t=1} = -U_A \int_0^1 \operatorname{th} |A|\tau d\tau |A|U_A^* = -U_A \ln \cosh |A|U_A^* = -\ln \cosh(AA^*)^{1/2}, \\ s_t|_{t=1} &= -\frac{1}{2} \operatorname{Tr} \ln \cosh |A|, \\ e^{(a^\dagger, Ca)} &= : e^{(a^\dagger, U_A(\operatorname{sech} |A| - I)U_A^* a)} :, & e^s &= \frac{1}{\sqrt{\det \cosh |A|}}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $\operatorname{sech} x = (\cosh x)^{-1}$, $U_A \operatorname{sech} |A|U_A^* = \Phi_A^{-1}$, а $: f(a^\dagger, a) :$ – операция нормального упорядочения. При выводе (3.5) использовались известные соотношения (см. [9]):

$$e^{\operatorname{Tr} \ln C} = \det C, \quad e^{(a^\dagger, Ca)} = : e^{(a^\dagger, (e^C - I) a)} :$$

Для симметричных матриц $A = A^T = U_A|A|$ эрмитовость C очевидна из (3.5), а симметричность R следует из симметричности матриц $A(\bar{A}A)^n$, через линейную комбинацию которых можно выразить

$$U_A \operatorname{th} |A| = A(\bar{A}A)^{-1/2} \sum_0^\infty c_n (\bar{A}A)^{n+1/2}.$$

Действительно, $(A(A\bar{A})^n)^T = (A\bar{A})^n A = A(\bar{A}A)^n$. Поскольку операторы A и $\bar{A} = A^*$ симметричны, то из (3.5) следует, что

$$C^T = -\ln \left(\sum_n \frac{(AA^*)^n}{2n!} \right)^T = -\ln \sum_n \frac{(A^*A)^n}{2n!} = -\ln \cosh |A|.$$

Поэтому избыточное уравнение $\bar{A} = e^{-C^T} \bar{R} e^{-C}$ (второе уравнение в системе (3.4)) согласуется с полученными выражениями для R и C . Действительно, подставляя полученное решение (3.5) в уравнения $\dot{R} = A - R\bar{A}R$, имеем

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \overline{U_A |A| (\cosh |A|)^{-2}} = |A| (\cosh |A|)^{-2} U_A^*, \\ e^{-C} &= U_A \cosh |A| U_A^*, & e^{-C^T} &= \cosh |A|. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$e^{-C^T} \bar{R} e^{-C} = \cosh |A| \cdot |A| (\cosh |A|)^{-2} U_A^* U_A \cosh |A| U_A^* = \bar{A}.$$

Нормированные векторы

$$ce^{-(1/2)(a^\dagger, Ra^\dagger) + (a^\dagger, f)}|0\rangle, \quad c \in \mathbb{C}, \quad \|R\| < 1,$$

будем называть *приведенной формой сжатого состояния* или просто *приведенным сжатым состоянием*, а R и f – приведенными параметрами сжатия и сдвига соответственно. Как мы увидим, использование параметров обоих представлений сжатого состояния упрощает формулировки некоторых результатов. Например, из формулы (3.1) вытекают следующие соотношения между параметрами сжатого состояния и его приведенной формы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $R = U_A \operatorname{th} |A| = \Phi^{-1}\Psi$, $f \stackrel{\text{def}}{=} g + R\bar{g}$. Тогда

$$|g, A\rangle = ce^{-(1/2)(a^\dagger, Ra^\dagger) + (a^\dagger, f)}|0\rangle, \quad c = \sqrt[4]{\det(I - |R|^2)} e^{-(1/2)(\bar{g}, f)} = \frac{e^{-(1/2)(\bar{g}, f)}}{\sqrt{\det \Phi}}, \quad (3.6)$$

где

$$g = (I - RR^*)^{-1}(f - R\bar{f}) = \Phi^*(\Phi f - \Psi\bar{f}),$$

а R и f являются параметрами приведенной формы состояния $|g, A\rangle$,

$$\Phi = \Phi^* = U_A(\cosh |A|)U_A^*, \quad \Psi = \Psi^T = U_A \sinh |A|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $e^{(a^\dagger, Ca)}e^{(1/2)(a, \bar{R}a)}|0\rangle = |0\rangle$, то, используя сначала формулу (3.1), а затем коммутируя операторы сдвига и сжатия, получаем

$$\begin{aligned} |g, A\rangle &= \sqrt[4]{\det(I - |R|^2)} e^{(a^\dagger, g) - (a, \bar{g})} e^{-(1/2)(a^\dagger, Ra^\dagger)}|0\rangle \\ &= \frac{e^{-(1/2)(a^\dagger - \bar{g}, R(a^\dagger - \bar{g}))} e^{(a^\dagger, g) - (a, \bar{g})}|0\rangle}{\sqrt{\det \Phi}}. \end{aligned}$$

При вычислении корней здесь и далее следует выбирать ветвь, приходящую в точку 1 при $R \rightarrow 0$ или $\Phi \rightarrow I$. Для завершения доказательства остается применить следствие формулы Бейкера–Хаусдорфа $e^{(a^\dagger, g) - (a, \bar{g})}|0\rangle = e^{-(1/2)(\bar{g}, g)} e^{(a^\dagger, g)}|0\rangle$.

В заключение заметим, что нелинейная связь между параметрами f и $g(f)$ выглядит достаточно нетривиально. Используя тождество $g + R\bar{g} = f$, комплексно сопряженное равенство $R\bar{g} + RR^*g = R\bar{f}$ и их разность, находим

$$\begin{aligned} g &= g(f) = (I - RR^*)^{-1}(f - R\bar{f}) = (I - \Phi^{-1}\Psi\Psi^*(\Phi^*)^{-1})^{-1}\Phi^{-1}(\Phi f - \Psi\bar{f}) \\ &= \Phi^*(\Phi\Phi^* - \Psi\Psi^*)^{-1}(\Phi f - \Psi\bar{f}) = \Phi(\Phi f - \Psi\bar{f}). \end{aligned}$$

Учитывая, что $\Phi^T = \bar{\Phi}$, $\Psi^* = \bar{\Psi}$ для сжатий и $R = R^T$, в силу (2.7) получаем

$$\begin{aligned} I - |R|^2 &= \bar{\Phi}^{-1}(\bar{\Phi}\Phi^T - \bar{\Psi}\Psi^T)(\Phi^T)^{-1} = (\Phi^T\bar{\Phi})^{-1} = (\Phi^T)^{-2}, \\ \det(I - |R|^2) &= (\det \Phi)^{-2}. \end{aligned}$$

Следующая лемма описывает связь параметров канонических преобразований и нормировки приведенных сжатых состояний.

ЛЕММА 3. Пусть $r \stackrel{\text{def}}{=} \text{Re}(I - R)^{-1}f$ и Ω_R – эрмитова матрица

$$\begin{aligned}\Omega_R &\stackrel{\text{def}}{=} (I - R^*)^{-1}(I - R^*R)(I - R)^{-1} \\ &= (I - R)^{-1}(I - RR^*)(I - R^*)^{-1} = (\Phi - \Psi^*)^{-1}(\Phi - \Psi)^{-1}.\end{aligned}$$

Норма вектора $\psi = e^{-(1/2)(a^\dagger, Ra^\dagger) + (f, a^\dagger)}|0\rangle$ равна $c_{R,f}^{-1}$, где

$$c_{f,R} = \det(I - |R|^2)^{1/4} e^{(1/2)\text{Re}(f, (I-R)^{-1}f) - (r, \Omega_R^{-1}r)} = \frac{1}{\sqrt{\det \Phi}} e^{-(1/2)\text{Re}(\bar{g}, f)} > 0, \quad (3.7)$$

так что с точностью до скалярного унитарного множителя $e^{-(i/2)\text{Im}(\bar{g}, f)}$ приведенному сжатому состоянию $\psi_{R,f} = c_{f,R}\psi$ соответствует состояние $|g, A\rangle = e^{-(i/2)\text{Im}(\bar{g}, f)}\psi_{R,f}$ и

$$\frac{1}{2}\text{Re}(\bar{g}, f) = (r, \Omega_R^{-1}r) - \frac{1}{2}\text{Re}(f, (I - R)^{-1}f). \quad (3.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (3.8) вытекает из леммы 1. Из $f = g + R\bar{g}$ имеем

$$(\bar{g}, f) = |g|^2 + \text{Re}(\bar{g}, R\bar{g}) + i\text{Im}(\bar{g}, R\bar{g}) = |g|^2 + \text{Re}(g, R^*g) - i\text{Im}(g, R^*g)$$

