Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Беляев, Д. А. Швед, Группы внешних финитарных автоморфизмов, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 4, 635–636

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9100>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 16:23:57

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Группы внешних финитарных автоморфизмов

В. В. Беляев, Д. А. Швед

В работе [1] было введено понятие финитарного автоморфизма группы. Напомним, что автоморфизм группы G мы называем *финитарным*, если он действует тождественно на некоторой подгруппе конечного индекса в G . Очевидно, что все финитарные автоморфизмы группы G образуют подгруппу в $\text{Aut } G$, которую мы обозначили через $\text{FAut } G$. Далее, через $\text{FInn } G$ мы будем обозначать группу всех внутренних финитарных автоморфизмов группы G , а через $\text{FOut } G$ — *группу внешних финитарных автоморфизмов*, т.е. факторгруппу $\text{FAut } G / \text{FInn } G$. Основным результатом данной работы является

ТЕОРЕМА 1. *Группа $\text{FOut } G$ локально конечна для произвольной группы G .*

Заметим, что группа $\text{FAut } G$, вообще говоря, не обязана быть локально конечной и даже периодической, что можно увидеть на примере бесконечной группы диэдра, в которой внутренний автоморфизм, индуцируемый элементом бесконечного порядка, является финитарным. Но все же группа $\text{FAut } G$ достаточно близка к локально конечной. Так, в [1] было показано, что группа $\text{FAut } G$ является, с одной стороны, расширением абелевой группы при помощи локально конечной, а с другой — расширением локально конечной группы при помощи абелевой. Полученные в [1] результаты вызвали вопрос: в каких случаях группа $\text{FAut } G$ локально конечна? Теорема 1 данной работы показывает, что локальная конечность группы $\text{FAut } G$ достаточно просто определяется внутренним строением группы G . Для формулировки полученного с помощью теоремы 1 критерия локальной конечности $\text{FAut } G$ нам потребуется дополнительное обозначение. Через $\text{FC}(G)$ мы обозначаем *FC-центр* группы G , т.е. объединение всех конечных классов сопряженных элементов из G .

ТЕОРЕМА 2. *Для произвольной группы G следующие условия равносильны:*

- (1) $\text{FAut } G$ — локально конечная группа;
- (2) $\text{FInn } G$ — локально конечная группа;
- (3) $\text{FC}(G)/\text{Z}(G)$ — локально конечная группа;
- (4) $\text{Z}(\text{FC}(G))/\text{Z}(G)$ — локально конечная группа.

Доказательство теоремы 1 основано на следующем утверждении.

ЛЕММА 1. *Пусть G — произвольная группа, $H \leq G$, $a \in N_G(H)$ и $|H : C_H(a)| = n < \infty$. Тогда*

$$a^{n!} \in C_G(H) \cdot H.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 0-01-00349-а) и АВПЦ “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект 2.1.1/1662).

Доказательство. Положим $m = (n - 1)!$, $b = a^m$ и покажем сперва, что

$$[H, b] \subset C_H(b). \quad (1)$$

Действительно, элемент a действует сопряжением на множестве всех правых смежных классов $C_H(a)$ в H . Так как подгруппа $C_H(a)$ неподвижна относительно этого действия, то порядок индуцированной подстановки смежных классов делит $(n - 1)!$ и поэтому $[H, a^m] \subset C_H(a)$. Учитывая включение $C_H(a) \subset C_H(b)$, мы получаем (1).

Пусть теперь $\{x_1, \dots, x_k\}$ – семейство представителей всех правых смежных классов $C_H(b)$ в H . Так как $C_H(a) \subset C_H(b)$, то k делит n . Положим

$$z = b^{x_1} \cdot b^{x_2} \dots b^{x_k}, \\ d_i = b^{-1} \cdot b^{x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad d = d_1 \cdot d_2 \dots d_k.$$

Из (1) следует, что все элементы b^{x_i} , d_i , $i = 1, 2, \dots, k$, перестановочны. Поэтому $z \in C_G(H)$ и

$$z = b^{x_1} \cdot b^{x_2} \dots b^{x_k} = bd_1 \cdot bd_2 \dots bd_k = b^k d.$$

Значит, $b^k = zd^{-1} \in C_G(H) \cdot H$ и, тем более, $a^{n!} \in C_G(H) \cdot H$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть G – произвольная группа, $\varphi \in \text{Aut } G$ и $|G : C_G(\varphi)| = n < \infty$. Тогда $\varphi^{n!} \in \text{Inn } G$.

Доказательство. Расширим группу G , полагая $G^* = G \rtimes \langle a \rangle$, где $a^{-1}ga = \varphi(g)$ для $g \in G$. Так как $|G : C_G(\varphi)| = |G : C_G(a)| = n$, то согласно лемме 1 $a^{n!} \in C_{G^*}(G) \cdot G$. Значит, элемент $a^{n!}$ индуцирует сопряжением внутренний автоморфизм группы G .

Доказательство теоремы 1. Пусть G – произвольная группа. Согласно следствию 1 группа $\text{FOut } G$ является периодической. Но в силу теоремы 1 из [1] группа $\text{FAut } G$ есть расширение абелевой группы при помощи локально конечной. Отсюда следует, что любая периодическая факторгруппа группы $\text{FAut } G$ является локально конечной группой.

Доказательство теоремы 2. Равносильность первых двух условий теоремы 2 есть тривиальное следствие теоремы 1. Заметим также, что элемент $g \in G$ индуцирует внутренний финитарный автоморфизм в том и только том случае, когда g содержится в FC-центре группы G . Следовательно, $\text{FInn } G \simeq \text{FC}(G)/\text{Z}(G)$ и третье условие теоремы является небольшой переформулировкой второго условия.

Наконец, очевидно, что $\text{FC}(G)$ есть FC-группа и в силу [2; с. 504] $\text{FC}(G)$ является центральным расширением локально конечной группы. Используя этот факт, мы получаем равносильность последнего условия остальным условиям теоремы 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] В. В. Беляев, Д. А. Швед, Тр. ИММ, **15**, 2009, 50–57. [2] А. Г. Курош, *Теория групп*, Наука, М., 1967.

В. В. Беляев

Московский физико-технический институт
(государственный университет)
E-mail: v.v.belyaev@list.ru

Поступило

02.06.2010

Д. А. Швед

Московский физико-технический институт
(государственный университет)
E-mail: danshved@gmail.com