Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Колпакова, О новых оценках остаточного члена асимптотической формулы в многомерной проблеме делителей Дирихле, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 4, 530–546

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9097>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 17:35:19

УДК 511.335

О новых оценках

остаточного члена асимптотической формулы в многомерной проблеме делителей Дирихле

О. В. Колпакова

В статье найдено новое значение постоянной А. А. Карацубы в многомерной проблеме делителей Дирихле. Указано также новое значение показателя степени основного параметра в оценке среднего значения остатка в данной асимптотике. Доказательство основных утверждений статьи основаны на выводе новой оценки абсциссы Карлсона в теории дзета-функции Римана.

Библиография: 25 названий.

Основным аспектом проблемы делителей является задача получения новых оценок остаточного члена $\Delta_k(x)$ в асимптотической формуле для сумматорной функции делителей вида

$$D_k(x) = \sum_{n \leq x} \tau_k(n) = xP_{k-1}(\ln x) + \Delta_k(x).$$

Здесь предполагается, что $x \rightarrow \infty$, и функция $P_{k-1}(y)$ представляет собой некоторый многочлен с вещественными коэффициентами степени $k-1$ от аргумента $y = \ln x$.

Верхней оценкой остатка $\Delta_k(x)$ при различных значениях величины k занимались многие известные математики. Дирихле в работе [1] в 1849 г. получил оценку вида

$$\Delta_2(x) \ll_{\varepsilon} x^{1/2+\varepsilon}.$$

Также можно указать на работы Вороного [2], Ландау [3], Харди и Литтлвуда [4], ван дер Корпута [5], Тонга [6], Вальфиша [7], Аткинсона [8], Чи Джан Тао [9], Рихерта [10], Чен Джин Рана [11], Карацубы [12], Колесника [13], а также на работы Ивича [14], Ивича и Уелета [15] и Баядилова [16].

В исследованиях по верхним оценкам остатка $\Delta_k(x)$ используется стандартное обозначение показателя α_k , понимаемое как наименьшее вещественное число, обладающее свойством, что при $x \rightarrow \infty$ справедлива оценка вида

$$\Delta_k(x) \ll_{\varepsilon} x^{\alpha_k+\varepsilon}.$$

Современные оценки величины α_k приведены в работе [15]. В предположении справедливости оценки

$$\zeta(\sigma + it) \ll t^{a(1-\sigma)^{3/2}} \ln^{2/3} t$$

в этой работе доказано, что

$$\alpha_k \leq 1 - \frac{1}{3} 2^{2/3} (ak)^{-2/3}.$$

Здесь $a > 0$ – некоторая постоянная, значение которой последовательно улучшается. Последние оценки для параметра a дают значения $a \leq 15.21$, полученное Баядиловым [16], и $a = 4.45$, полученное Фордом [17]. Что же касается числа k , которое характеризует размерность функции делителей $\tau_k(n)$, то, хотя формально можно считать, что k принимает все натуральные значения, но фактически применение этой оценки целесообразно только при достаточно больших значениях k , например, $k > 50$, ввиду того, что существующие оценки параметра a еще не достаточно хороши.

Остановимся на истории получения последней оценки для α_k . В 1960 г. Рихерт доказал [18], что имеет место оценка вида

$$\alpha_k \leq 1 - ck^{-2/3},$$

причем числовое значение константы c не было указано. В 1971 г. Карацуба [19] установил справедливость этой оценки при

$$c = c_0 a^{2/3}, \quad \text{где} \quad c_0 = 2^{-5/3} \approx 0.31498.$$

Постоянную c_0 в этой оценке будем называть *константой Карацубы*. Фуджи в работе [20] уточнил величину c_0 , указав значение

$$c_0 = 2^{-1/2} (\sqrt{8} - 1)^{-1/3} \approx 0.57826.$$

Упомянутый выше результат Ивича и Уелета [15] соответствует значению

$$c_0 = \frac{1}{3} 2^{2/3} \approx 0.52913.$$

В 2001 г. Баядилов в работе [16] получил оценку вида

$$\alpha_k \leq 1 - \left(\frac{2}{3a(k - 2k_0)} \right)^{2/3} \left(1 + \frac{1}{a\sqrt{k - 2k_0}} \right)^{-1}, \quad \text{где} \quad k_0 = 44 - \left\lfloor \frac{22}{a} \right\rfloor,$$

которая означает, что $c_0 = (2/3)^{2/3} + \delta$ при любом $\delta > 0$ для всех $k \geq h(\delta)$, где $h(\delta) > 0$ – некоторая функция, зависящая от δ .

В данной статье найдено новое значение константы Карацубы вида

$$c_0 = (2/3)^{2/3} \approx 0.763143.$$

Данное значение c_0 является улучшением не только результата Ивича и Уелета, но и опубликованных результатов Фуджи [20] и Пантелеевой [21] вида $c_0 = 2^{2/3} \approx 0.62996$.

Определим величину β_k как точную нижнюю грань чисел $\beta > 0$ таких, что при $x \rightarrow \infty$ справедливо неравенство

$$x^{-1} \int_1^x \Delta_k^2(x) dx \ll x^{2\beta}.$$

В уже упоминавшейся работе [15] получена следующая оценка величины β_k :

$$\beta_k \leq 1 - \frac{2}{3}(ak)^{-2/3}$$

в предположении, что

$$\zeta(\sigma + it) \ll t^{a(1-\sigma)^{3/2}} (\ln t)^{2/3}.$$

Последняя оценка величины β_k при $k \geq 93$ улучшена в настоящей статье, а именно, получена следующая оценка:

$$\beta_k \leq 1 - \left(\frac{b}{3ak_2} \right)^{2/3}, \quad \text{где } k_2 = k - k_1, \quad k_1 = 79.95, \quad a = 4.45, \quad b = 2.5.$$

Сравнение этого результата с последней приведенной оценкой из работы [15] показывает, что константа $2/3 = 0.666\dots$ улучшена до значения $(5/6)^{2/3} \approx 0.885549$. Получение нового значения константы Карацубы опирается на новые оценки моментов дзета-функции Римана, которые получены в настоящей статье. Доказаны теоремы о новых оценках абсциссы и экспоненты Карлсона. Также потребовалось получить обобщение известной теоремы Карлсона об оценке абсциссы Карлсона σ_k с целых значений k на случай произвольных вещественных значений k .

Переходим к точным формулировкам и доказательствам.