в силу симметрии оператора R . Покажем, что

$$(r, \Omega_R^{-1}r) - \frac{1}{2}\text{Re}(f, (I - R)^{-1}f) = \frac{1}{2}(|g|^2 + \text{Re}(g, R^*g)).$$

Для этого выразим r и Ω_R через R и g :

$$\begin{aligned}r &= \text{Re}(I - R)^{-1}f \\ &= \frac{1}{2}((I - R)^{-1}(g + \bar{g} - (I - R)\bar{g}) + (I - R^*)^{-1}(g + \bar{g} - (I - R^*)g)) = \Omega_R \text{Re } g, \quad (3.9) \\ \frac{1}{2}\text{Re}(f, (I - R)^{-1}f) &= \frac{1}{4}((g + \bar{g} - (I - R)\bar{g}), (I - R)^{-1}(g + \bar{g} - (I - R)\bar{g}) \\ &\quad + (g + \bar{g} - (I - R^*)g), (I - R^*)^{-1}(g + \bar{g} - (I - R^*)g)) \\ &= (\text{Re } g, (\Omega_R + I) \text{Re } g) + \frac{1}{2}\text{Re}(g, (I - R^*)g) - 2(\text{Re } g, \text{Re } g).\end{aligned} \quad (3.10)$$

Разность тождеств (3.9) и (3.10) дает (3.8) и объясняет смысл нормировки (3.7):

$$\begin{aligned}&(r, \Omega_R^{-1}r) - \frac{1}{2}\text{Re}(f, (I - R)^{-1}f) \\ &= (\text{Re } g, \Omega_R \text{Re } g) + 2(\text{Re } g, \text{Re } g) - (\text{Re } g, (\Omega_R + I) \text{Re } g) - \frac{1}{2}\text{Re}(g, (I - R^*)g) \\ &= (\text{Re } g, \text{Re } g) - \frac{1}{2}\text{Re}(g, (I - R^*)g) = \frac{1}{2}(|g|^2 + \text{Re}(g, R^*g)) = \frac{1}{2}\text{Re}(\bar{g}, f).\end{aligned}$$

Таким образом, $\| |g, A\rangle \| = \| ce^{-(1/2)(a^\dagger, Ra^\dagger) + (a^\dagger, f)}|0\rangle \|$.

4. Сжатые состояния в импульсном представлении. Для вычисления нормировки приведенного сжатого состояния воспользуемся известным изометрическим изоморфизмом $F_{\ell_2 \rightarrow L_2}$ между $\bigotimes_1^n \ell_2$ и $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n)$, устанавливающим соответствие между единичными векторами из $\mathcal{H}$ и $\mathcal{L}_2$ и операторами рождения-уничтожения:

$$\bigotimes_1^n \ell_2 \ni |0\rangle \leftrightarrow \frac{1}{\pi^{n/4}} e^{-(|x|^2/2)} \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n), \quad \{a^\dagger, a\} \leftrightarrow \left\{ \frac{x - \partial_x}{\sqrt{2}}, \frac{x + \partial_x}{\sqrt{2}} \right\}.$$

В частности, изометрический образ в $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n)$ вектора $e^{-(1/2)(a^\dagger, R a^\dagger) + (f, a^\dagger)} |0\rangle \in \mathbb{H}$ равен

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{\pi^{n/4}} e^{-(1/4)(\partial - x, R(\partial - x)) - (1/\sqrt{2})(f, (\partial - x))} e^{-(1/2)|x|^2} \\ &= \frac{e^{|x|^2/2}}{\pi^{n/4}} e^{-(1/4)(\partial, R\partial) - (1/\sqrt{2})(f, \partial)} e^{-|x|^2} \\ &= \frac{e^{|x|^2/2}}{\pi^{n/4}} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(p, x - f/\sqrt{2})} e^{-(1/4)(p, (I - R)p)} d^n p \\ &= \frac{e^{|x|^2/2 - (x - f/\sqrt{2}, (I - R)^{-1}(x - f/\sqrt{2}))}}{\pi^{n/4} \sqrt{\det(I - R)}}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Мы рассмотрим этот метод более подробно, поскольку несложное обобщение позволяет вычислить скалярное произведение сжатых состояний в многомерном случае.

Учитывая, что $\text{Im } x = 0$, и полагая $r = \text{Re}(I - R)^{-1} f$ в (4.1), получаем

$$\begin{aligned} |\psi(x)| &= \frac{e^{\sqrt{2}(x, r) - (1/2)(x, \Omega_R x) - (1/2) \text{Re}(f, (I - R)^{-1} f)}}{\pi^{n/4} \sqrt[4]{\det(I - R) \det(I - \bar{R})}} \\ &= \frac{e^{(r, \Omega_R^{-1} r) - (1/2) \text{Re}(f, (I - R)^{-1} f) - (1/2) |\Omega_R^{1/2} x - \sqrt{2} \Omega_R^{-1/2} r|^2}}{\pi^{n/4} \sqrt{|\det(I - R)|}}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где

$$\Omega_R = \Omega_R^* = (I - R)^{-1} + (I - \bar{R})^{-1} - I = (I - R)^{-1} (I - R R^*) (I - R^*)^{-1} > 0.$$

Поскольку

$$\det(I - R) \det(I - R^*) \det \Omega_R = \det(I - |R|^2) = \det(I - R R^*) = \det \Phi^{-2},$$

то можно воспользоваться формулой (3.8) и вычислить норму ψ в $\mathcal{L}_2$:

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{\mathcal{L}_2} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \frac{e^{(r, \Omega_R^{-1} r) - (1/2) \text{Re}(f, (I - R)^{-1} f)}}{\sqrt[4]{\det(I - |R|^2)}} \\ &= \sqrt{\det \Phi} e^{(1/2) \text{Re}(\bar{g}, f)} \stackrel{\text{def}}{=} c_{f, R}^{-1}, \end{aligned}$$

что дает нормировку (3.7). Остается заметить, что $\det \Phi \det(I - R) = \det(\Phi - \Psi)$.

Итак, построен изометрический образ в $L_2(\mathbb{R}^n)$ приведенного нормированного состояния $c_{f, R} e^{-(1/2)(a^\dagger, R a^\dagger) + (f, a^\dagger)} |0\rangle$:

$$\psi_{f, R}(x) = c_{f, R} \psi(x) = \frac{e^{|x|^2/2 - (x - f/\sqrt{2}, (I - R)^{-1}(x - f/\sqrt{2})) - (1/2) \text{Re}(\bar{g}, f)}}{\pi^{n/4} \sqrt{\det(\Phi - \Psi)}} \in L_2(\mathbb{R}^n). \quad (4.3)$$

ТЕОРЕМА 2 (о X - и P -представлениях сжатого состояния). Пусть $A = A^T$ – генератор сжатия, $f = g + R\bar{g}$, $R = \Phi^{-1}\Psi = U \operatorname{th} |A|$, $\psi_{f,R}(x) = c_{f,R}\psi(x)$ и $\mathcal{F}_{x \rightarrow p}$ – преобразование Фурье, при котором $i\partial_x \rightarrow -p$. Тогда $\langle x \rangle_{f,R} = \sqrt{2} \operatorname{Re} g$, $\langle p \rangle_{f,R} = \sqrt{2} \operatorname{Im} g$,

$$F_{\ell_2 \rightarrow L_2} |g, A\rangle = e^{-(i/2) \operatorname{Im}(\bar{g}, f)} \psi_{f,R}(x) = \frac{e^{|x|^2/2 - (x-f/\sqrt{2}, (I-R)^{-1}(x-f/\sqrt{2})) - (1/2)(\bar{g}, f)}}{\pi^{n/4} \sqrt{\det(\Phi - \Psi)}},$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{f,R}(p) &\stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{F}_{x \rightarrow p} e^{-(i/2) \operatorname{Im}(\bar{g}, f)} \psi_{f,R}(x))(p) \\ &= \frac{e^{|p|^2/2 - (p+if/\sqrt{2}, (I+R)^{-1}(p+if/\sqrt{2})) - (1/2)(\bar{g}, f)}}{\pi^{n/4} \sqrt{\det(\Phi + \Psi)}}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ковариационные матрицы случайных величин с распределениями $|\psi_{f,R}|^2$ и $|\tilde{\psi}_{f,R}|^2$ совпадают с соответствующими величинами (2.9), вычисленными в представлении сжатого состояния.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (4.3) доказывает первое утверждение. Из (4.2) следует, что среднее значение случайной величины x с распределением $|c_{f,R}\psi(x)|^2$ равно $\langle x \rangle_{f,R} = \sqrt{2} \Omega_R^{-1} r$. С другой стороны, согласно (3.9) $r = \Omega_R \operatorname{Re} g$. Поэтому $\langle x \rangle_{f,R} = \langle \hat{x} \rangle_{g,A} = \sqrt{2} \operatorname{Re} g$ (см. (2.8)). Для x нам остается доказать последнее утверждение. Для этого достаточно заметить, что ковариационная матрица распределения (4.2) равна $\Omega_R^{-1} = (\Phi - \Psi)^*(\Phi - \Psi)$ (см. лемму 3). Таким образом,

$$\langle x \otimes x \rangle_{f,R} = \langle \hat{x} \otimes \hat{x} \rangle_{0,A} = \frac{1}{2} \Omega_R^{-1}$$

(см. (2.9)).

