Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Кудрявцев, Классификация логповерхностей Энрикеса с $\delta = 1$, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 1, 87–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm91>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 16:20:16

УДК 512.7

КЛАССИФИКАЦИЯ ЛОГПОВЕРХНОСТЕЙ ЭНРИКВЕСА С $\delta = 1$

С. А. Кудрявцев

Классифицированы логповерхности Энриквеса с $\delta = 1$.

Библиография: 8 названий.

Введение. Пусть S – проективная логтерминальная поверхность с численно тривиальным каноническим классом $K_S \equiv 0$. Тогда S называется *логповерхностью Энриквеса*.

Определим следующий инвариант:

$$\delta(S) = \#\left\{E \mid E - \text{исключительный дивизор с дискрепантностью } a(E, 0) \leq -\frac{6}{7}\right\}.$$

Согласно теореме [1, 5.1] имеем $0 \leq \delta(S) \leq 2$. В данной работе получена классификация таких поверхностей с $\delta = 1$. Классификация логповерхностей Энриквеса с $\delta = 2$ была получена в [2].

Процесс классификации поверхностей в случае $\delta = 1$ ничем не отличается от случая $\delta = 2$. Более точно, из классификации исключительных логповерхностей дель Пеццо несложно получить классификацию логповерхностей Энриквеса.

Логповерхности Энриквеса тесно связаны с многообразиями Калаби–Яу, с $K3$ поверхностями (в частности, см. замечание 1.5) и с индуктивной классификацией трехмерных строго логканонических особенностей. В последней задаче такие поверхности могут реализовываться как исключительные дивизоры чисто логтерминальных раздутий трехмерных строго логканонических особенностей.

1. Предварительные сведения и результаты. Все многообразия рассматриваются над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Основные определения, обозначения и понятия, использованные в статье, приведены в [3], [4].

Общую гиперповерхность степени d в $\mathbb{P}(a_1, a_2, a_3)$ будем обозначать через X_d . Во многих случаях неприводимость и приведенность X_d будет достаточна. В случае $p_a(C) = 1$ кривая X_d обязана иметь обыкновенную двойную точку. Более точно о строении X_d см. замечание 2.2 в [5].

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00441, программы “Ведущие научные школы”, грант № 00-15-96085, и фонда INTAS-OPEN, грант № 2000#269.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть S – логповерхность Энриквеса с $\delta = 1$. Обозначим через $\tilde{S}$ исключительную кривую с дискрепантностью $a(\tilde{S}, 0) = -a \leq -6/7$. Пусть $f: \tilde{S} \rightarrow S$ – раздутие только кривой $\tilde{C}$:

Тогда существует бирациональное стягивание $g: \tilde{S} \rightarrow \bar{S}$ со следующими свойствами: $\rho(\bar{S}) = 1$, g не стягивает кривую $\tilde{C}$. Положим $C = g(\tilde{C})$. Тогда пара $(\bar{S}, aC)$ является одной из следующих.

- (1) $\bar{S} = \mathbb{P}(1, 2, 3)$ и $aC = \frac{6}{7}X_7$. Случай 6-2(ell).
- (2) $\bar{S} = \mathbb{P}(1, 3, 4)$ и $aC = \frac{8}{9}X_9$. Случай 8-1(ell).
- (3) $\bar{S} = \mathbb{P}(1, 3, 5)$ и $aC = \frac{9}{10}X_{10}$. Случай 9-1(ell).
- (4) $\bar{S} = \mathbb{P}(1, 5, 8)$ и $aC = \frac{7}{8}X_{16}$. Случай 22-1(ell).
- (5) Минимальное разрешение $\bar{S}$ является одним из следующих: в случае 51-2(ell) (см. рис. 1) $a = 10/11$, а в случае 51-6(ell) (см. рис. 2) $a = 7/8$.

Рис. 1. Случай 51-2(ell)

Рис. 2. Случай 51-6(ell)

- (6) $\bar{S} = \mathbb{P}(2, 3, 7)$ и $aC = \frac{6}{7}X_{14}$. Случай 52-2(ell).
- (7) Минимальное разрешение $\bar{S}$ является одним из следующих: в случае 53-2(ell) (см. рис. 3) $a = 8/9$, а в случае 54(ell) (см. рис. 4) $a = 6/7$.