ТЕОРЕМА 1. Пусть k – любое вещественное число, $k > 4$ и σ_k – нижняя грань чисел σ таких, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется оценка

$$\frac{1}{T} \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt \ll_\varepsilon T^\varepsilon.$$

Тогда

$$\sigma_k \leq f = \max_{\alpha \in [1/2, 1)} \left(1 - \frac{1 - \alpha}{1 + \mu_k(\alpha)} \right)$$

при условии, что для данного k выполнено неравенство $2k\mu(f) + A(f)(1 - f) \leq 1$. Здесь при $\sigma \in [0, 1]$ функция

$$\mu(\sigma) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |\zeta(\sigma + it)|}{\log t}, \quad \mu_k(\sigma) = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\log T^{-1} \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt}{\log T},$$

а величина $A(\sigma)$ обозначает невозрастающую функцию, удовлетворяющую условиям

- 1) $0 < A(\sigma)(1 - \sigma) \leq 1$,
- 2) $N(\sigma, T) \ll_\varepsilon T^{A(\sigma)(1-\sigma)+\varepsilon}$.

Для доказательства теоремы нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 1. Пусть ряд $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n/n^s)$ абсолютно сходится при $\sigma > 1$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} e^{-\delta n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(w-s) f(w) \delta^{s-w} dw,$$

для $\delta > 0$, $c > 1$, $c > \sigma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. См. [22; с. 151].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Рассмотрим вертикальную прямую $\operatorname{Re}(s) = \sigma$ с условиями

$$1 - \frac{1 - \alpha}{1 + \mu_k(\alpha)} < \sigma < 1 \quad \text{и} \quad 2k\mu(\sigma) + A(\sigma)(1 - \sigma) \leq 1.$$

Нам достаточно доказать, что

$$\int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt \ll_{\varepsilon} T^{1+\varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно мало. Заметим, что в силу условий, указанных выше, $\alpha < \sigma$. Положим $w = u + iv$, $s = \sigma + it$. Далее, применяя лемму 1 при $a_n = \tau_k(n)$, $f(s) = \zeta^k(s)$ и $c = 2 - \sigma$, где $\tau_k(n)$ – коэффициенты ряда $\zeta^k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (\tau_k(n)/n^s)$ при $\operatorname{Re}(s) > 1$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_k(n)}{n^s} e^{-\delta n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-\sigma-i\infty}^{2-\sigma+i\infty} \Gamma(w-s) \zeta^k(w) \delta^{s-w} dw.$$

Покажем, что можно рассматривать интеграл не на всей прямой, а на отрезке длиной $2h$, где $h = 10(k+1) \ln T$, т.е. $v \in [t-h, t+h]$.

Оценим остаток интеграла R_0 , где

$$\begin{aligned} R_0 &= \int_{2-\sigma-i\infty}^{2-\sigma+i(t-h)} \Gamma(w-s) \zeta^k(w) \delta^{s-w} dw \\ &\quad + \int_{2-\sigma+i(t+h)}^{2-\sigma+i\infty} \Gamma(w-s) \zeta^k(w) \delta^{s-w} dw = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Имеет место следующая оценка: $|\Gamma(\sigma + it)| \ll |t|^{\sigma-1/2} e^{-(\pi/2)|t|}$. Таким образом, в нашем случае получаем, что $|\Gamma(w-s)| \ll |v-t|^{2-2\sigma-1/2} e^{-(\pi/2)|v-t|}$.

Далее,

$$|\zeta^k(2-\sigma+it)| = \left| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-\sigma+it}} \right)^k \right| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-\sigma}} \right)^k = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \right)^k \ll 1,$$

так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^{\alpha})$ сходится при $\alpha > 1$, а в нашем случае $\alpha = 2 - \sigma > 1$, так как $\sigma < 1$.

Оценим отдельно интегралы I_1 и I_2 . Сначала оценим I_2 . Поскольку $1/2 < \sigma < 1$, то $|v-t|^{3/2-2\sigma} < |v-t|$, откуда

$$\begin{aligned} |I_2| &\ll \int_{t+h}^{\infty} |v-t|^{2-2\sigma-1/2} e^{-(\pi/2)|v-t|} \delta^{\sigma-2+\sigma} dv \\ &= \delta^{2(\sigma-1)} \int_h^{\infty} x e^{-(\pi/2)x} dx = \delta^{2(\sigma-1)} T^{-15(k+1)}. \end{aligned}$$

При вычислении последнего интеграла мы воспользовались неравенством

$$x \ll e^{(\pi/2-1,5)x} \quad \text{при} \quad x > 0.$$

Интеграл I_1 оценивается так же, следовательно,

$$R_0 = I_1 + I_2 \ll \delta^{2(\sigma-1)} T^{-15(k+1)}.$$

Отрезок $I = [T/2, T]$ разобьем на два множества E_1 и E_2 . Для этого каждую ординату γ_r нуля ρ_r дзета-функции в критической полосе с условием $\rho_r = \beta_r + i\gamma_r$, $\beta_r \geq \alpha$, $T/2 \leq \gamma_r \leq T$ окружим окрестностью $I_\rho = [\gamma_r - h, \gamma_r + h]$. Определим множества E_1 и E_2 :

$$E_1 = I \cap \left(\bigcup_{\gamma_r \in I} I_\rho \right), \quad E_2 = I \setminus E_1.$$

Имеем

$$\int_{T/2}^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt = \int_{E_1} |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt + \int_{E_2} |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt = B_1 + B_2.$$

Сначала оценим величину B_1 . Заметим, что множество E_1 можно представить как объединение промежутков $I_1, \dots, I_m$, длины и количество которых не превосходят $2h$ и $N(\alpha, T)$ соответственно. Тогда величину B_1 можно записать в виде

$$B_1 = \sum_{r=1}^m \int_{I_r} |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt = \sum_{r=1}^m D_r.$$

Оценим каждую величину D_r . Для этого воспользуемся следующей оценкой дзета-функции в критической полосе: $|\zeta(\sigma + it)| \ll_\varepsilon T^{\mu(\sigma)+\varepsilon}$. Отсюда имеем

$$D_r = \int_{I_r} |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt \leq T^{2k\mu(\sigma)+\varepsilon}.$$

Суммируя по всем значениям $r = 1, \dots, m$, находим

$$B_1 \ll N(\sigma, T) T^{2k\mu(\sigma)+\varepsilon} \ll T^{A(\sigma)(1-\sigma)+2k\mu(\sigma)+\varepsilon} \ll T^{1+\varepsilon},$$

так как по условию теоремы выполняется неравенство $A(\sigma)(1-\sigma) + 2k\mu(\sigma) \leq 1$.