Преобразование Фурье (4.4) легко вычисляется, так как квадратичная часть показателя экспоненты (4.3), равная

$$\omega_x(R) = (I - R)^{-1} - \frac{1}{2} I = \frac{1}{2} \frac{I + R}{I - R},$$

обращается при преобразовании Фурье: $\omega_p(R) = \omega_x^{-1}(R) = \omega_x(-R)$. При этом $R \rightarrow -R$, $r \rightarrow \tilde{r} = \operatorname{Im}(I + R)^{-1} f$, $f \rightarrow -if$, $g \rightarrow -ig$. По аналогии с выводом (3.9) имеем $\tilde{r} = \Omega_{-R} \operatorname{Im} g$, поэтому из (4.4) следует

$$\langle p \rangle_{R,f} = \sqrt{2} \Omega_{-R}^{-1} \tilde{r} = \sqrt{2} \operatorname{Im} g = \langle \hat{p} \rangle_{g,A},$$

при этом ковариационная матрица $\langle \hat{p} \otimes \hat{p} \rangle_{0,A} = (1/2) \Omega_{-R}^{-1}$ отличается только знаком $\Psi \rightarrow -\Psi$:

$$\langle \hat{p} \otimes \hat{p} \rangle_{0,A} = \frac{1}{2} \Omega_{-R}^{-1} = \frac{1}{2} (\Phi + \Psi)^*(\Phi + \Psi)$$

(см. (2.9)).

Используя первую формулу (4.4) нетрудно найти координатное представление состояния $|A, \chi\rangle$ и, вычислив скалярные произведения $\langle \xi | A, \chi \rangle / \langle \xi | \chi \rangle = \operatorname{Symb} S_A(\xi, \chi)$, независимым образом проверить многомерную формулу факторизации (3.1).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $g = \Phi\chi - \Psi\bar{\chi}$, $f = g + R\bar{g}$. Тогда

$$f = \Phi^{-1}\chi, \quad (\bar{g}, f) = |\chi|^2 - (\chi, \bar{R}\chi),$$

а образом в $L_2(\mathbb{R}^n)$ сжатого состояния $|A, \chi\rangle = |g, A\rangle$ является вектор

$$F_{\ell_2 \rightarrow L_2}|A, \chi\rangle = \frac{e^{(|x|^2 - |\chi|^2)/2 - (x - \Phi^{-1}\chi/\sqrt{2}, (I-R)^{-1}(x - \Phi^{-1}\chi/\sqrt{2})) + (1/2)(\chi, \bar{R}\chi)}}{\pi^{n/4}\sqrt{\det(\Phi - \Psi)}} \stackrel{\text{def}}{=} \phi_{R,\chi}(x). \quad (4.5)$$

Нормальный символ $S_A(\bar{\xi}, \chi)$ оператора S_A равен $\langle \phi_{\xi}, \phi_{R,\chi} \rangle / \langle \xi | \chi \rangle$, где

$$\begin{aligned} \phi_{\xi}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} F_{\ell_2 \rightarrow L_2}|\xi\rangle = \frac{1}{\pi^{n/4}} e^{(|x|^2 - |\xi|^2)/2 - (x - \xi/\sqrt{2}, x - \xi/\sqrt{2})}, \\ \langle \xi | \chi \rangle &= e^{-(1/2)(|\chi|^2 + |\xi|^2) + (\bar{\xi}, \chi)}, \end{aligned}$$

совпадает с выражением (3.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенства $f(\chi) = \Phi^{-1}\chi$ и $(\bar{g}(\chi), f(\chi)) = |\chi|^2 - (\chi, \bar{R}\chi)$ вытекают из определений f и g и свойства (2.7) матриц Φ и Ψ . Например,

$$f = g + R\bar{g} = \Phi\chi - \Psi\bar{\chi} + \Psi\bar{\Phi}^{-1}(\bar{\Phi}\bar{\chi} - \bar{\Psi}\chi) = \Phi\chi - \Phi^{-1}\Psi\bar{\Psi}\chi = \Phi^{-1}(\Phi^2 - \Psi\bar{\Psi})\chi = \Phi^{-1}\chi.$$

Выражение (4.5) получается при подстановке $f(\chi)$ и $g(\chi)$ в (4.4). Вычисляя интеграл $\langle \phi_{\xi}, \phi_{R,\chi} \rangle_{L_2}$, получаем

$$\begin{aligned} \langle \phi_{\xi}, \phi_{R,\chi} \rangle_{L_2} &= \int_{\mathbb{R}^n} \bar{\phi}_{\xi}(x) \phi_{R,\chi}(x) d^n x \\ &= e^{-(1/2)(|\chi|^2 + |\xi|^2 + \bar{\xi}^2 - (\chi, \bar{R}\chi))} \frac{1}{\sqrt{\pi^n \det(\Phi - \Psi)}} \\ &\quad \times e^{-(1/2)((\Phi^{-1}\chi, (I-R)^{-1}\Phi^{-1}\chi) - ((\Phi^{-1}\chi + (I-R)\bar{\xi}), (I-R)^{-1}(\Phi^{-1}\chi + (I-R)\bar{\xi})))} \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^n} e^{-((x - (\Phi^{-1}\chi + (I-R)\bar{\xi})/\sqrt{2}), (I-R)^{-1}(x - (\Phi^{-1}\chi + (I-R)\bar{\xi})/\sqrt{2}))} d^n x \\ &= \sqrt{\frac{\det(I-R)}{\det(\Phi - \Psi)}} e^{-(1/2)(|\chi|^2 + |\xi|^2 + (\bar{\xi}, R\bar{\xi}) - (\chi, \bar{R}\chi) + (\bar{\xi}, \Phi^{-1}\chi))}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

что с учетом нормировки совпадает с (3.2), так как $\det(I-R)/\det(\Phi - \Psi) = \det \Phi^{-1}$.

5. Скалярное произведение сжатых состояний. Пусть

$$A, \quad B, \quad R = U_A \text{ th } |A| = \Phi_A^{-1}\Psi_A, \quad Q = U_B \text{ th } |B| = \Phi_B^{-1}\Psi_B$$

– симметричные операторы и $f = g + R\bar{g}$, $p = q + Q\bar{q}$. Здесь g и q – сдвиги канонических сжатых состояний, а f и p – сдвиги соответствующих приведенных состояний (см. теорему 1 или лемму 3). Вычисление скалярного произведения состояний $|g, A\rangle = \psi_{f,R}$ и $|q, B\rangle = \psi_{p,Q}$ можно свести к вычислению гауссовых интегралов. Пусть

$$\begin{aligned} \varphi_{0,Q}(x) &= \frac{e^{|x|^2/2 - (x, (I-Q)^{-1}x)}}{\pi^{n/4}\sqrt{\det(\Phi_B - \Psi_B)}}, \\ \varphi_{z,R}(x) &= \frac{e^{|x|^2/2 - (1/2)(\bar{w}, z)(x - z/\sqrt{2}, (I-R)^{-1}(x - z/\sqrt{2}))}}{\pi^{n/4}\sqrt{\det(\Phi_A - \Psi_A)}} \end{aligned} \quad (5.1)$$

– единичные векторы, являющиеся координатным L_2 -представлением сжатых состояний:

$$F_{\ell_2 \rightarrow L_2} |0, B\rangle = \psi_{0,Q} \quad \text{и} \quad F_{\ell_2 \rightarrow L_2} |w, A\rangle = \varphi_{z,R}.$$

Тогда

$$\langle q, B|g, A\rangle_{\ell_2^{\otimes n}} = e^{i \operatorname{Im}(\bar{q}, g)} \langle 0, B|w, A\rangle_{\ell_2^{\otimes n}} = e^{i \operatorname{Im}(\bar{q}, g)} \langle \psi_{0,Q}, \psi_{z,R} \rangle_{L_2(\mathbb{R}^n)}, \quad (5.2)$$