Рис. 3. Случай 53-2(ell)

Рис. 4. Случай 54(ell)

- (8) $\bar{S} = \mathbb{P}(3, 4, 5)$ и $aC = \frac{12}{13}X_{13}$. Случай 18 – 1(+1).
- (9) $\bar{S} = \mathbb{P}(3, 5, 7)$ и $aC = \frac{15}{17}X_{17}$. Случай 25 – 1(+1).
- (10) Минимальное разрешение $\bar{S}$ является одним из следующих: в случае 55(0) (см. рис. 5) $a = 10/11$, а в случае 56(0) (см. рис. 6) $a = 6/7$.

В случае $p_a(C) = 1$ кривая C имеет обыкновенную двойную точку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта теорема немедленно вытекает из теоремы 2.1 [5]. Если в скобках стоит ell, то это означает, что $p_a(C) = 1$. Если в скобках стоит число q , то это означает, что $p_a(C) = 0$ и индекс самопересечения собственного прообраза C на минимальном разрешении $\bar{S}$ равен q . Случай $p_a(C) = 0$ полностью переносится из теоремы 2.1 [5]. В случае $p_a(C) = 1$ кривая C должна быть рациональной. Отсюда она

Рис. 5. Случай 55(0)

Рис. 6. Случай 56(0)

обязана иметь обыкновенную двойную точку. По лемме 1.2 логповерхности с $p_a(C) = 1$ переносятся из теоремы 2.1 [5] только в случае $a(\tilde{C}, 0) = -(k-1)/k$, где $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.

ЛЕММА 1.2. Пусть $(\mathbb{C}^2, a\{xy=0\})$ – логтерминальная по Кавамате пара. Тогда существует раздутие для которого дискрепантность исключительного дивизора равняется 0 в том и только том случае, когда $a = (k-1)/k$, где $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Понятно, что искомое раздутие является торическим, т.е. взвешенным раздутием $\mathbb{C}^2$ с весами (α, β) . Тогда $a(E, 0) = \alpha + \beta - 1 - (\alpha + \beta)a$, где E – исключительный дивизор. Отсюда

$$a(E, 0) = 0 \iff a = 1 - \frac{1}{\alpha + \beta}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Пусть S – логповерхность Энриквеса. Каноническим индексом $I = I(S)$ называется следующее число:

$$I = \min\{n \in \mathbb{Z}_{>0} \mid nK_S \sim 0\}.$$

Известно, что $I \leq 21$ [6], [7].

СЛЕДСТВИЕ 1.4. Пусть S – логповерхность Энриквеса с $\delta = 1$. Тогда $I \in \{7, 8, 9, 10, 11, 13, 17\}$.

Итак, задача классификации логповерхностей Энриквеса с $\delta = 1$ состоит в описании следующих процедур. Сначала рассмотрим частичное разрешение $\tilde{S} \rightarrow \bar{S}$, для которого все исключительные дивизоры E_i имеют дискрепантность $a(E_i, aC) = 0$. Затем стянем собственный прообраз C . Количество таких процедур конечно ввиду следующего простого факта.

Пусть пара (X, D) логтерминальна по Кавамате. Тогда множество дивизоров E поля функций $\mathcal{K}(X)$ с дискрепантностью $a(E, D) \leq 0$ конечно [4, лемма 3.1.9].

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Логповерхности Энриквеса и КЗ поверхности определяются следующим образом.

Пусть S – логповерхность Энриквеса с $\delta = 1$. Рассмотрим ее каноническое накрытие

$$\varphi: \hat{S} = \text{Spec}_{\mathcal{O}_S} \left(\bigoplus_{i=0}^{I-1} \mathcal{O}_S(-iK_S) \right) \rightarrow S,$$

где I – индекс S . Поскольку $I \geq 7$ (следствие 1.4), то $\hat{S}$ является $K3$ поверхностью не хуже чем с дювалевскими особенностями [6], [7]. Более того,

- (1) φ – накрытие Галуа степени I , этальное над $S - \text{Sing } S$;
- (2) существует образующая g группы Галуа $\text{Gal}(\hat{S}/S) \cong \mathbb{Z}_I$ такая, что $g^* \omega_{\hat{S}} = \varepsilon_I \omega_{\hat{S}}$, где ε_I – первообразный корень степени I из 1, а $\omega_{\hat{S}}$ – нигде ненулевая регулярная 2-форма на $\hat{S}$.