Оценим величину B_2 . Заменяя контур интегрирования $\operatorname{Re}(w) = 2 - \sigma$ на прямую

$$\operatorname{Re}(w) = \alpha, \quad \text{где } \sigma - 1 < \alpha < \sigma,$$

мы перейдем через полюс функции $\Gamma(w - s)$ в точке $w = s$ с вычетом $\zeta^k(s)$ (как и в случае $k \in \mathbb{Z}$). Отметим, что через полюс функции $\zeta^k(w)$ в точке $w = 1$ мы не пройдем, так как интегрируем функцию в полосе шириной $2h$, причем $T/2 > h$ при $T > T_0$, где величина T_0 достаточно велика. В силу выбора множества E_2 нули $\zeta(w)$ в этом случае не захватываются. Тогда получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_k(n)}{n^s} e^{-\delta n} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha+i(t-h)}^{\alpha+i(t+h)} \Gamma(w-s) \zeta^k(w) \delta^{s-w} dw + \zeta^k(s) + R_0, \\ \zeta^k(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_k(n)}{n^s} e^{-\delta n} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha+i(t-h)}^{\alpha+i(t+h)} \Gamma(w-s) \zeta^k(w) \delta^{s-w} dw - R_0 = Z_1 - Z_2 - R_0. \end{aligned}$$

Пусть $\sigma > 1/2$. Следуя рассуждениям, проводимым при доказательстве теорем о средних значениях для рядов Дирихле в [22; гл. 7], получаем

$$\int_{T/2}^T |\zeta(s)|^{2k} dt = O(T) + O(\delta^{2\sigma-2-\varepsilon}) + O(\delta^{2\sigma-2\alpha} T^{1+\mu_k(\alpha)+\varepsilon}),$$

$$\int_{T/2}^T |Z_1|^2 dt = O(T) + O(\delta^{2\sigma-2-\varepsilon}), \quad \int_{T/2}^T |Z_2|^2 dt \ll \delta^{2(\sigma-\alpha)} T^{\mu_k(\alpha)+1+\varepsilon}.$$

Далее, рассмотрим интеграл

$$\int_{T/2}^T |R_0|^2 dt \ll \delta^{4(\sigma-1)} T^{-30(k+1)+1} \ll T.$$

Следовательно, справедлива оценка

$$|B_2| = \int_{E_2} |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt \leq \int_{T/2}^T |Z_1|^2 dt + \int_{T/2}^T |Z_2|^2 dt + \int_{T/2}^T |R_0|^2 dt$$

$$\leq O(T) + O(\delta^{2\sigma-2-\varepsilon}) + O(\delta^{2\sigma-2\alpha} T^{1+\mu_k(\alpha)+\varepsilon}).$$

Таким образом, получаем оценку интеграла

$$\int_{T/2}^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt \ll O(T) + O(\delta^{2\sigma-2-\varepsilon}) + O(\delta^{2\sigma-2\alpha} T^{1+\mu_k(\alpha)+\varepsilon}).$$

Положим $\delta = T^{-(1+\mu_k(\alpha))/(2(1-\alpha))}$ для того, чтобы последние два члена имели с точностью до ε один и тот же порядок. Эти члены будут оцениваться как $O(T)$, если

$$\sigma > \max_{\alpha \in [1/2, 1)} \left(1 - \frac{1-\alpha}{1+\mu_k(\alpha)} \right).$$

Заменяя T для этих значений σ на $T/2, T/4, \dots$ и складывая получившиеся интегралы, убеждаемся, что утверждение теоремы справедливо. Следовательно, σ_k меньше, чем одно из таких значений σ , и теорема доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $1 \leq a \leq 20$, $|\zeta(\sigma + it)| \leq t^{a(1-\sigma)^{3/2}}$. Тогда для всех $\sigma \in [0.9, 1)$ будет выполняться

$$N(\sigma, T) \ll t^{ab(1-\sigma)^{3/2}}, \quad \text{где } b = \frac{7}{6} 5^{3/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства нам потребуется следующая

ЛЕММА 3. Пусть

$$M(\alpha, T) = \max_{1 \leq t \leq T} |\zeta(\alpha + it)| \quad \text{при } \alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right].$$

Тогда для всех $\sigma \in [0.9, 1]$ имеем

$$N(\sigma, T) \ll (M(5\sigma - 4, 3T))^{7/6} \log^{169/12} T.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. См. [23; с. 277].

Итак, возвращаясь к доказательству леммы 2, имеем $M(\alpha, T) \leq t^{a(1-\sigma)^{3/2}}$, а следовательно,

$$M(1 - 5(1 - \sigma), T) \leq t^{a(5(1-\sigma))^{3/2}} = t^{a5^{3/2}(1-\sigma)^{3/2}}.$$

Отсюда получаем, что

$$N(\sigma, T) \leq (M(5\sigma - 4, T))^{7/6} \leq t^{a(7/6)5^{3/2}(1-\sigma)^{3/2}} = t^{ab(1-\sigma)^{3/2}}.$$

Лемма 2 доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть k – любое вещественное число, $k > 0$. Пусть также при некотором a , где $1 \leq a \leq 20$, и всех $t \geq 1$ и $\sigma \in (0.9, 1)$ выполняется оценка

$$\zeta(\sigma + it) \ll t^{a(1-\sigma)^{3/2}} (\ln t)^{2/3}.$$

Тогда для любого $\alpha \in (0.9, 1)$ справедливо неравенство

$$\sigma_k \leq \max\left(1 - \frac{1}{(a(b + 2k))^{2/3}}, 1 - \frac{1 - \alpha}{1 + \mu_k(\alpha)}\right)$$

в предположении, что $b = (7/6)5^{3/2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы 2 нам достаточно проверить, что выполняется неравенство $2k\mu(\sigma) + A(\sigma)(1 - \sigma) < 1$ при всех σ с условием

$$\sigma > \max\left(1 - \frac{1}{(a(b + 2k))^{2/3}}, 1 - \frac{1 - \alpha}{1 + \mu_k(\alpha)}\right).$$

Действительно,

$$\mu(\sigma) = a(1 - \sigma)^{3/2}, \quad A(\sigma)(1 - \sigma) = ab(1 - \sigma)^{3/2}.$$

Следовательно, подставляя эти выражения в неравенство и выполняя ряд равносильных преобразований, получим, что $\sigma > 1 - 1/(a(2k + b))^{2/3}$. Последнее неравенство верно в силу условия теоремы. Таким образом, теорема 2 доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть при некотором a , где $1 \leq a \leq 20$, $t \geq 1$ и всех $\sigma \in (0.9, 1)$ выполняется оценка

$$\zeta(\sigma + it) \ll t^{a(1-\sigma)^{3/2}}.$$

Далее, пусть при всех $r_1 > 0$ и $r > r_0 \geq b + r_1$, где $b = (7/6)5^{3/2}$ и при любом ε_0 с условием $0 < \varepsilon_0 < 1$ для величины σ_r имеет место оценка вида

$$\sigma_r \leq f_{r-r_1} = 1 - \frac{1}{(3d(r - r_1))^{2/3}}, \quad \text{где } d = a + \varepsilon_0.$$