и доказательство следующей теоремы сводится к вычислению гауссова интеграла (5.2). Обозначим $w = g - q$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $z = w + R\bar{w}$, $h = (I - R)^{-1}z$ и $S_R = ((\bar{w} + h), z)$. Тогда

$$\langle q, B|g, A\rangle = \frac{\sqrt[4]{\det(I - |Q|^2)(I - |R|^2)}}{\sqrt{\det(I - Q^*R)}} e^{i \operatorname{Im}(\bar{q}, g) + (1/2)((h, \Omega_{Q,R}^{-1}h) - S_R)}, \quad (5.3)$$

а также

$$\Omega_{Q,R} = (I - \bar{Q})^{-1} + (I - R)^{-1} - I = \Omega_{Q,R}^T,$$

в силу симметричности матриц Q, R и

$$\Omega_{Q,R}^{-1} = (I - \bar{Q})(I - R\bar{Q})^{-1}(I - R) = (\Phi_B^* - \Psi_B^*)(\Phi_A\Phi_B^* - \Psi_A\Psi_B^*)^{-1}(\Phi_A - \Psi_A).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Спектры симметричных матриц $Q = U_B \operatorname{th} |B|$, $R = U_A \operatorname{th} |A|$ лежат на комплексной плоскости внутри единичной окружности с центром в начале координат. Поэтому вещественные части точек спектра матрицы $(I - Q^*)^{-1} + (I - R)^{-1}$ лежат на $(1, \infty)$, а вещественная часть спектра матрицы $\Omega_{Q,R} = \omega - I + i\rho$, где

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\Omega_{Q,R} + \Omega_{Q,R}^*)}{2} = \frac{(\Omega_{Q,R} + \bar{\Omega}_{Q,R})}{2}, \quad \rho \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\Omega_{Q,R} - \bar{\Omega}_{Q,R})}{2i},$$

лежит на $(0, \infty)$. Следовательно, интеграл (5.2) сходится абсолютно, существует ограниченная матрица $\Omega_{Q,R}^{-1}$, а не зависящая и зависящая от x части показателя экспоненты в произведении $\bar{\psi}_{Q,0}(x)\psi_{R,z}(x)$ равны $-S_R = -(1/2)((h, z) + (\bar{w}, z))$ и

$$\sqrt{2}(z, (I - R)^{-1}x) - (x, \Omega x) \equiv \frac{1}{2}(h, \Omega^{-1}h) - \left(\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\Omega^{-1}h \right), \Omega \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\Omega^{-1}h \right) \right), \quad (5.4)$$

где $\Omega = \Omega_{Q,R}$, $h = (I - R^T)^{-1}z = (I - R)^{-1}z$. Поэтому после интегрирования по x в показателе экспоненты появляется сумма $i \operatorname{Im}(\bar{q}, g) + (1/2)((h, \Omega^{-1}h) - S_R)$.

Нетрудно видеть, что $\det \Omega_{Q,R} = \det(I - \bar{Q}R) / \det(I - \bar{Q}) \det(I - R)$, и в результате интегрирования по x в (5.2) получаем предэкспоненту

$$\begin{aligned} & \{\det |\Phi_A| \det |\Phi_B| \det(I - \bar{Q}) \det(I - R) \det \Omega_{Q,R}\}^{-1/2} \\ &= \{\det |\Phi_A| \det |\Phi_B| \det(I - \bar{Q}R)\}^{-1/2}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \det |\Phi_A|^{-1} &= \sqrt{\det(I - |R|^2)}, & \det |\Phi_B|^{-1} &= \sqrt{\det(I - |Q|^2)}, \\ \det(I - \bar{Q}R) &= \det(I - Q^*R). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

В частности, если $g = q$, то $\text{Im}(\bar{g}, q) = 0$, $w = h = z = 0$, и поэтому

$$\langle g, B|g, A \rangle = \frac{\sqrt[4]{\det(I - |Q|^2)(I - |R|^2)}}{\sqrt{\det(I - Q^*R)}} = \frac{1}{\sqrt{\Phi_{A,B}}}, \quad (5.5)$$

где $\Phi_{A,B} = \Phi_A \Phi_B - \Psi_A \bar{\Psi}_B$.²

Вывод формулы (5.5). Если $A = B$, то $R = Q$ и $\Phi_A \Phi_B^* - \Psi_A \Psi_B^* = I$, где $\Phi_A = \Phi_B \stackrel{\text{def}}{=} \Phi$ и $\Psi_A = \Psi_B \stackrel{\text{def}}{=} \Psi$. Далее,

$$\langle q, A|g, A \rangle = e^{i \text{Im}(\bar{q}, g) - (1/2)|\Phi_A^* w + \Psi_A^T \bar{w}|^2} = e^{i \text{Im}(\bar{q}, g) - (1/2)|\Phi_A w + \Psi_A \bar{w}|^2}, \quad (5.6)$$

так как в случае сжатий $\Phi_A = \Phi_A^*$ и $\Psi_A = \Psi_A^T$ (см. лемму 1).

Следующая теорема позволяет выразить символ композиции сжатий через скалярное произведение сжатых состояний $\langle \xi | S_{-B} S_A | \chi \rangle = \langle B, \xi | A, \chi \rangle$ и, следовательно, вычислить композицию сжатий. По сравнению с формулой (5.3) для $\langle \xi, B | \chi, A \rangle$ полученное ниже выражение имеет более простую структуру.

ТЕОРЕМА 4. Пусть

$$\begin{aligned} \Phi_{A,B} &= \Phi_A \Phi_B - \Psi_A \bar{\Psi}_B, & \Psi_{A,B} &= \Psi_A \bar{\Phi}_B - \Phi_A \Psi_B, \\ R_{A,B} &= \Phi_{A,B}^{-1} \Psi_{A,B}, & R_{B,A} &= \Phi_{B,A}^{-1} \Psi_{B,A}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\langle \xi | S_{-B} S_A | \chi \rangle}{\langle \xi | \chi \rangle} &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Symb } S_{-B} S_A(\bar{\xi}, \chi) \\ &= \frac{e^{-(1/2)(\bar{\xi}, R_{A,B} \bar{\xi}) + (\bar{\xi}, (\Phi_{A,B}^{-1} - I) \chi) + (1/2)(\chi, \bar{R}_{B,A} \chi)}}{\sqrt{\det \Phi_{A,B}}}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что несмотря на внешнее сходство формул (3.2) и (5.7), здесь $\Phi_{A,B} \neq \Phi_{A,B}^*$, $\Phi_{A,B} \neq \Phi_{B,A}$ и $R_{A,B} \neq R_{B,A}$, но, по-прежнему, $R_{A,B} = R_{A,B}^T$, $R_{B,A} = R_{B,A}^T$.

Поскольку $\langle \xi | S_{-B} S_A | \chi \rangle = \langle B, \xi | A, \chi \rangle$, такое среднее можно вычислить в $L_2(\mathbb{R}^n)$ с помощью (4.5). Используя введенные ранее обозначения $R = \Phi_A^{-1} \Psi_A$, $Q = \Phi_B^{-1} \Psi_B$ и учитывая, что $\Phi_A^T = \bar{\Phi}_A$, $\Phi_B^T = \bar{\Phi}_B$, $\det \Phi_B = \det \bar{\Phi}_B$, положим

$$\theta = (I - R)^{-1} \Phi_A^{-1} \chi + (I - \bar{Q})^{-1} \bar{\Phi}_B^{-1} \bar{\xi}, \quad \Omega_{Q,R} = (I - \bar{Q})^{-1} (I - \bar{Q} R) (I - R)^{-1}$$

и по аналогии с (4.6) получим

$$\begin{aligned} \langle \phi_{Q,\xi}, \phi_{R,\chi} \rangle_{L_2} &= \int_{\mathbb{R}^n} \bar{\phi}_{Q,\xi}(x) \phi_{R,\chi}(x) d^n x \\ &= e^{-(1/2)(|\chi|^2 + |\xi|^2 - (\bar{\xi}, Q \bar{\xi}) - (\chi, \bar{R} \chi))} \\ &\quad \times e^{-(1/2)((\Phi_A^{-1} \chi, (I - R)^{-1} \Phi_A^{-1} \chi) + (\bar{\Phi}_B^{-1} \bar{\xi}, (I - \bar{Q})^{-1} \bar{\Phi}_B^{-1} \bar{\xi}) - (\theta, \Omega_{Q,R}^{-1} \theta))} \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{\pi^n \det(\bar{\Phi}_B - \bar{\Psi}_B) \det(\Phi_A - \Psi_A)}} \end{aligned}$$