Пусть $\Delta(S)$ – исключительное множество χ , где χ – минимальное разрешение $\hat{S}$. Тогда $\Delta(S)$ является объединением непересекающихся дивизоров дынкинских типов $\mathbb{A}_i, \mathbb{D}_j, \mathbb{E}_k$. Итак, $\Delta(S) = (\oplus \mathbb{A}_\alpha) \oplus (\oplus \mathbb{D}_\beta) \oplus (\oplus \mathbb{E}_\gamma)$. Определим $\text{rank } \Delta(S) = \sum \alpha + \sum \beta + \sum \gamma$.

2. Классификация логповерхностей Энриквеса с $\delta = 1$. Пусть S – логповерхность Энриквеса с $\delta = 1$. Тогда поверхность S можно получить следующим образом: сначала выделим некоторый набор $\mathcal{T}$ исключительных кривых с дискрепантностью 0 для соответствующей ей модели из теоремы 1.1, а затем стянем собственный прообраз C . Итак, задача классификации таких поверхностей сводится к описанию наборов $\mathcal{T}$. Кривые из $\mathcal{T}$ пронумерованы натуральными числами на соответствующих рисунках.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $T_i = |\mathcal{T}_i|$ – количество элементов в множестве $\mathcal{T}_i$,

$$\underline{T}_i = \min\{t \mid t \in \mathcal{T}_i\}, \quad \overline{T}_i = \max\{t \mid t \in \mathcal{T}_i\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть $p_a(C) = 1$. Это случаи (1)–(7) из теоремы 1.1. Тогда $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \cup \mathcal{T}_3$, где $\mathcal{T}_1$ состоит из кривых, которые стягиваются в особые точки $\overline{S}$, лежащие на C , $\mathcal{T}_2$ состоит из кривых, которые стягиваются в особую точку кривой C , а $\mathcal{T}_3$ состоит из кривых, которые стягиваются в особые точки $\overline{S}$, не лежащие на C . Наборы для $\mathcal{T}_2$ рассматриваются с точностью до симметрии. Например для теоремы 2.3, если $4 \in \mathcal{T}_2$, то $9 \in \mathcal{T}_2$. Также отметим, что всегда $\mathcal{T}_2 \neq \emptyset$.

ТЕОРЕМА 2.3. В случае 6-2(ell) (см. рис. 7) набор $\mathcal{T}$ должен быть одним из следующих.

- (1) Пусть $T_1 = 0$. Тогда $T_2 \geq 2$ и $4 \in \mathcal{T}_2$.
- (2) Пусть $\mathcal{T}_1 = \{1\}$. Тогда $\{4, 5\} \cap \mathcal{T}_2 \neq \emptyset$.
- (3) Пусть $\mathcal{T}_1 = \{3\}$. Тогда $4 \in \mathcal{T}_2$.
- (4) Пусть $\mathcal{T}_1 = \{2\}$ или $T_1 \geq 2$. Тогда $\mathcal{T}_2 \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На рисунке показано выделение всех кривых с дискрепантностью 0 для пары $(\overline{S}, \frac{6}{7}C)$. Искомые кривые пронумерованы и являются на минимальном разрешении (-1) кривыми. Процесс выделения описан в предложении 2.1 [2].

Пусть $f: \tilde{S} \rightarrow S$ – выделение некоторого набора $\mathcal{T}$. Собственный прообраз C обозначим через $\tilde{C}$. Очевидное требование для набора $\mathcal{T}$ – это $\tilde{C}^2 < 0$. Необходимое и достаточное условие на $\mathcal{T}$ – это стягиваемость в логтерминальную особенность конфигурации кривых, в которую входит $\tilde{C}$. Поэтому все такие конфигурации должны иметь тип $\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7$ или $\mathbb{E}_8$. Используя все это, получаем сформулированные условия.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. В случае 6-2(ell) имеем $I = 7$, $2 \leq \rho(S) \leq 9$ и $\text{rank } \Delta(S) + \rho(S) = 10$.