Тогда для любого достаточно малого положительного $\Delta \leq \Delta_0(r, \varepsilon_0)$ имеет место оценка вида

$$\sigma_{r+\Delta} \leq f_{r-r_1+\Delta} = 1 - \frac{1}{(3d(r - r_1 + \Delta))^{2/3}}.$$

Величина $\Delta_0(r, \varepsilon_0)$ определяется равенством $\Delta_0(r, \varepsilon_0) = (r - r_1)\varepsilon_0/(a + \varepsilon_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r_2 = r - r_1$. Рассмотрим величину $\sigma_{r_2+\Delta}$. По теореме 2 для нее имеет место оценка

$$\sigma_{r_2+\Delta} \leq \max\left(1 - \frac{1}{(a(b + 2(r_2 + \Delta)))^{2/3}}, 1 - \frac{1 - \alpha}{1 + \mu_{r_2+\Delta}(\alpha)}\right).$$

Покажем, что выполняется следующее неравенство:

$$f_{r_2} = 1 - \frac{1}{(3ar_2)^{2/3}} \geq 1 - \frac{1}{(a(b + 2r_2))^{2/3}}.$$

Действительно, выполняя равносильные преобразования, приходим к неравенству $r_2 \geq b$, которое следует из условия теоремы. Поскольку значение параметра α можно выбрать по своему усмотрению, поэтому выберем для параметра α значение

$$\alpha = \alpha_{r_2} = 1 - \frac{1}{(3dr_2)^{2/3}} = f_{r_2}.$$

Тогда $1 - \alpha = 1 - \alpha_{r_2} = 1/(3dr_2)^{2/3}$. В силу выбора параметра α и приведенных выше рассуждений замечаем, что

$$\max\left(1 - \frac{1}{(a(b + 2(r_2 + \Delta)))^{2/3}}, 1 - \frac{1 - \alpha}{1 + \mu_{r_2+\Delta}(\alpha)}\right) = 1 - \frac{1 - \alpha}{1 + \mu_{r_2+\Delta}(\alpha)}.$$

Далее, оценим значение $\mu_{r_2+\Delta}(\alpha_{r_2})$. Для нахождения требуемой оценки $\mu_{r_2+\Delta}(\alpha_{r_2})$ воспользуемся оценкой $\zeta(s)$ в критической полосе $\zeta(\sigma + it) \ll t^{a(1-\sigma)^{3/2}}$. Тогда получим

$$\frac{1}{T} \int_1^T |\zeta(\alpha_{r_2} + it)|^{2r_2+2\Delta} dt \ll T^{2a\Delta(1-\alpha_{r_2})^{3/2}} \left(\frac{1}{T} \int_1^T |\zeta(\alpha_{r_2} + it)|^{2r_2} dt \right).$$

Поскольку $\alpha_{r_2} = f_{r_2}$, то по условию теоремы $\sigma_{r_2} \leq \alpha_{r_2}$. Поэтому из определения величины σ_{r_2} имеем

$$\frac{1}{T} \int_1^T |\zeta(\alpha_{r_2} + it)|^{2r_2} dt \ll_\varepsilon T^\varepsilon.$$

Из этого следует, что

$$\frac{1}{T} \int_1^T |\zeta(\alpha_{r_2} + it)|^{2r_2+2\Delta} dt \ll T^{2a\Delta(1-\alpha_{r_2})^{2/3+\varepsilon}}.$$

Таким образом, по определению величины $\mu_{r_2+\Delta}(\alpha_{r_2})$ получаем

$$\mu_{r_2+\Delta}(\alpha_{r_2}) \leq 2a\Delta(1 - \alpha_{r_2})^{2/3} = \frac{2a\Delta}{3dr_2}.$$

Далее, подставим полученную оценку $\mu_{r_2+\Delta}(\alpha_{r_2})$ в неравенство для $\sigma_{r_2+\Delta}$ и будем иметь

$$\sigma_{r_2+\Delta} \leq 1 - \frac{1 - \alpha_{r_2}}{1 + 2a\Delta/(3dr_2)} = 1 - \frac{1/(3dr_2)^{2/3}}{1 + 2a\Delta/(3dr_2)} = 1 - \frac{1}{(3dr_2)^{2/3}(1 + 2a\Delta/(3dr_2))}.$$

Нам надо доказать, что $\sigma_{r_2+\Delta} \leq \alpha_{r_2+\Delta}$. Поскольку $\alpha_{r_2+\Delta} = 1 - 1/(3d(r_2 + \Delta))^{2/3}$, то надо доказать, что выполняется неравенство

$$1 - \frac{1}{(3dr_2)^{2/3}(1 + 2a\Delta/(3dr_2))} < 1 - \frac{1}{(3d(r_2 + \Delta))^{2/3}}.$$

Производя ряд равносильных преобразований, приходим к условию $\Delta/r_2 < \varepsilon_0/d$, при котором данное неравенство имеет место, где $\varepsilon_0 = a - d$. Но поскольку выполнено $\Delta_0(r_2, \varepsilon_0) = r_2\varepsilon_0/(a + \varepsilon_0)$, то требуемое неравенство действительно имеет место. Теорема 3 доказана.

ТЕОРЕМА 4. В условиях теоремы 3 при $r_2 = r - r_1 \geq 40$ для величины σ_{r_2} имеет место оценка

$$\sigma_{r_2} \leq 1 - \frac{1}{(3ar_2)^{2/3}}.$$

Теорема 4 позволяет получить новую оценку величины σ_k , справедливую при нецелых значениях параметра k .

Воспользуемся следующим результатом Ивича и Уелета [15], полученным в 1989 г.

ЛЕММА 4. Обозначим через $m(\sigma)$ точную верхнюю грань множества натуральных p , для которых имеет место оценка

$$\int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2p} dt \ll_{\varepsilon} T^{1+\varepsilon}.$$

Тогда для величины $m(\sigma)$ справедлива следующая оценка снизу:

$$2m(\sigma) \geq \begin{cases} \frac{258}{63 - 64\sigma}, & \text{если } \frac{14}{15} \leq \sigma \leq c_0 = 0.9505\dots, \\ \frac{30\sigma - 12}{(4\sigma - 1)(1 - \sigma)}, & \text{если } c_0 \leq \sigma < 1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [15].

