Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Радомский, Об одном неравенстве типа Сидона для тригонометрических полиномов, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 4, 589–595

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9098>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 12:38:43

УДК 517

Об одном неравенстве типа Сидона для тригонометрических полиномов

А. О. Радомский

В работе установлена оценка снизу равномерной нормы тригонометрического полинома специального вида через сумму L^1 -норм его слагаемых. Результат обобщает одну теорему Кашина и Темлякова, которая в свою очередь обобщает классическое неравенство Сидона.

Библиография: 1 название.

Согласно классической теореме Сидона, если последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, $n_k \in \mathbb{N}$, лакуарна с коэффициентом лакуарности λ (т.е. $n_{k+1}/n_k \geq \lambda > 1$ для любого k), то существует такая положительная константа $c(\lambda)$, зависящая только от коэффициента лакуарности, что для любого тригонометрического полинома вида

$$T(x) = \sum_{k=1}^N a_k \cos n_k x, \quad a_k \in \mathbb{R},$$

справедливо неравенство

$$\|T\|_{\infty} \geq c(\lambda) \sum_{k=1}^N |a_k|.$$

Кашиным и Темляковым был получен результат более общего характера. А именно, они доказали (см. [1]), что для любого тригонометрического полинома вида

$$f(x) = \sum_{k=l+1}^{2l} p_k(x) \cos 4^k x,$$

где p_k – вещественные тригонометрические полиномы с $\deg(p_k) \leq 2^l$, $k = l+1, \dots, 2l$, $l = 1, 2, \dots$, справедливо неравенство

$$\|f\|_{\infty} \geq c \sum_{k=l+1}^{2l} \|p_k\|_1,$$

где $c > 0$ – абсолютная постоянная.

В данной работе аналогичный результат доказывается в случае произвольного коэффициента лакуарности и при более слабых ограничениях на степени полиномов p_k .

На отрезке $[0, 2\pi]$ определим усредняющую меру $d\mu = 1/(2\pi) dx$. Положим

$\|f\|_\infty \equiv \inf\{M > 0 : \{x \in [0, 2\pi] : |f(x)| > M\} \text{ имеет лебегову меру нуль}\},$

$$\|f\|_p \equiv \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p}, \quad p < \infty,$$

и

$$c_n(f) \equiv \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} d\mu.$$

Определим также *свертку* двух функций f и g :

$$(f * g)(x) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t) dt.$$

Для вещественнозначных функций определим скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_0^{2\pi} f(x)g(x) d\mu.$$

ТЕОРЕМА. Пусть $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ — произвольная последовательность, состоящая из натуральных чисел и лакунарная с коэффициентом лакуарности $\lambda > 1$. Тогда существует положительная константа $c(\lambda)$, зависящая только от λ , такая, что для любого тригонометрического полинома f вида

$$f(x) = \sum_{k=l+1}^{2l} p_k(x) \cos n_k x,$$

где p_k — вещественные тригонометрические полиномы с

$$\deg(p_k) \leq \left[a(\lambda) \frac{n_{l+1}}{l} \right], \quad (\lambda) = \min \left(\frac{\lambda-1}{5}, \frac{1}{5} \right), \quad k = l+1, \dots, 2l, \quad l = 1, 2, \dots,$$

справедливо неравенство

$$\|f\|_\infty \geq c(\lambda) \sum_{k=l+1}^{2l} \|p_k\|_1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем $\mu = \mu(\lambda)$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$1) \quad \mu > \frac{7}{2}; \quad 2) \quad 1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu-1} > \frac{3}{5} \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right).$$