Рис. 9

СЛЕДСТВИЕ 2.9. В случае 9-1(ell) имеем $I = 10$, $1 \leq \rho(S) \leq 5$ и $\text{rank } \Delta(S) + \rho(S) = 12$.

ТЕОРЕМА 2.10. В случае 22-1(ell) (см. рис. 10) набор $\mathcal{T}$ должен удовлетворять следующему условию: $3 \in \mathcal{T}_2$ или $1 \in \mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2 \neq \emptyset$.

Рис. 10

СЛЕДСТВИЕ 2.11. В случае 22-1(ell) имеем $I = 8$, $1 \leq \rho(S) \leq 6$ и $\text{rank } \Delta(S) + \rho(S) = 12$.

ТЕОРЕМА 2.12. В случае 51-2(ell) (см. рис. 11) набор $\mathcal{T}$ должен быть одним из следующих.

- (1) Пусть $T_1 = 0$. Тогда либо $\{2, 3\} \cap \mathcal{T}_2 \neq \emptyset$, либо $4 \in \mathcal{T}_2$ и $\overline{T_2} \geq 7$.
- (2) Пусть $\mathcal{T}_1 = \{1\}$. Тогда $\mathcal{T}_2 \neq \emptyset$.

СЛЕДСТВИЕ 2.13. В случае 51-2(ell) имеем $I = 11$, $1 \leq \rho(S) \leq 11$ и $\text{rank } \Delta(S) + \rho(S) = 12$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.14. Поверхности $K3$ с автоморфизмами порядка 11 и, следовательно, логповерхности Энрикеса с индексом $I = 11$ были описаны в [8].

ТЕОРЕМА 2.15. В случае 51-6(ell) (см. рис. 12) набор $\mathcal{T}$ должен удовлетворять следующему условию: $2 \in \mathcal{T}_2$ или $\mathcal{T}_1 = \{1\}$ и $\mathcal{T}_2 \neq \emptyset$.

СЛЕДСТВИЕ 2.16. В случае 51-6(ell) имеем $I = 8$, $1 \leq \rho(S) \leq 6$ и $\text{rank } \Delta(S) + \rho(S) = 12$.

Рис. 11

Рис. 12

Рис. 13

ТЕОРЕМА 2.17. В случае 52-2(ell) (см. рис. 13) набор $\mathcal{T}$ должен удовлетворять следующему условию: $\{3, 4\} \cap \mathcal{T}_2 \neq \emptyset$ или $T_1 \geq 1$ и $\mathcal{T}_2 \neq \emptyset$.

СЛЕДСТВИЕ 2.18. В случае 52-2(ell) имеем $I = 7$, $1 \leq \rho(S) \leq 8$ и $\text{rank } \Delta(S) + \rho(S) = 10$.

ТЕОРЕМА 2.19. В случае 53-2(ell) (см. рис. 14) набор $\mathcal{T}$ должен быть одним из следующих.

- (1) Пусть $T_1 = 0$. Тогда $\{2, 3\} \cap \mathcal{T}_2 \neq \emptyset$.

(2) Пусть $\mathcal{T}_1 = \{1\}$. Тогда $\mathcal{T}_2 \neq \emptyset$.

Рис. 14

СЛЕДСТВИЕ 2.20. В случае 53-2(ell) имеем $I = 9$, $1 \leq \rho(S) \leq 8$ и $\text{rank } \Delta(S) + \rho(S) = 12$.

ТЕОРЕМА 2.21. В случае 54(ell) (см. рис. 15) набор $\mathcal{T}$ должен удовлетворять следующему условию: $\mathcal{T}_2 \neq \emptyset$.

Рис. 15

СЛЕДСТВИЕ 2.22. В случае 54(ell) имеем $I = 7$, $1 \leq \rho(S) \leq 8$ и $\text{rank } \Delta(S) + \rho(S) = 10$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.23. Пусть $p_a(C) = 0$. Это случаи (8)–(10) теоремы 1.1. Во всех случаях поверхность $\bar{S}$ имеет три особые точки, которые лежат на C . На соответствующих рисунках эти точки пронумерованы сверху вниз. Тогда $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \cup \mathcal{T}_3$, где $\mathcal{T}_i$ состоит из кривых, которые стягиваются в особую точку $\bar{S}$ под номером i .