Из леммы 4 для значения $\sigma_0 = 14/15$ вытекает оценка $m(\sigma_0) \geq 39.5$. Но так как $m(\sigma)$ – число натуральное, то $m(\sigma) \geq 40$. В силу определения $m(\sigma)$ имеет место неравенство

$$\int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2m(\sigma)} dt \ll_{\varepsilon} T^{1+\varepsilon}.$$

Следовательно, при $\sigma = 14/15$ согласно приведенному выше неравенству имеем, что

$$\int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2 \cdot 40} dt \ll T^{1+\varepsilon}.$$

Это означает, что $\sigma_{40} \leq 14/15$.

Оценим значение величины $1 - 1/(3ab)^{2/3}$ при $a = 4.45$, $b = (7/6)5^{3/2} < 13.05$, которое равно минимальному значению величины σ_k в условии теоремы 4. Имеем

$$1 - \frac{1}{(3ab)^{2/3}} \leq 1 - \frac{1}{(3 \cdot 4.45 \cdot 13.05)^{2/3}} \leq 1 - \frac{1}{31.2}.$$

Введем обозначение $c_1 = 1 - 1/31.2$. Далее найдем значение $m(c_1)$, используя лемму 4. Поскольку $c_1 > c_0 = 0.9505\dots$, то $2m(c_1) \geq 30c_1 - 12/(4c_1 - 1)(1 - c_1)$. Учитывая, что $2m(c_1)$ – натуральное число, отсюда будем иметь, что

$$2m(c_1) \geq \frac{6}{1 - c_1} - \frac{6}{4c_1 - 1} = 187.2 > 187.$$

Следовательно, $m(c_1) > 93$. Далее, будем рассматривать значения k , удовлетворяющие условию $k \geq 93$. Тогда в качестве значения k_1 в теореме 4 можно взять число, для которого выполняется условие $93 - k_1 = 13.05$. Следовательно, $k_1 = 79.95$. Таким образом, из теоремы 4 получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $k \geq 93$ и $k_1 = 79.95$. Тогда для величины σ_k имеют место оценки

$$\sigma_k \leq 1 - \frac{1}{(3a(k - k_1))^{2/3}}, \quad \sigma_k \leq 1 - \frac{1}{(13.35(k - k_1))^{2/3}},$$

если $a = 4.45$.

Рассмотрим теперь все значения σ , которые удовлетворяют условию $\sigma \in [c_1, 1)$. Из полученных оценок для величины σ_k вытекает следующий новый результат для величины $m(\sigma)$.

ТЕОРЕМА 6. При $\sigma > c_1 = 1 - 1/31.2$ справедлива следующая оценка для экспоненты Карлсона:

$$m(\sigma) \geq \frac{1}{3a(1 - \sigma)^{3/2}} + k_1, \quad \text{где } k_1 = 79.95.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства этой теоремы воспользуемся тем, что если для абсциссы Карлсона имеет место оценка $\sigma_k \leq f_0(k)$, где $f_0(k)$ – возрастающая функция, то для экспоненты Карлсона $m(\sigma)$ выполняется неравенство $m(\sigma) \geq 2g_0(\sigma)$, где $g_0(\sigma)$ – функция, обратная к $f_0(k)$, и полученной в теореме 5 оценкой величины σ_k .

Теорема 6 улучшает результат Ивича и Уелета [15]

$$m(\sigma) \geq \frac{1}{3^{3/2}a(1 - \sigma)^{3/2}}.$$

Далее, сравним результат теоремы 6 с оценкой Ивича и Уелета, сформулированной в лемме 4.

Оценка теоремы 6 будет точнее при тех значениях $\sigma \geq c_1 = 1 - 1/31.2$, для которых выполняется неравенство

$$\frac{15\sigma - 6}{(4\sigma - 1)(1 - \sigma)} < \frac{1}{13.35(1 - \sigma)^{3/2}} + 79.95. \quad (1)$$

Покажем, что существует промежуток $E = [c_2, 1)$ такой, что при всех $\sigma \in E$ последняя оценка действительно имеет место. Неравенство (1) можно переписать в виде

$$0 < \frac{1}{1 - (4/3)(1 - \sigma)} - \frac{3}{1 - \sigma} + \frac{1}{13.35(1 - \sigma)^{3/2}} + 79.95.$$

Поскольку $3/(4\sigma - 1) > 1$, то неравенство будет заведомо выполняться, если потребовать выполнение следующего неравенства:

$$0 < 1 - \frac{3}{1 - \sigma} + \frac{1}{13.35(1 - \sigma)^{3/2}} + 79.95 = h(\sigma).$$

Далее, найдем промежуток $E_1 = [d, 1) \supset E$, на котором выполняется условие $h'(\sigma) > 0$. Выполнив равносильные преобразования, получаем, что

$$\sigma > 1 - \frac{1}{712.89}.$$

В частности, отсюда следует, что для параметра d можно взять значение $d = 0.9986$. Это значит, что если найти любое $\sigma = \sigma_0 \geq d$, для которого выполняется неравенство (1), то для всех $\sigma > \sigma_0$ это неравенство также будет выполнено и можно положить $c_2 = \sigma_0$. Положим

$$c_2 = \sigma_0 = 1 - \frac{1}{(39.4)^2} \approx 0.99935582.$$

Тогда, выполняя соответствующие вычисления, убеждаемся в том, что неравенство (1) имеет место. А именно,

$$\frac{15\sigma - 6}{(4\sigma - 1)(1 - \sigma)} \approx 4656.0791554, \quad \frac{1}{13.35(1 - \sigma)^{3/2}} + 79.95 \approx 4661.4469288.$$

Следовательно, при всех $\sigma \in [\sigma_0, 1)$ оценка для экспоненты Карлсона, приведенная в теореме 6, дает улучшение оценки Ивича и Уелета [15], приведенной в лемме 4.

Метод комплексного интегрирования позволяет выразить сумматорную функцию коэффициентов ряда Дирихле через ее производящий ряд Дирихле посредством контурного интеграла, т.е. это означает справедливость равенства

$$D_k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \zeta^k(s) \frac{x^s}{s} ds.$$

Здесь σ – любое вещественное число с условием $\sigma > 1$. Таким образом, задача нахождения асимптотики величины $D_k(x)$ при $x \rightarrow \infty$ с возможно лучшей оценкой остаточного члена сводится к нахождению асимптотической формулы для контурного интеграла в правой части последнего равенства.