²Г. С. Агарвал (G. S. Agarwal) в 2010 г. сообщил авторам вывод формулы (5.5) в многомерном случае в терминах функций Вигнера при $q = g = 0$.

$$\begin{aligned}
& \times \int_{\mathbb{R}^n} e^{-((x - \Omega_{Q,R}^{-1}\theta/\sqrt{2}), \Omega_{Q,R}(x - \Omega_{Q,R}^{-1}\theta/\sqrt{2}))} d^n x \\
& = \frac{e^{-(1/2)((\chi, \bar{\Phi}_A^{-1}(I-R)^{-1}\Phi_A^{-1}\chi) + (\bar{\xi}, \Phi_B^{-1}(I-\bar{Q})^{-1}\bar{\Phi}_B^{-1}\bar{\xi}) - (\theta, \Omega_{Q,R}^{-1}\theta))}}{\sqrt{\det(\bar{\Phi}_B - \bar{\Psi}_B) \det \Omega_{Q,R} \det(\Phi_A - \Psi_A)}} \\
& \quad \times e^{-(1/2)(|\chi|^2 + |\xi|^2 - (\bar{\xi}, R\bar{\xi}) - (\chi, R\chi))}.
\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}
(I - \bar{Q})^{-1} &= (\bar{\Phi}_B - \bar{\Psi}_B)^{-1}\bar{\Phi}_B, & (I - R)^{-1} &= (I - R^T)^{-1} = \bar{\Phi}_A(\bar{\Phi}_A - \Psi_A)^{-1}, \\
\det(\Phi - \Psi) &= \det(\Phi - \Psi)^T = \det(\bar{\Phi} - \bar{\Psi}),
\end{aligned}$$

вычислим детерминант:

$$\begin{aligned}
& \det(\bar{\Phi}_B - \bar{\Psi}_B)\Omega_{Q,R}(\bar{\Phi}_A - \Psi_A) \\
& = \det \bar{\Phi}_B(I - \bar{Q}R)\bar{\Phi}_A = \det(\bar{\Phi}_B\bar{\Phi}_A - \bar{\Psi}_B\Psi_A) = \det(\Phi_A\Phi_B - \Psi_A\bar{\Psi}_B),
\end{aligned}$$

что совпадает со значением нормировочного множителя $\det \Phi_{A,B}$, указанным в (5.7).

Вычисления матрицы Λ_0 в билинейном члене $(\bar{\xi}, \Lambda_0\chi)$ показателя экспоненты (5.7) не требует сложных преобразований. Из определения θ находим

$$\Lambda_0 = \Phi_B^{-1}(I - \bar{Q})^{-1}\Omega_{A,B}^{-1}(I - R)^{-1}\Phi_A^{-1} = \Phi_B^{-1}(I - R\bar{Q})^{-1}\Phi_A^{-1} = (\Phi_A\Phi_B - \Psi_A\bar{\Psi}_B)^{-1}.$$

Соберем коэффициенты квадратичной формы $(\bar{\xi}, \Lambda_1\bar{\xi})$, используя тождества (2.7):

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= Q + \Phi_B^{-1}(I - R\bar{Q})^{-1}(I - R)(I - \bar{Q})^{-1}\bar{\Phi}_B^{-1} - \Phi_B^{-1}(I - \bar{Q})^{-1}\bar{\Phi}_B^{-1} \\
&= \Psi_B\bar{\Phi}_B^{-1} - \Phi_B^{-1}(I - R\bar{Q})^{-1}R\bar{\Phi}_B^{-1} \\
&= \Psi_B\bar{\Phi}_B^{-1} - (\Phi_A\Phi_B - \Psi_A\bar{\Psi}_B)^{-1}\bar{\Phi}_B^{-1} \\
&= (\Phi_A\Phi_B - \Psi_A\bar{\Psi}_B)^{-1}((\Phi_A\Phi_B - \Psi_A\bar{\Psi}_B)\Psi_B - \Psi_A)\bar{\Phi}_B^{-1} \\
&= (\Phi_A\Phi_B - \Psi_A\bar{\Psi}_B)^{-1}(\Phi_A\Phi_B\Psi_B - \Psi_A\bar{\Phi}_B^2)\bar{\Phi}_B^{-1} \\
&= (\Phi_A\Phi_B - \Psi_A\bar{\Psi}_B)^{-1}(\Phi_A\Psi_B - \Psi_A\bar{\Phi}_B) = -\Phi_{A,B}^{-1}\Psi_{A,B} = -R_{A,B}.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом вычисляются коэффициенты квадратичной формы $(\chi, \Lambda_2\chi)$:

$$\begin{aligned}
\Lambda_2 &= \bar{R} + \bar{\Phi}_A^{-1}(I - \bar{Q}R)^{-1}(I - \bar{Q})(I - R)^{-1}\Phi_A^{-1} - \bar{\Phi}_A^{-1}(I - R)^{-1}\Phi_A^{-1} \\
&= \bar{\Psi}_A\bar{\Phi}_A^{-1} - \bar{\Phi}_A^{-1}(I - \bar{Q}R)^{-1}\bar{Q}\bar{\Phi}_A^{-1} \\
&= (\bar{\Phi}_B\bar{\Phi}_A - \bar{\Psi}_B\Psi_A)^{-1}((\bar{\Phi}_B\bar{\Phi}_A - \bar{\Psi}_B\Psi_A)\bar{\Psi}_A - \bar{\Psi}_B)\bar{\Phi}_A^{-1} \\
&= (\bar{\Phi}_B\bar{\Phi}_A - \bar{\Psi}_B\Psi_A)^{-1}(\bar{\Phi}_B\bar{\Phi}_A\bar{\Psi}_A - \bar{\Psi}_B\bar{\Phi}_A^2)\bar{\Phi}_A^{-1} \\
&= (\bar{\Phi}_B\bar{\Phi}_A - \bar{\Psi}_B\Psi_A)^{-1}(\bar{\Phi}_B\bar{\Psi}_A - \bar{\Psi}_B\bar{\Phi}_A) = \bar{\Phi}_{B,A}^{-1}\bar{\Psi}_{B,A} = \bar{R}_{B,A}.
\end{aligned}$$

С помощью нормального символа композиции сжатий можно еще раз убедиться в корректности результатов, сформулированных в лемме 2 и теоремах 2 и 3. В частности, если $B = 0$, то $\Phi_{0,A} = \Phi_{A,0} = \Phi$, $\Psi_{0,A} = \Psi_{A,0} = \Psi$, поэтому $R_{A,0} = R_{0,A} = R$ (ср. (3.1)). Если $\xi = \chi = 0$, то получаем формулу (5.5).

6. Среднее значение и дисперсия тока. Простейшие приложения полученных формул связаны с вычислением средних значений тока $I \sim \text{Im Tr}(a - a^\dagger)\rho_t$ и его дисперсии $\sigma_I^2 \sim \text{Tr}(a - a^\dagger)^2 \rho_t - |\text{Tr}(a - a^\dagger)\rho_t|^2$ в сжатом состоянии ρ_t . Оказывается, что в задачах с постоянными скрещенными (E, H) -полями на фоне периодического асимметричного потенциала $V(x)$, квантовая эволюция сжатого начального состояния $\psi_{R,f}$ может быть представлена как среднее значение состояний со случайными смещениями $f_{t,\omega}$ и детерминированными сжатиями R_t , *периодически* зависящими от времени t . Индекс ω является случайным параметром, по которому производится операция усреднения $\mathbb{E}$. Как мы увидим в следующем пункте, эволюция сжатий не зависит от внешнего поля E и потенциала $V(x)$.

Вычислим квантовые средние сжатого состояния в каноническом представлении, считая, что $\psi(t) = \mathbb{E} e^{is_\omega(t)} |g_\omega(t), A(t)\rangle$, где $|g_\omega(t), A(t)\rangle$ – сжатое состояние при фиксированных t , ω – случайный параметр, $\mathbb{E}$ – математическое ожидание. Тогда

$$p_{g,A}(t) = \mathbb{E} p_{\omega,\omega'}(t) = \text{Im } \mathbb{E} e^{is_{\omega,\omega'}(t)} \langle g_{\omega'}(t), A(t) | \hat{p} | g_\omega(t), A(t) \rangle,$$

$$D_{g,A}(t) = \mathbb{E} D_{\omega,\omega'}(t) = \mathbb{E} e^{is_{\omega,\omega'}(t)} \langle g_{\omega'}(t), A(t) | \hat{p} \otimes \hat{p} | g_\omega(t), A(t) \rangle - p_{g,A}(t) \otimes p_{g,A}(t),$$

где ω, ω' – некоторые независимые случайные величины, $g = g_\omega(t)$, $g' = g_{\omega'}(t) \in \mathbb{R}^n$ – независимые случайные реализации вектора сдвига, $A(t)$, $g_\omega(t)$ – параметры канонической формы сжатого состояния, $S(t) \stackrel{\text{def}}{=} s_\omega(t) - s_{\omega'}(t)$.