Разобьем последовательность $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ на конечное число $M = M(\lambda, \mu)$ подпоследовательностей $\{m_j^{(q)}\}_{j=1}^\infty$, $q = 1, \dots, M$, с коэффициентом лакуарности μ . Поскольку $\mu = \mu(\lambda)$, то M зависит только от λ :

$$M = M(\lambda).$$

Рассмотрим произвольный тригонометрический полином вида

$$f(x) = \sum_{k=l+1}^{2l} p_k(x) \cos n_k x,$$

где p_k – вещественные тригонометрические полиномы с $\deg(p_k) \leq \alpha$, где

$$\alpha = \left[a(\lambda) \frac{n_{l+1}}{l} \right], \quad a(\lambda) = \min \left(\frac{\lambda - 1}{5}, \frac{1}{5} \right).$$

Ясно, что частоты полиномов $p_k(x) \cos n_k x$ лежат в α -окрестностях точек n_k . Нетрудно видеть, что эти α -окрестности не пересекаются при разных $k \in \{l+1, \dots, 2l\}$.

Введем функцию (ядро Валле Пуссена)

$$V(x) = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=\alpha}^{2\alpha-1} \sum_{\nu=-n}^n e^{i\nu x}.$$

Эта функция обладает следующими свойствами:

- а) V – вещественный тригонометрический полином с $\deg(V) < 2\alpha$;
- б) $c_l(V) = 1$, при $|l| \leq \alpha$;
- в) $\|V\|_1 \leq 3$.

Первые два свойства очевидны. Третье следует из известных свойств ядер Фейера

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n D_\nu(x), \quad \text{где} \quad D_\nu(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\nu} \cos kx$$

(по определению $D_0(x) \equiv 1/2$): $K_n(x) \geq 0$ и $\int_0^{2\pi} K_n(x) dx = \pi$, и того факта, что

$$V(x) = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=\alpha}^{2\alpha-1} 2D_n(x) = 4K_{2\alpha-1}(x) - 2K_{\alpha-1}(x).$$

Рассмотрим последовательность $\{m_j^{(q)}\}_{j=1}^\infty$ для произвольного q из $\{1, 2, \dots, M\}$. Для упрощения записи последовательность $\{m_j^{(q)}\}_{j=1}^\infty$ будем обозначать через $\{m\}$, а $m_j^{(q)}$ – через m_j .

Введем функцию

$$J(x) = \prod_{s: m_s \in \{n_{l+1}, \dots, n_{2l}\}} \left(1 + \frac{1}{3} g_s(x) \cos m_s x \right), \quad (1)$$

где

$$g_s = (\text{sign } p_i) * V, \quad \text{где} \quad i \in \{l+1, \dots, 2l\} \quad \text{такое, что} \quad m_s = n_i.$$

Ясно, что g_s – вещественные функции, и, учитывая, что $c_n(f_1 * f_2) = c_n(f_1)c_n(f_2)$, получаем, что g_s – вещественные тригонометрические полиномы с $\deg(g_s) < 2\alpha$. Покажем, что $\|g_s\|_\infty \leq 3$. Действительно, в каждой точке $x \in [0, 2\pi]$

$$|g_s(x)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{sign}(p_i(x-t)) \cdot V(t) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |V(t)| dt \leq 3.$$

Отсюда получаем, что $J(x) \geq 0$.

Покажем, что $\langle p_i, g_s \rangle = \|p_i\|_1$ (здесь индекс i тот, который участвует в определении функций g_s). Действительно, используя то, что $\deg(p_i) \leq \alpha$ и $c_l(V) = 1$ при $|l| \leq \alpha$, находим

$$\langle p_i, g_s \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(p_i) \overline{c_n(g_s)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(p_i) \overline{c_n(\text{sign}(p_i)) c_n(V)}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=-\alpha}^{\alpha} c_n(p_i) \overline{c_n(\text{sign}(p_i)) c_n(V)} = \sum_{n=-\alpha}^{\alpha} c_n(p_i) \overline{c_n(\text{sign}(p_i))} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(p_i) \overline{c_n(\text{sign}(p_i))} = \langle p_i, \text{sign}(p_i) \rangle = \|p_i\|_1.
\end{aligned}$$