С другой стороны, в силу аналитических свойств подынтегральной функции справедлива асимптотическая формула вида ($x = N + 1/2$):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \zeta^k(s) \frac{x^s}{s} ds = \text{Res}_{s=1} \left\{ \zeta^k(s) \frac{x^s}{s} \right\} + \Delta_k(x) = x P_{k-1}(\ln x) + \Delta_k(x).$$

Здесь функция $P_{k-1}(y)$ представляет собой многочлен с вещественными коэффициентами от переменной $y = \ln x$. А так как порядок полюса $\zeta(s)$ в точке s , равной 1, равен k , то степень многочлена $P_{k-1}(y)$ равна $k - 1$. Следует отметить, что проблема делителей по существу сводится к оценке остаточного члена $\Delta_k(x)$, т.е. к доказательству неравенства типа $\Delta_k(x) \ll x^{\alpha_k}$ с возможно большим значением показателя α_k .

В следующей теореме мы получаем новую оценку сверху величины α_k .

ТЕОРЕМА 7. Пусть n, k – натуральные числа, $k \geq 93$, $\tau_k(n)$ – количество представлений n в виде произведения k натуральных сомножителей. Пусть, далее,

$$D_k(x) = \sum_{n \leq x} \tau_k(n) = \sum_{x_1 \dots x_k \leq x} 1.$$

Предположим также, что для дзета-функции Римана $\zeta(s)$ в области $\operatorname{Re}(s) = \sigma > 0.9$, $\operatorname{Im}(s) = t > 1$ выполняется неравенство

$$\zeta(s) \ll t^{a(1-\sigma)^{3/2}} \ln t, \quad a \in [1, 20].$$

Тогда при $x \rightarrow \infty$ и любом $\varepsilon > 0$ справедлива асимптотическая формула

$$D_k(x) = xP_{k-1}(\ln x) + \Delta_k(x), \quad \Delta_k(x) \ll_{\varepsilon} x^{\alpha_k + \varepsilon},$$

где

$$\alpha_k = 1 - \left(\frac{2}{3a(k-2k_1)} \right)^{2/3}, \quad k_1 = 79.95,$$

а многочлен $P_{k-1}(\ln x)$ определен ранее.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $x = N + 1/2$. Положим в формуле Перрона $a_n = \tau_k(n)$. Тогда, учитывая, что при любом $\varepsilon > 0$ выполнено $|\tau_k(n)| \ll_{\varepsilon} n^{\varepsilon}$, получаем

$$A = \sum_{n \leq k} \tau_k(n) = J + R,$$

где

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \zeta^k(s) \frac{x^s}{s} ds, \quad R = O\left(\frac{x^b}{T(b-1)^{\alpha}}\right) + O\left(\frac{x^{1+\varepsilon} \ln x}{T}\right).$$

Опираясь на известные свойства дзета-функции Римана, можем считать, что $b = 1/\ln x + 1$, $\alpha = 1$. Поэтому для остатка R справедлива оценка $R \ll x^{1+\varepsilon} T^{-1}$, где $\varepsilon > 0$ произвольно мало.

Далее контур интегрирования, состоящий из отрезка вертикальной прямой с началом в точке $b - iT$ и концом в точке $b + iT$, заменим на другой, состоящий из следующих частей $E_1, \dots, E_5$:

- 1) горизонтального отрезка $E_1 = [b - iT, \beta - iT]$, где β – некоторое число из промежутка $3/4 < \beta < 1$;
- 2) вертикального отрезка $E_2 = [\beta - iT, \beta - ih]$, причем точка $\beta - ih$ лежит на окружности K радиуса 0.5 с центром в точке $z_0 = 1$ и $h > 0.3$;
- 3) участок интегрирования E_3 проходит по указанной выше окружности K от точки $\beta - ih$ до точки $\beta + ih$ в отрицательном направлении, т.е. по “часовой стрелке”;
- 4) E_4 – вертикальный отрезок с началом в точке $\beta + ih$ и концом $\beta + iT$;
- 5) E_5 – горизонтальный отрезок $[\beta + iT, b + iT]$.

На основании теоремы о вычетах заключаем, что интеграл по старому контуру равен сумме интеграла по новому контуру и вычету подынтегральной функции $\zeta^k(s)x^s/s$ в точке $s = 1$, который, в свою очередь, равен значению функции $xP_{k-1}(\ln x)$.

Далее, оценим модули интегралов $J_1, \dots, J_5$ по каждому из промежутков интегрирования $E_1, \dots, E_5$ соответственно. Для этого воспользуемся оценками дзета-функции Римана вида $|\zeta(s)| \ll t^{a(1-\sigma)^{3/2}}$ при $s = \sigma + it \in E_2, E_4$, $|\zeta(s)| \ll 1$, $|x^s| \leq x^\sigma \leq x^\beta$, $1/(s(s+1)) \ll 1$ при $s \in E_3$, $|\zeta(s)| \ll \ln t$ при $\sigma \geq 1$. Тогда получим

$$|J_1| = |J_5| \ll \int_{\beta}^1 x^\sigma T^{-1+ka(1-\sigma)^{3/2}} d\sigma + \int_1^b x T^{-1} \ln T d\sigma.$$

Заметим, что вторая производная по σ от функции $f(\sigma) = \sigma \ln x + ka(1-\sigma)^{3/2} \ln T$ положительна при $\sigma < 1$, поэтому $f(\sigma)$ выпукла вниз и, следовательно, справедливо неравенство $f(\sigma) \leq \max(f(\beta), f(\alpha))$. Но тогда имеем

$$|J_1| + |J_5| \ll x T^{-1} + T^{-1} \int_{\beta}^1 \max(x^\sigma, x^\beta T^{ka(1-\beta)^{3/2}}) d\sigma \ll x T^{-1} + x^\beta T^{ka(1-\beta)^{3/2}-1}.$$

Оценка величины J_3 проводится следующим образом. Пусть $l(s)$ — длина дуги контура E_3 от начальной точки $s_0 = \beta + ih$ до текущей точки s на E_3 . Тогда $|J_3| \ll x^\beta$.

Для оценки модулей интегралов $|J_2| = |J_4|$ промежутков интегрирования E_4 разобьем на $\ll \ln T$ промежутков $E_{n,4}$ вида $[\beta + iT_n, \beta + iT_{n+1}]$, где $h < T_n < T_{n+1} \ll T_n < T$, и оценим сверху модуль интеграла $|J_{n,4}|$ по каждому такому участку. Получим

$$\begin{aligned} |J_{n,4}| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{T_n}^{T_{n+1}} \zeta(s) \frac{x^s}{s} ds \right| \\ &\ll x^\beta T_n^{-1} \int_{T_n}^{T_{n+1}} |\zeta^k(\beta + it)| dt \ll_{\varepsilon} x^{\beta+\varepsilon} (T_n^{a(k-2m(\beta))(1-\beta)^{3/2}} + 1), \end{aligned}$$

где $m(\beta)$ — функция, определенная ранее, а $\varepsilon > 0$ — сколь угодно мало.