Обозначим через T_g оператор сдвига, и пусть $\Phi = \Phi_{A(t)}$, $\Psi = \Psi_{A(t)}$ – матрицы канонического преобразования, соответствующего сжатию $S_{A(t)} = S$. Тогда

$$\begin{aligned} \sqrt{2} p_{\omega,\omega'}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Im} \langle g_{\omega'}(t), A(t) | a - a^\dagger | g_\omega(t), A(t) \rangle \\ &= \text{Im } e^{i \text{Im}(\bar{g}', g)} \langle 0 | S^* ((a + g') T_{g-g'} - T_{g-g'} (a^\dagger + \bar{g})) S | 0 \rangle \\ &= \text{Im } e^{i \text{Im}(\bar{g}', g)} \langle 0 | ((S^* a S + g') T_h - T_h (S^* a^\dagger S + \bar{g})) | 0 \rangle \\ &= \text{Im } e^{i \text{Im}(\bar{g}', g) - (1/2)|h|^2} \langle 0 | ((\Phi(a + h) + g') - (\bar{\Phi}(a^\dagger + \bar{h}) + \bar{g})) | 0 \rangle \\ &= \text{Im } e^{i \text{Im}(\bar{g}_{\omega'}(t), g_\omega(t)) - (1/2)|h|^2} (\Phi h - \bar{\Phi} \bar{h} + g_{\omega'}(t) - \bar{g}_\omega(t)), \end{aligned}$$

где

$$h = h_{\omega,\omega'}(t) = \Phi(g_\omega(t) - g_{\omega'}(t)) + \overline{\Psi(g_\omega(t) - g_{\omega'}(t))},$$

где $\Phi = \Phi^*$, $\Psi = \Psi^T$.

Таким образом может быть вычислено среднее значение тока и его дисперсия.

ЛЕММА 4. Пусть $\Upsilon = \Upsilon(t) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\Phi}_{A(t)} - \Psi_{A(t)}$ и $\mathbb{E}(1 + |g_\omega(t)|)^2 < \infty$. Тогда среднее значение тока и его дисперсия корректно определены формулами

$$\begin{aligned} I(t) &= \text{Im } \mathbb{E} e^{iS(t) + i \text{Im}(\bar{g}', g) - (1/2)|h|^2} \left(\sqrt{2} i \text{Im } \Phi h + \frac{g' - \bar{g}}{\sqrt{2}} \right), \\ D(t) &= -\frac{1}{2} p_{g,A}(t) \otimes p_{g,A}(t) + \frac{1}{2} \text{Im } \mathbb{E} e^{iS(t) + i \text{Im}(\bar{g}', g) - (1/2)|h|^2} \langle 0 | \bar{\Upsilon} \Upsilon^T \\ &\quad + (\bar{\Upsilon} h + 2i \text{Im } g') \otimes (\Upsilon \bar{h} + 2i \text{Im } \bar{g}) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (6.1)$$

В следующем пункте рассматривается решение задачи об эволюции сжатых состояний в скрещенных электрическом и магнитном полях.

7. Эволюция сжатых состояний в (E, H) -полях. Пусть $A = A^T$ и $C = C^*$ – $(n \times n)$ -матрицы, $f \in \mathbb{C}^n$, $m(dp)$ – вероятностная мера в $\mathbb{R}^n$, а $\phi(p): \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 2\pi)$ – фазовая функция, заданная по mod 2π .

Рассмотрим уравнение Шрёдингера $(i\partial_t + \hat{H})\psi = 0$ с гамильтонианом

$$\begin{aligned} \hat{H} &= H_2 + V(\hat{x}), \quad V(x) = \kappa \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(p,x) + i\phi(p)} m(dp), \quad \kappa > 0, \quad \text{Im } V = 0, \\ \hat{x} &= \frac{a^\dagger + a}{\sqrt{2}}, \quad H_2 = \frac{1}{2}((a^\dagger, Aa^\dagger) + (a, \bar{A}a)) + (a^\dagger, Ca) + (\bar{f}, a) + (f, a^\dagger). \end{aligned} \quad (7.1)$$

Для задач о движении в постоянных электрическом и магнитном полях коэффициенты A и C гамильтониана H_2 зависят только от магнитного поля, а зависимость от электрического поля входит в линейные члены. Будем предполагать, что мера $m(dq)$ имеет по крайней мере два первых конечных абсолютных момента.

Решение задачи Коши для уравнения Шрёдингера с гамильтонианом (7.1) удобно записать в представлении взаимодействия, порождаемом оператором H_2 :

$$\begin{aligned} (i\partial_t + H_2 + V(\hat{x}))\psi &= 0, \quad a_{-t}^\dagger = e^{-iH_2t} a^\dagger e^{iH_2t}, \quad a_{-t} = e^{-iH_2t} a e^{iH_2t}, \\ \hat{x}_t &= e^{-iH_2t} \hat{x} e^{iH_2t}, \quad \chi(t) = e^{-iH_2t} \psi, \quad (i\partial_t + V(\hat{x}_t))\chi = 0. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Нетрудно видеть, что функция χ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t \chi(t) = \kappa \int e^{(1/\sqrt{2})(q, (a_{-t}^\dagger + a_{-t})) + i(\phi(q) + (\pi/2))} \chi(t) m(dq), \quad \chi|_{t=0} = \psi|_{t=0}. \quad (7.3)$$

Обозначим через $\{\tau_k\}$ – случайные моменты, а через $\{q_k\}$ – случайные величины скачков однородного по t и p марковского процесса p_s , переходная вероятность которого описывается уравнением Колмогорова–Феллера

$$\partial_t P(\Gamma, t|x) = \kappa \int m(dq) (P(\Gamma, t|x+q) - P(\Gamma, t|x)), \quad P(\Gamma, 0|x) = I_\Gamma(x). \quad (7.4)$$

Воспользуемся непрерывной справа имеющей предел слева модификацией этого процесса (так называемым *cadlag* процессом). Известно, что такой процесс совершает n скачков за время t с вероятностью $P_n(t) = ((\kappa t)^n / n!) e^{-\kappa t}$, а вероятность $P(p_s - p_{s-0} \in A)$ совершить скачок, величина которого принадлежит множеству A , равна $m(A)$ [10; гл. XIV, § 7]. Отсюда следует (см. [11]) представление решения (7.3) в виде математического ожидания хронологического произведения случайных операторов:

$$\chi(t) = e^{\kappa t} \mathbb{E}_t \overleftarrow{\prod}_k e^{(i/\sqrt{2})(q_k, (a_{-t-\tau_k}^\dagger + a_{-t-\tau_k})) + i(\phi(q_k) + \pi/2)} \psi(0).$$

Число сомножителей в правой части случайное: в каждом сомножителе моменты скачков распределены равномерно на отрезке $[0, t]$ и упорядочены так, что операторы с большими τ_k действуют позже. Отсюда следует формула для решения уравнения Шрёдингера (7.2):

$$\psi(t) = e^{\kappa t} \mathbb{E}_t \overleftarrow{\prod}_k e^{(i/\sqrt{2})(q_k, (a_{t-\tau_k}^\dagger + a_{t-\tau_k})) + i(\phi(q_k) + \pi/2)} e^{iH_2t} \psi(0). \quad (7.5)$$

Поскольку моменты $\{\tau_k\}$ скачков распределены равномерно, такими же свойствами обладают $s_k = t - \tau_k$.