Раскрывая скобки в (1), получаем

$$J(x) = 1 + \frac{1}{3} \sum_{s: m_s \in \{n_{l+1}, \dots, n_{2l}\}} g_s(x) \cos m_s x + t(x). \quad (2)$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\langle f, J \rangle &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} f(x) \left(\sum_{s: m_s \in \{n_{l+1}, \dots, n_{2l}\}} g_s(x) \cos m_s x \right) d\mu \\
&\quad + \int_0^{2\pi} f(x) d\mu + \int_0^{2\pi} f(x) t(x) d\mu.
\end{aligned} \quad (3)$$

Пусть $w(x)$ – произвольное слагаемое, входящее в сумму $t(x)$. Тогда $w(x)$ имеет вид

$$w(x) = 3^{-p} \prod_{i=1}^p g_{s_i}(x) \cos m_{s_i} x, \quad 2 \leq p \leq l,$$

где $s_1 > s_2 > \dots > s_p$. Имеем

$$w(x) = 3^{-p} \left(\frac{1}{2} \cos(m_{s_1} + m_{s_2})x + \frac{1}{2} \cos(m_{s_1} - m_{s_2})x \right) \prod_{i=3}^p \cos m_{s_i} x \cdot \prod_{i=1}^p g_{s_i}(x).$$

Используя элементарные тригонометрические формулы, получаем, что произвольная частота ν полинома $w(x)$ удовлетворяет или неравенству

$$|\nu - (m_{s_1} + m_{s_2})| \leq m_{s_3} + \dots + m_{s_p} + p \cdot 2\alpha,$$

или неравенству

$$|\nu - (m_{s_1} - m_{s_2})| \leq m_{s_3} + \dots + m_{s_p} + p \cdot 2\alpha.$$

Отсюда следует, что

$$m_{s_2} - (m_{s_3} + \dots + m_{s_p} + p \cdot 2\alpha) \leq |\nu - m_{s_1}| \leq m_{s_2} + \dots + m_{s_p} + p \cdot 2\alpha.$$

Оценим правую и левую части:

$$\begin{aligned}
&m_{s_2} + \dots + m_{s_p} + p \cdot 2\alpha \\
&\leq \frac{\mu}{\mu - 1} m_{s_2} + l \cdot 2\alpha \leq \frac{\mu}{\mu - 1} m_{s_1-1} + l \cdot 2\alpha \leq \frac{1}{\mu - 1} m_{s_1} + l \cdot 2\alpha, \\
&m_{s_2} - (m_{s_3} + \dots + m_{s_p} + p \cdot 2\alpha) \\
&\geq m_{s_2} - \frac{\mu}{\mu - 1} m_{s_3} - l \cdot 2\alpha \geq m_{s_2} - \frac{\mu}{\mu - 1} m_{s_2-1} - l \cdot 2\alpha
\end{aligned}$$

$$\geq m_{s_2} - \frac{1}{\mu-1} m_{s_2} - l \cdot 2\alpha = \frac{\mu-2}{\mu-1} m_{s_2} - l \cdot 2\alpha \geq \frac{\mu-2}{\mu-1} n_{l+1} - l \cdot 2\alpha.$$

В итоге получаем

$$r \equiv \frac{\mu-2}{\mu-1} n_{l+1} - l \cdot 2\alpha \leq |\nu - m_{s_1}| \leq \frac{1}{\mu-1} m_{s_1} + l \cdot 2\alpha \equiv R. \quad (4)$$

Покажем, что

$$\int_0^{2\pi} p_k(x) \cos n_k x w(x) dx = 0 \quad \text{для любого } k = l+1, \dots, 2l.$$

Пусть $m_{s_1} = n_{k_i}$. Из условий 1) и 2) на μ следуют неравенства

$$n_{k_i-1} + \alpha < n_{k_i} - R, \quad n_{k_i+1} - \alpha > n_{k_i} + R, \quad \alpha < r.$$