ТЕОРЕМА 2.24. В случае $18 - 1(+1)$ (см. рис. 16) набор $\mathcal{T}$ должен быть одним из следующих.

- (1) Пусть $T_1 = 0$. Тогда либо $\{3, 4\} \cap \mathcal{T}_2 \neq \emptyset$, либо $\{6, 7\} \cap \mathcal{T}_3 \neq \emptyset$.
- (2) Пусть $1 \in \mathcal{T}_1$. Тогда $\mathcal{T}_2$ и $\mathcal{T}_3$ любые.
- (3) Пусть $\mathcal{T}_1 = \{2\}$. Тогда либо $\mathcal{T}_2 \neq \emptyset$, либо $\underline{T}_3 \leq 8$.

СЛЕДСТВИЕ 2.25. В случае $18 - 1(+1)$ имеем $I = 13$, $1 \leq \rho(S) \leq 9$ и $\text{rank } \Delta(S) + \rho(S) = 10$.

Рис. 16

ТЕОРЕМА 2.26. В случае $25 - 1(+1)$ (см. рис. 17) набор $\mathcal{T}$ должен быть одним из следующих.

- (1) Пусть $T_1 = 0$. Тогда либо $2 \in \mathcal{T}_2$, либо $4 \in \mathcal{T}_3$.
- (2) Пусть $\mathcal{T}_1 = \{1\}$. Тогда $\mathcal{T}_2$ и $\mathcal{T}_3$ любые.

Рис. 17

СЛЕДСТВИЕ 2.27. В случае $25 - 1(+1)$ имеем $I = 17$, $1 \leq \rho(S) \leq 6$ и $\text{rank } \Delta(S) + \rho(S) = 6$.

ТЕОРЕМА 2.28. В случае $55(0)$ (см. рис. 18) набор $\mathcal{T}$ должен быть одним из следующих.

- (1) Пусть $T_1 = 0$. Тогда либо $\{2, 3\} \cap \mathcal{T}_2 \neq \emptyset$, либо $\underline{T}_3 \leq 8$, либо $4 \in \mathcal{T}_2$ и $\underline{T}_3 \leq 10$.
- (2) Пусть $\mathcal{T}_1 = \{1\}$. Тогда $\mathcal{T}_2$ и $\mathcal{T}_3$ любые.

Рис. 18

СЛЕДСТВИЕ 2.29. В случае 55(0) имеем $I = 11$, $1 \leq \rho(S) \leq 11$ и $\text{rank } \Delta(S) + \rho(S) = 12$.

ТЕОРЕМА 2.30. В случае 56(0) (см. рис. 19) набор $\mathcal{T}$ должен удовлетворять следующему условию: $1 \in \mathcal{T}_1$.

Рис. 19

СЛЕДСТВИЕ 2.31. В случае 56(0) имеем $I = 7$, $1 \leq \rho(S) \leq 3$ и $\text{rank } \Delta(S) + \rho(S) = 13$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Shokurov V. V. Complements on surfaces // J. Math. Sci. 2000. V. 102. № 2. P. 3876–3932.
- [2] Кудрявцев С. А. Классификация логповерхностей Энриквеса с $\delta = 2$ // E-print [math.AG/0204083](#), 2002.
- [3] Kollar J. Flips and Abundance for Algebraic Threefolds. Astérisque. V. 211. Paris: Soc. Math. France, 1992.
- [4] Prokhorov Yu. G. Lectures on Complements on Log Surfaces // MSJ Memoirs. 2001. V. 10.
- [5] Кудрявцев С. А. Классификация логповерхностей дель Пеццо с $\delta = 1$ // E-print [math.AG/0207269](#), 2002.
- [6] Blache R. The structure of l.c. surfaces of Kodaira dimension zero // J. Algebraic Geom. 1995. V. 4. P. 137–179.
- [7] Zhang D.-Q. Logarithmic Enriques surfaces // J. Math. Kyoto Univ. 1991. V. 31. P. 419–466.
- [8] Oguiso K., Zhang D.-Q. K3 surfaces with order 11 automorphisms // E-print [math.AG/9907020](#), 1999.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: kudryav@mech.math.msu.su

Поступило
24.09.2002