Суммируя эту оценку по всем $n \ll \ln x$, будем иметь

$$|J_2| + |J_4| \ll \sum_{n \ll \ln x} |J_{n,4}| \ll x^{\beta+\varepsilon} (T_n^{a(k-2m(\beta))(1-\beta)^{3/2}} + 1).$$

Далее, необходимо выбрать значение параметров β , исходя из условия минимизации суммарной оценки для модулей интегралов $J_1, \dots, J_5$, которая имеет следующий вид:

$$R_1 = x T^{-1} + x^{\beta+\varepsilon} + x^{\beta+\varepsilon} T_n^{a(k-2m(\beta))(1-\beta)^{3/2}} \ll_{\varepsilon} x^{\alpha_k+\varepsilon}.$$

Потребуем, чтобы выполнялось равенство $x T^{-1} = x^\beta T^{a(k-2m(\beta))(1-\beta)^{3/2}}$, что эквивалентно выполнению следующего равенства:

$$x^{1-\beta} = T^{a(k-2m(\beta))(1-\beta)^{3/2}+1}. \quad (2)$$

Далее, положим

$$1 - \beta = \left(\frac{2}{3ak_2} \right)^{2/3},$$

где $k_2 = k - 2k_1$. Следовательно, величина k_2 имеет вид $k_2 = 2/(3a(1-\beta)^{3/2})$. И в силу того, что $2m(\beta) \geq 2/(3a(1-\beta)^{3/2}) + k_1$, путем равносильных преобразований получаем, что равенство (2) означает, что $x^{1-\beta} = T$ или $x T^{-1} = x^\beta$. Поэтому

$$R_1 \ll x^{\beta+\varepsilon} = x, \quad x^{-(\beta)+\varepsilon} = x^{1-(2/(3ak_2))^{2/3}+\varepsilon}.$$

Тем самым, для любого $\alpha_k = 1 - (2/(3ak_2))^{2/3}$ имеет место оценка $\Delta_k(x) \ll_{\varepsilon} x^{\alpha_k + \varepsilon}$. Теорема 7 доказана.

Далее покажем, что оценка величины α_k , полученная в теореме 7, улучшает следующую оценку Ивича [14]:

$$\alpha_k \leq 1 - \frac{34}{7k} \quad \text{при } k \geq 58.$$

Для этого надо показать, при каких значениях k выполнено неравенство

$$1 - \left(\frac{2}{3ak_2} \right)^{2/3} < 1 - \frac{34}{7k} \quad \text{при условии, что } k \geq 186, \quad a = 4.45.$$

Прямые вычисления с помощью ЭВМ показывают, что при $k \leq 5000$ значения функций $f_1 = (2/(3ak_2))^{2/3}$ и $f_2 = 34/(7k)$ достаточно близки между собой. Точнее, неравенство $f_1(k) > f_2(k)$ выполняется на множестве $I_1 = [186, 199] \cup [4769, 5000]$, в то время как противоположное неравенство $f_1(k) < f_2(k)$ справедливо на отрезке $I_2 = [200, 4768]$. С другой стороны, в силу того, что отношение $v(k) = f_1(k)/f_2(k)$ возрастает, начиная с некоторого значения $k \in I_2$, получаем, что $f_1(k) > f_2(k)$ для всех $k \in I_0 = I_1 \cup (5000, +\infty)$. Таким образом, доказанная нами теорема 7 улучшает приведенный выше результат Ивича [14] для всех $k \in [186, 199]$ и $k \geq 4769$.

В исследованиях по проблеме делителей в качестве отдельного направления рассматривается задача об оценке среднеквадратичного значения $R_k(x)$ остатка $\Delta_k(x)$ в асимптотической формуле для $D_k(x)$. Величина $R_k(x)$ определяется следующей формулой:

$$R_k(x) = x^{-1} \int_1^x \Delta_k^2(y) dy.$$

Согласно общепринятой терминологии порядок среднеквадратичного отклонения, обозначаемый через β_k , определяется как точная нижняя грань всех $\beta > 0$, для которых имеет место оценка $R_k(x) \ll_{\varepsilon} x^{2\beta + \varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ произвольно мало.

История оценок величины β_k начинается с работы Титчмарша 1928 г. [24]. Последние результаты, касающиеся оценок величины β_k при различных значениях k , собраны в работе Ивича и Уелета [15]. В частности, при $k > 10$ авторами указанной работы получена оценка вида

$$\beta_k \leq 1 - \frac{2}{3}(ak)^{-2/3}.$$

Наша ближайшая цель состоит в получении при $k \geq 186$ более сильного результата. Нам потребуется следующая

ЛЕММА 5. Если при натуральном k для некоторого $\gamma = \gamma_k \in (0, 1)$ и всех $\sigma \in (\gamma, 1)$ выполняется условие

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\zeta(\sigma + it)|^{2k}}{|\sigma + it|^2} dt < \infty,$$

то имеет место оценка $\beta_k \leq \gamma_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта лемма является прямым следствием теоремы [22; с. 318].

Воспользуемся этой леммой для доказательства следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 8. *При $k \geq 93$ и $k_1 = 79.95$ выполняется следующая оценка:*

$$\beta_k \leq 1 - \left(\frac{b}{3ak_2} \right)^{2/3}, \quad \text{где } k_2 = k - k_1, \quad a = 4.45, \quad b = 2.5.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 5 достаточно доказать, что при всех σ с условием $1 - (b/(3ak_3))^{2/3} < \sigma < 1$ интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} (|\zeta(\sigma + it)|^{2k}/|\sigma + it|^2) dt$ является сходящимся.

Ввиду того, что подынтегральная функция является четной, достаточно доказать сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} (|\zeta(\sigma + it)|^{2k}/|\sigma + it|^2) dt$. Для этого разобьем промежуток интегрирования на отрезки вида $E = [T/2, T]$ точками $T = T_m = 2^m$, где m – натуральное число. Далее, оценим часть рассматриваемого интеграла $I = I_m$ по каждому промежутку $E_m = [T_m/2, T_m]$. Получим

$$I = I_m = \int_{E_m} \frac{|\zeta(\sigma + it)|^{2k}}{|\sigma + it|^2} dt \leq T_m^{-2} \sup_{t \in E_m} \{|\zeta(\sigma + it)|^{2k-2m(\sigma)}\} \int_{T_m/2}^{T_m} |\zeta(\sigma + it)|^{2m(\sigma)} dt.$$

Но так как $\int_{T_m/2}^{T_m} |\zeta(\sigma + it)|^{2m(\sigma)} dt \ll_{\varepsilon} T_m^{1+\varepsilon}$, то

$$I = I_m \ll_{\varepsilon} T_m^{-1+\varepsilon} \sup_{t \in E_m} \{|\zeta(\sigma + it)|^{2k-2m(\sigma)}\}.$$