Действительно, докажем, например, первое из них. Оно будет выполнено, если

$$\frac{1}{\lambda} n_{k_i} + \alpha < n_{k_i} - R = n_{k_i} - \frac{1}{\mu-1} n_{k_i} - l \cdot 2\alpha,$$

т.е.

$$(2l+1)\alpha < \left(1 - \frac{1}{\mu-1} - \frac{1}{\lambda}\right) n_{k_i}.$$

Поскольку $2l+1 \leq 3l$ и так как $n_{k_i} = m_{s_1}$, то $n_{k_i} \geq n_{l+2} \geq \lambda n_{l+1}$. Поэтому последнее неравенство будет выполнено, если

$$\alpha < \frac{1}{3} \lambda \left(1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu-1}\right) \frac{n_{l+1}}{l}.$$

Последнее неравенство выполнено из-за условия 2) на выбор μ . Аналогично доказываются неравенства $n_{k_i+1} - \alpha > n_{k_i} + R$ и $\alpha < r$.

Из этих неравенств и (4) следует, что

$$\int_0^{2\pi} p_k(x) \cos n_k x w(x) dx = 0 \quad \text{при } k = k_i - 1, k_i, k_i + 1.$$

Поскольку частоты полинома $p_k(x) \cos n_k x$ лежат в α -окрестности точки n_k и эти α -окрестности не пересекаются при разных k , и так как было установлено, что α -окрестности точек n_{k_i-1} и n_{k_i+1} не пересекаются с R -окрестностью точки n_{k_i} , то получаем, что для любого $k \in \{l+1, \dots, 2l\}$, отличного от $k_i - 1$, k_i и $k_i + 1$, α -окрестность точки n_k не пересекается с R -окрестностью точки n_{k_i} . Поэтому

$$\int_0^{2\pi} p_k(x) \cos n_k x w(x) dx = 0 \quad \text{для любого } k = l+1, \dots, 2l.$$

Следовательно, $\int_0^{2\pi} f(x) w(x) dx = 0$. Так как $w(x)$ — произвольное слагаемое $t(x)$, то получаем, что $\langle f, t \rangle = 0$.

Покажем, что

$$\int_0^{2\pi} p_k(x) \cos n_k x dx = 0, \quad k = l+1, \dots, 2l.$$

Поскольку частоты полинома $p_k(x) \cos n_k x$ лежат в α -окрестности точки n_k , то достаточно показать, что $n_{l+1} - \alpha > 0$. Это неравенство, очевидно, выполнено. Следовательно, $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$.

Поэтому (3) имеет вид

$$\langle f, J \rangle = \frac{1}{6\pi} \sum_{s: m_s \in \{n_{l+1}, \dots, n_{2l}\}} \sum_{k=l+1}^{2l} \int_0^{2\pi} p_k(x) g_s(x) \cos n_k x \cos m_s x dx.$$

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^{2\pi} p_k(x) g_s(x) \cos n_k x \cos m_s x dx.$$

Пусть $m_s = n_i$. Покажем, что $I = 0$, если $n_k < n_i$. Действительно,

$$\begin{aligned} |\nu(p_k g_s)| &< 3\alpha \leq \frac{3}{5}(\lambda - 1) \frac{n_{l+1}}{l}, \\ \cos n_k x \cos m_s x &= \frac{1}{2} \cos(m_s - n_k)x + \frac{1}{2} \cos(m_s + n_k)x, \\ m_s - n_k = n_i - n_k &\geq n_i - n_{i-1} \geq (\lambda - 1)n_{i-1} \geq (\lambda - 1)n_{l+1} > \frac{3}{5}(\lambda - 1) \frac{n_{l+1}}{l}. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что $I = 0$, если $n_k > n_i$.