Преобразование $a \rightarrow a_t \stackrel{\text{def}}{=} e^{iH_2t} a e^{-iH_2t}$ является каноническим в том смысле, что $[a_k(t), a_j(t)] = 0$, $[a_k(t), a_j^\dagger(t)] = \delta_{kj}$ (см. [9; гл. I, § 4])

$$\dot{a}_t = i[H_2, a_t] = -i(A a_t^\dagger + C a_t + f), \quad \dot{a}_t^\dagger = i[H_2, a_t^\dagger] = i(\bar{A} a_t + \bar{C} a_t^\dagger + \bar{f}),$$

где $C = C^*$ и $\bar{C} = C^T$. Поэтому существуют $(n \times n)$ -матрицы $\{\Phi_t, \Psi_t\}$ такие, что

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} iC & iA \\ i\bar{A} & i\bar{C} \end{pmatrix}, \quad e^{-Gt} = \begin{pmatrix} \Phi_t & \Psi_t \\ \bar{\Psi}_t & \bar{\Phi}_t \end{pmatrix}, \quad e^{Gt} = \begin{pmatrix} \Phi_{-t} & \Psi_{-t} \\ \bar{\Psi}_{-t} & \bar{\Phi}_{-t} \end{pmatrix},$$

для которых выполнены условия

$$\Phi_t \Phi_s - \Psi_t \bar{\Psi}_s = \Phi_{t+s}, \quad \Phi_t \Psi_s - \Phi_t \bar{\Phi}_s = \Psi_{t+s}, \quad \Phi_0 = I, \quad \Psi_0 = 0,$$

гарантирующие сохранение канонических коммутационных соотношений для операторов рождения-уничтожения. При этом

$$\begin{pmatrix} a_t \\ a_t^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_t & \Psi_t \\ \bar{\Psi}_t & \bar{\Phi}_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -f_t \\ \bar{f}_t \end{pmatrix},$$

где

$$f_t \stackrel{\text{def}}{=} i \int_0^t (\Phi_\tau f - \Psi_\tau \bar{f}) ds.$$

Нетрудно выразить операторы $(1/\sqrt{2})(q, (a_t + a_t^\dagger))$ (см. (7.5)) в терминах матриц Φ_t и Ψ_t :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(q, (a_t + a_t^\dagger)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(((\bar{\Phi}_t + \Psi_t)^T q, a^\dagger) + ((\Phi_t + \bar{\Psi}_t)^T q, a)) + \sqrt{2}(q, \text{Re } f_t). \quad (7.6)$$

Для рассматриваемой ниже модельной задачи мы укажем явный вид f_t , Φ_t и Ψ_t .

Предположим, что упорядоченные по возрастанию случайные моменты скачков $\{s_k\}$ имеют распределение Пуассона с интенсивностью $\kappa > 0$, а случайные величины скачков $q_k = p_{s_k} - p_{s_k-0}$ не зависят от положения траектории p_s и имеют распределение, определяемое Фурье-образом потенциала $V(x)$: $P(q_k \in A) = m(A)$. Число скачков $K_t = K_t^\omega$ за время t является случайным и определяется из условия $s_{K_t} \leq t < s_{K_t+1}$.

Подставляя (7.6) в (7.5) и используя формулу композиции операторов сдвига $T_z T_g = e^{i \text{Im}(\bar{z}, g)} T_{z+g}$, можно представить $\psi(t)$ в виде среднего значения случайных унитарных когерентных преобразований, действующих на $e^{iH_2t}\psi(0)$.

ТЕОРЕМА 5. *Решение задачи Коши (7.5) имеет вид математического ожидания суперпозиции унитарных операций сжатия и случайных сдвигов*

$$\psi(t) = e^{\kappa t} \mathbf{E}_t e^{iW_t^\omega} T_{Z_t^\omega} e^{iH_2t} \psi(0), \quad z_k = \frac{(\bar{\Phi}_{s_k} + \Psi_{s_k})^T q_k}{\sqrt{2}}, \quad (7.7)$$

$$W_t^\omega = \sum_{k=1}^{K_t^\omega} \left(\sqrt{2}(q_k, \text{Im } f_{s_k}) + \text{Im} \left(\bar{z}_k, \sum_{j < k} z_j \right) + \phi(q_k) + \frac{\pi}{2} \right), \quad Z_t^\omega = i \sum_k z_k,$$

где f_t , Φ_t , Ψ_t – параметры канонического преобразования $a_t = \Phi_t a + \Psi_t a^\dagger - i f_t$, $a_{s_k} \in (0, t)$ и $q_k \in \mathbb{R}^n$ – независимые случайные величины.

Формула (7.7) показывает, что разрешающий оператор задачи Коши сохраняет класс сжатий, порождаемых квадратичной частью гамильтониана. Как мы увидим в задаче с магнитным полем, сжатия являются периодическими функциями времени, т.е. все случайные матрицы $\bar{\Phi}_{s_k}^* + \Psi_{s_k}^T$ принадлежат компактному множеству. Поэтому случайные сдвиги Z_t^ω имеют столько же конечных моментов, сколько и мера $m(dq)$, порождающая скачки пуассоновского процесса с интенсивностью κ :

$$\mathbb{E}|Z_t^\omega|^n \leq \sup_{s \leq t} \|\Phi_s^* + \Psi_s^T\|^n \mathbb{E}|q|^n e^{-\kappa t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\kappa^k t^k}{k!} = e^{-\kappa t} \sup_{s \leq t} \|\Phi_s^* + \Psi_s^T\|^n B_n(\kappa t) \mathbb{E}|q|^n,$$

где $B_n(x)$ – функции Белла: $e^{(e^t-1)x} = \sum (B_n(x)t^n/n!)$.

Рассмотрим случай, когда начальное условие $\psi(0)$ является сжатым состоянием. Обозначим через $U_{g,A} = T_g S_A$ композицию сдвига и сжатия, Φ_A, Ψ_A – матрицы соответствующего канонического преобразования, $\psi(0) = U_{g,A}|0\rangle$ – начальное условие. Унитарному оператору $e^{iH_2 t} U_{g,A}$ соответствует композиция канонических преобразований. Вычислим параметры сжатого состояния $U_{H,t}\psi(0) = e^{iH_2 t}|g, A\rangle$:

$$\begin{aligned} a &\xrightarrow{U_{g,A}} U_{g,A}^* a U_{g,A} = \Phi_A a - \Psi_A a^\dagger + g \\ &\xrightarrow{U_{H,t}} \Phi_A(\Phi_t a - \Psi_t a^\dagger - i f_t) - \Psi_A(\bar{\Phi}_t a^\dagger - \bar{\Psi}_t a + i \bar{f}_t) + g \\ &= (\Phi_A \Phi_t + \Psi_A \bar{\Psi}_t) a - (\Phi_A \Psi_t + \Psi_A \bar{\Phi}_t) a^\dagger - i(\Phi_A f_t + \Psi_A \bar{f}_t) + g \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \Phi_{A,t} a + \Psi_{A,t} a^\dagger + h_{A,t} = U_{H,t}^* U_{g,A}^* a U_{g,A} U_{H,t} \stackrel{\text{def}}{=} a_{A,t}. \end{aligned}$$

Отсюда найдем параметры канонического преобразования для композиции $U_{H,t} U_{g,A}$:

$$\Phi_{A,t} = \Phi_A \Phi_t + \Psi_A \bar{\Psi}_t, \quad \Psi_{A,t} = \Phi_A \Psi_t + \Psi_A \bar{\Phi}_t, \quad h_{A,t} = g - i(\Phi_A f_t + \Psi_A \bar{f}_t).$$

Вакуумным вектором для найденного оператора уничтожения $a_{A,t}$ является вектор

$$\psi_{A,h,t} = c_{R,f} e^{-(1/2)(a^\dagger, R_t a^\dagger) + (r, a^\dagger)} |0\rangle, \quad f_h = -\Phi_{A,t}^{-1} h_{A,t}, \quad R_t \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_{A,t}^{-1} \Psi_{A,t}, \quad (7.8)$$

который в силу леммы 1 с точностью до скалярного унитарного множителя можно представить в виде сжатого состояния $|z_t, A(t)\rangle$:

$$A(t) \stackrel{\text{def}}{=} U_{R_t} \operatorname{arctanh} |R_t|, \quad z_t \stackrel{\text{def}}{=} (I - R_t R_t^*)^{-1} (f_h - R_t \bar{f}_h) = \Phi_{A,t}^* (\Phi_{A,t} f_h - \Psi_{A,t} \bar{f}_h). \quad (7.9)$$

Для завершения вывода формулы разрешающего оператора уравнения Шрёдингера остается заметить, что композиция операторов когерентного сдвига в формулах (7.7) и (7.9) вычисляется по формуле Бейкера–Хаусдорфа

$$e^{(Z_t^\omega, a^\dagger) - (\bar{Z}_t^\omega, a)} e^{(z_t, a^\dagger) - (\bar{z}_t, a)} = e^{(w_t, a^\dagger) - (\bar{w}_t, a) + i \operatorname{Im}(\bar{Z}_t^\omega, z_t)}, \quad g^\omega(t) \stackrel{\text{def}}{=} Z_t^\omega + z_t.$$