Применим следующую оценку дзета-функции Римана [25]: $|\zeta(\sigma + it)| \leq t^{a(1-\sigma)^{3/2}}$. Получаем

$$I = I_m \ll_{\varepsilon} T^{-1+a(1-\sigma)^{3/2}(2k-2m(\sigma))+\varepsilon}.$$

Осталось доказать, что показатель степени у параметра T в правой части последнего неравенства отрицательный, т.е. что выполняется неравенство

$$a(1-\sigma)^{3/2}(2k-2m(\sigma)) - 1 + \varepsilon < 0.$$

Подставим в это неравенство любое значение σ из промежутка $(\gamma, 1)$, где $\gamma = 1 - (b/(3ak_2))^{2/3}$. Тогда получим $1 - \sigma < (b/(3ak_2))^{2/3}$, а значит, $1/(3a(1-\sigma)^{3/2}) > k_2/b$. Далее, для величины $m(\sigma)$ воспользуемся оценкой $2m(\sigma) > 2/(3a(1-\sigma)^{3/2}) + 2k_1$. Окончательно получаем

$$a(1-\sigma)^{3/2}(2k-2m(\sigma)) - 1 < -1 + \frac{b}{3k_2} 2k_2 \left(1 - \frac{1}{b}\right) = -1 + \frac{2}{3}(b-1).$$

Потребуем, чтобы выполнялось равенство $2/3(b-1) = 1$, что равносильно $b = 2.5$. При таком значении b имеем $a(1-\sigma)^{3/2}(2k-2m(\sigma)) - 1 < 0$. Поскольку $\varepsilon > 0$ можно выбрать произвольно малым, то имеет место неравенство

$$a(1-\sigma)^{3/2}(2k-2m(\sigma)) - 1 + \varepsilon < 0.$$

Тем самым, теорема 8 доказана.

Наша оценка для β_k может быть записана в виде

$$\beta_k \leq 1 - c_1(ak_2)^{-2/3}, \quad \text{где} \quad c_1 = \left(\frac{5}{6}\right)^{2/3} \approx 0.885549 \dots$$

В то же время оценка Ивича и Уелета [15] была доказана при значении $c_1 = 2/3 = 0.666 \dots$. Тем самым, результат теоремы 8 сильнее этой оценки Ивича и Уелета при всех $k \geq 93$, поскольку $k_3 = k - k_1 < k$.

В заключение автор приносит благодарность профессору В. Н. Чубарикову за внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. G. L. Dirichlet, “Über die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie”, *Abh. Acad. Wiss. Berlin*, 1849, 69–83; *Werke*, Bd. 2, 49–66.
- [2] G. Voronoï, “Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques”, *Reine Angew. Math.*, **126** (1903), 241–282.
- [3] E. Landau, “Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen”, *Gött. Nachr.*, 1912, 687–770.
- [4] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, “The approximate functional equation in the theory of the zeta-function, with applications to the divisor-problems of Dirichlet and Piltz”, *Proc. London Math. Soc.* (2), **21** (1922), 39–74.
- [5] J. G. van der Corput, “Verschärfung der Abschätzung beim Teilerproblem”, *Math. Ann.*, **87**:1-2 (1922), 39–65.
- [6] K. C. Tong, “On diviser problems”, *Acta Math. Sinica (Chin. Ser.)*, **2** (1952), 258–266.
- [7] A. Walfisz, “Über zwei Gitterpunktprobleme”, *Math. Ann.*, **95**:1 (1926), 69–83.
- [8] F. V. Atkinson, “A divisor problem”, *Quart. J. Math., Oxford Ser.*, **12**:1 (1941), 193–200.
- [9] T. Chih, “The Dirichlet’s divisor problem”, *Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. Ser. A*, **5** (1950), 402–427.
- [10] H.-E. Richert, “Verschärfung der Abschätzung beim Dirichletschen Teilerproblem”, *Math. Z.*, **58**:1 (1953), 204–218.
- [11] J. Chen, “On the divisor problem for $d_3(n)$ ”, *Sci. Sinica*, **14** (1965), 19–29.
- [12] А. А. Карацуба, “Равномерная оценка остаточного члена в проблеме делителей Дирихле”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **36**:3 (1972), 475–483.
- [13] Г. А. Колесник, “Улучшение остаточного члена в проблеме делителей”, *Матем. заметки*, **6**:5 (1969), 545–554.
- [14] A. Ivić, “Some recent results on the Riemann zeta-function”, *Théorie des nombres* (Quebec, PQ, 1987), de Gruyter, Berlin, 1989, 424–440.
- [15] A. Ivić, M. Ouellet, “Some new estimates in the Dirichlet divisor problem”, *Acta Arith.*, **52**:3 (1989), 241–253.
- [16] Е. Е. Баядилов, “О проблеме делителей для значений тернарной кубической формы”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1999, № 1, 58–60.
- [17] K. Ford, “Vinogradov’s integral and bounds for the riemann zeta function”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **85**:3 (2002), 565–633.
- [18] H.-E. Richert, “Einführung in die Theorie der starken Rieszschen Summierbarkeit von Dirichletreihen”, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II*, **1960** (1960), 17–75.
- [19] А. А. Карацуба, “Оценки тригонометрических сумм И. М. Виноградова и их применения”, *Тр. МИАН СССР*, **112**, 1971, 241–255.
- [20] A. Fujii, “On the problem of divisors”, *Acta Arith.*, **31**:4 (1976), 355–360.
- [21] Е. И. Пантелеева, “К вопросу о проблеме делителей Дирихле в числовых полях”, *Матем. заметки*, **44**:4 (1988), 494–505.

- [22] Е. К. Титчмарш, *Теория дзета-функции Римана*, ИЛ, М., 1953.
- [23] A. Ivić, *The Riemann Zeta-Function. The Theory of the Riemann Zeta-Function with Applications*, Wiley-Intersci. Publ., John Wiley & Sons, New York, 1985.
- [24] E. C. Titchmarsh, “On the remainder in the formula for $N(T)$, the number of zeros of $\zeta(s)$ in the strip $0 < t < T$ ”, *Proc. London Math. Soc.* (2), **27**:1 (1928), 449–458.
- [25] G. I. Arkhipov, K. Buriev, “Refinement of estimates for the riemann zeta-function in a neighbourhood of the line $\operatorname{Re} s = 1$ ”, *Integral Transform. Spec. Funct.*, **1**:1 (1993), 1–7.

О. В. Колпакова

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило

28.12.2009