Поэтому

$$\langle f, J \rangle = \frac{1}{6\pi} \sum_{(s,k): m_s \in \{n_{l+1}, \dots, n_{2l}\}, n_k = m_s} \int_0^{2\pi} p_k(x) g_s(x) \cos^2 n_k x dx. \quad (5)$$

Учитывая доказанное выше равенство $\langle p_k, g_s \rangle = \|p_k\|_1$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} p_k(x) g_s(x) \cos^2 n_k x dx &= \int_0^{2\pi} p_k(x) g_s(x) \frac{1 + \cos 2n_k x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p_k(x) g_s(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p_k(x) g_s(x) \cos 2n_k x dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p_k(x) g_s(x) dx = \frac{1}{2} 2\pi \int_0^{2\pi} p_k(x) g_s(x) d\mu = \pi \|p_k\|_1. \end{aligned}$$

В итоге (5) имеет вид

$$\langle f, J \rangle = \frac{1}{6\pi} \pi \sum_{l+1 \leq k \leq 2l: n_k \in \{m\}} \|p_k\|_1 = \frac{1}{6} \sum_{l+1 \leq k \leq 2l: n_k \in \{m\}} \|p_k\|_1. \quad (6)$$

Покажем, что $\|J\|_1 = 1$. Интегралы $\int_0^{2\pi} g_s(x) \cos m_s x dx = 0$, так как

$$|\nu(g_s)| < 2\alpha \leq \frac{2}{5} \frac{n_{l+1}}{l}, \quad m_s \geq n_{l+1} > \frac{2}{5} \frac{n_{l+1}}{l}.$$

Покажем, что $\int_0^{2\pi} t(x) dx = 0$. Пусть $w(x)$ – произвольное слагаемое, входящее в сумму $t(x)$. Учитывая (4), достаточно показать, что $m_{s_1} - R > 0$, т.е.

$$\frac{m_{s_1}}{\mu - 1} + l \cdot 2\alpha < m_{s_1}.$$

Это равносильно

$$2l\alpha < \left(1 - \frac{1}{\mu - 1}\right)m_{s_1}.$$

Так как $m_{s_1} \geq n_{l+2} \geq \lambda n_{l+1}$, то последнее неравенство будет выполнено, если

$$\alpha < \frac{1}{2} \lambda \left(1 - \frac{1}{\mu - 1}\right) \frac{n_{l+1}}{l}.$$

Последнее неравенство выполнено из-за условия 1) на выбор μ . Поэтому выполнено $\int_0^{2\pi} w(x) dx = 0$, а значит, и $\int_0^{2\pi} t(x) dx = 0$. Поскольку $J \geq 0$, то из (2) имеем

$$\|J\|_1 = \int_0^{2\pi} J(x) d\mu = \int_0^{2\pi} 1 d\mu = 1.$$

Отсюда

$$\langle f, J \rangle \leq \int_0^{2\pi} |f(x)| |J(x)| d\mu \leq \|f\|_\infty \|J\|_1 = \|f\|_\infty. \quad (7)$$

Объединяя (6) и (7), получаем

$$\sum_{l+1 \leq k \leq 2l: n_k \in \{m\}} \|p_k\|_1 \leq 6\|f\|_\infty. \quad (8)$$

Поскольку это неравенство справедливо для любой последовательности $\{m_j^{(q)}\}_{j=1}^\infty$ и всего их $M(\lambda)$, то, складывая (8) по всем этим последовательностям, получаем

$$\sum_{k=l+1}^{2l} \|p_k\|_1 \leq 6M(\lambda)\|f\|_\infty = C(\lambda)\|f\|_\infty.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. С. Кашин, В. Н. Темляков, “Об одной норме и аппроксимационных характеристиках классов функций многих переменных”, *Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа*, Сборник статей. Посвящается Петру Лаврентьевичу Ульянову к его семидесятилетию, АФЦ, М., 1999, 69–99.

А. О. Радомский

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: artrad@list.ru

Поступило

17.11.2010