Индексом ω отмечены случайные величины. Поскольку скалярные унитарные множители не влияют на квантовые средние значения наблюдаемых, можно воспользоваться теоремой 4 и вычислить величину среднего тока, полагая

$$s_\omega(t) \stackrel{\text{def}}{=} -i\kappa + W_t^\omega + \operatorname{Im}(\bar{Z}_t^\omega, z_t).$$

ТЕОРЕМА 6. *Решение задачи Коши для уравнения Шрёдингера с гамильтонианом (7.1) имеет вид математического ожидания по случайным сдвигам фазы и случайным когерентным сдвигам сжатого состояния:*

$$\begin{aligned}\psi(t) &= e^{\kappa t} \mathbf{E}_t e^{i(W_t^\omega + \text{Im}(\bar{Z}_t^\omega, z_t))} e^{(z_t + Z_t^\omega, a^\dagger) - (\overline{z_t + Z_t^\omega}, a)} e^{-(1/2)(a^\dagger, \rho_t a^\dagger) + (1/2)(a, \bar{\rho}_t a)} |0\rangle \\ &= \mathbf{E}_t e^{\kappa t + i(W_t^\omega + \text{Im}(\bar{Z}_t^\omega, z_t))} |z_t + Z_t^\omega, A(t)\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}_t e^{is_\omega(t)} |g^\omega(t), A(t)\rangle,\end{aligned}\quad (7.10)$$

где случайные Z_t^ω , W_t^ω и неслучайные $A(t)$, z_t определены формулами (7.7), (7.8) и (7.9) соответственно. Величина среднего тока может быть вычислена по формуле (6.1) с определенными выше $A(t)$, $g^\omega(t)$, $s^\omega(t)$ при условии, что мера скачков $m(dq)$ имеет по крайней мере один конечный абсолютный момент.

В качестве примера рассмотрим модельный гамильтониан

$$\begin{aligned}\hat{H} &= H_2 + V_n(hx), \quad \text{где} \quad H_2 = \frac{1}{2}((p_1 + Hx_2)^2 + p_2^2) + E_1 x_1 + E_2 x_2, \\ V_n(x) &= V_0 \frac{(3 - v(x))^n}{4^n}, \quad v(x) = \cos x_1 + \cos \frac{x_1 + x_2 \sqrt{3}}{2} + \cos \frac{x_1 - x_2 \sqrt{3}}{2},\end{aligned}\quad (7.11)$$

$x \in \mathbb{R}^2$, $v(x)$ – функция, моделирующая плоскую углеродную решетку, инвариантна относительно поворотов на угол $\pi/3$ вокруг начала координат и сдвигов на 2π по оси x_1 и на $4\pi/\sqrt{3}$ по оси x_2 ; $\max v|_{x_2=0} = 1\frac{1}{8}$, $\max v|_{x_1=0} = 1$.

Фурье-образ функции $V_1(x)$ равен линейной комбинации дельта-функций в точках $\{0, 0\}$, $\{\pm 1, 0\}$, $\{\pm 1/2, \pm 1\sqrt{3}/2\}$. Шесть последних точек удобно рассматривать как конечные точки равновероятных переходов из точки $\{0, 0\}$. Марковский процесс, позволяющий представить потенциал $V_n(x)$ в виде $V_n(x) = \kappa_n \mathbf{E} e^{iqx + i\phi_n(q)}$, где $q \in \mathbb{R}^2$ – случайный вектор, выглядит как последовательность суперпозиций n шагов симметричного блуждания по плоской сетке с тремя образующими, пересекающимися под углами $\pi/3$ и единичным ребром, причем переход в соседние узлы ($\sum_{y \neq x} P_{x \rightarrow y} = 1/2$) и сохранение исходного состояния равновероятны ($P_{x \rightarrow x} = 1/2$). Если происходит переход, то $y - x = q \neq 0$ и фаза меняется на $\phi_n(q) = \pi$, если процесс сохраняет состояние, то $\phi_n(0) = 0$. Случайные скачки такого процесса имеют конечные абсолютные моменты любого порядка.

Гамильтониан H_2 описывает электрон в скрещенных однородных электрическом и магнитном полях без учета спина. Для упрощения обозначений уравнение Шрёдингера написано в предположении, что $m = 1$, $c = 1$, $e = 1$. Уравнение Шрёдингера с модельным гамильтонианом $\hat{H}$ описывает динамику электрона в кристаллической углеродной пленке под действием электрического поля с компонентами (E_1, E_2) в плоскости пленки и перпендикулярного магнитного поля H .

В представлении вторичного квантования квадратичная часть H_2 гамильтониана (7.11) имеет матричные коэффициенты

$$A = A^T = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -iH \\ -iH & H^2 - 1 \end{pmatrix}, \quad C = C^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & iH \\ -iH & H^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

В случае $H = 0$ матрицы Φ_t , Ψ_t , R_t пропорциональны единичной с коэффициентами

$$\phi(t) = 1 - \frac{it}{2}, \quad \psi(t) = \frac{it}{2}, \quad r_A(t) = \frac{it}{2 - it}, \quad f_k(t) = -\frac{it}{\sqrt{2}} E_k (1 + it/2).$$

В общем случае матрицы Φ_t , Ψ_t и приведенный сдвиг f_t также вычисляются явно; сжатие R_t выражается через матрицы Φ_t , Ψ_t , которые, как показывают приводимые

ниже формулы, не зависят от электрического поля, а их зависимость от магнитного поля имеет период $T = 4\pi/H$:

$$\begin{aligned}\Phi_t &= \frac{1}{2H} \begin{pmatrix} 2H - i \sin Ht & -i(1 - \cos Ht) + H \sin Ht \\ i(1 - \cos Ht) - H \sin Ht & 2H \cos Ht - i(1 + H^2) \sin Ht \end{pmatrix}, \\ \Psi_t &= \frac{1}{2H} \begin{pmatrix} i \sin Ht & i(1 - \cos Ht) + H \sin Ht \\ -i(1 - \cos Ht) + H \sin Ht & i(1 + H^2) \sin Ht \end{pmatrix}, \\ R_t &= \Phi_t^{-1} \Psi_t = -\frac{\sin(Ht/2)}{1 + H^2 + iH \cos(Ht/2)} \begin{pmatrix} 1 & iH \\ iH & 1 - \frac{iH^3 \cos(Ht/2)}{iH \cos(Ht/2) + \sin(Ht/2)} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Следствием периодической зависимости R_t от времени является *компактность* и *гладкость* многообразия матриц, задающих сжатия. В частности, $R_t = R_0$ в моменты $t = kT$, $k = 1, 2, \dots$, что упрощает численное решение задачи в указанные моменты.

Авторы выражают благодарность профессорам Д. С. Агарвалу, В. В. Додонову, А. С. Холево и В. И. Манько за внимание к работе и полезное обсуждение результатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] C. M. Caves, “Quantum mechanical noise in an interferometer”, *Phys. Rev. D*, **23**:8 (1981), 1693–1708.
- [2] M. Hillery, M. Zubairy, “Path-integral approach to problems in quantum optics”, *Phys. Rev. A* (3), **26**:1 (1982), 451–460.
- [3] G. D’Ariano, S. Morosi, M. Rasetti, J. Katriel, A. I. Solomon, “Squeezing versus photon-number fluctuations”, *Phys. Rev. D*, **36**:8 (1987), 2399–2407.
- [4] V. V. Dodonov, ““Nonclassical” states in quantum optics: a “squeezed” review of the first 75 years”, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, **4**:1 (2002), R1–R33.
- [5] M. O. Scully, M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [6] G. S. Agarwal, “Wigner-function description of quantum noise in interferometers”, *J. Modern Opt.*, **34**:6-7 (1987), 909–921.
- [7] H. Sumei, G. S. Agarwal, *Squeezing of a Nanomechanical Oscillator*, arXiv:0905.4234.
- [8] Д. А. Киржниц, *Полевые методы теории многих частиц*, Госатомиздат, М., 1963.
- [9] Ф. А. Березин, *Метод вторичного квантования*, Наука, М., 1986.
- [10] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2, Мир, М., 1967.
- [11] А. В. Поляков, А. М. Чеботарев, “Метод Монте-Карло для уравнения Шрёдингера с периодическим асимметричным потенциалом”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **44**:10 (2004), 1898–1908.

А. М. Чеботарев

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: chebotarev@phys.msu.ru

Поступило

17.10.2010

Исправленный вариант

18.11.2010

Т. В. Тлячев

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: timattv@gmail.com

А. А. Радионов

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: alex.radionov@gmail.com