Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Г. Царьков, Свойства множеств, обладающих устойчивой ε -выборкой, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 4, 608–613

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9101>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 16:26:42

Свойства множеств, обладающих устойчивой ε -выборкой

И. Г. Царьков

В работе изучаются множества, для которых существуют локальные (глобальные) непрерывные ε -выборки на некоторых выпуклых подмножествах. В частности, устанавливается, что если на некоторой окрестности $O(x)$ точки x банахова пространства X для любого числа $\varepsilon > 0$ существует всюду плотное в $O(x)$ выпуклое множество K , на котором существует полунепрерывная сверху ацикличная (в частности, непрерывная однозначная) ε -выборка на аппроксимативно компактное множество $M \subset X$, то x является точкой δ -солнечности, и, если дополнительно, $X \in (R)$, то множество всех ближайших для x в M одно-точечно.

Библиография: 6 названий.

Пусть (B) – класс всех действительных банаховых пространств. Для произвольных $X \in (B)$, $x \in X$, и непустых множеств $A, B \subset X$ положим

$$\varrho(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|, \quad d(A, B) = \sup_{z \in B} \varrho(z, A).$$

Для каждого непустого подмножества $M \subset X$ и любой точки $x \in X$ через $P_M x$ мы обозначим метрическую проекцию x на M , т.е.

$$P_M x = \{y \in M \mid \|x - y\| = \varrho(x, M)\}$$

представляет собой множество всех ближайших для x точек во множестве M . И для произвольного числа $\delta > 0$ мы определим множество

$$P_M^\delta x = \{y \in M \mid \|x - y\| \leq \varrho(x, M) + \delta\}.$$

Для каждого непустого множества $M \subset X$ через $AC(M)$ обозначим множество всех таких точек $x \in X$, для которых выполняется свойство аппроксимативной компактности: каждая последовательность $\{y_n\} \subset M$ такая, что $\|x - y_n\| \rightarrow \varrho(x, M)$, $n \rightarrow \infty$, имеет сходящуюся в M подпоследовательность. Отсюда вытекает, что $P_M x$ – непустой компакт для каждой точки $x \in AC(M)$. Если $AC(M) = X$, тогда множество M называют *аппроксимативно компактным*. Отметим, что для каждой точки $x \in AC(M)$ и произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что $P_M^\delta x$ лежит в ε -окрестности компакта $P_M x$ (см. [1; лемма 2]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00442-а).

Для любых $x \in X$ и $r \geq 0$ мы будем рассматривать следующие обозначения: $B(x, r) = \{y \in X \mid \|x - y\| \leq r\}$ – шар с центром x радиуса r и $S = \{y \in X \mid \|y\| = 1\}$ – единичная сфера. Через S^* обозначим единичную сферу сопряженного с X пространства X^* .

В дальнейшем нам понадобятся следующие определения:

(R) – класс строго выпуклых пространств, т.е. таких банаховых пространств X , для которых выполняется неравенство $\|x + y\| < 2$ для любых различных точек $x, y \in S$;

(SS) – класс строго гладких пространств, т.е. таких $X \in (B)$, что для любых точки $x \in S$ и функционала $x^* \in S^*$ такого, что $x^*(x) = 1$, и таких произвольных последовательностей точек $\{x_n\} \subset X$ и чисел $\{r_n\} \subset \mathbb{R}_+$, что $r_n \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow \infty$, и

$$x \notin B(x_n, r_n) \supset B\left(0, 1 - \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

выполняется включение

$$\{y \in x \mid x^*(y) < 1\} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(x_n, r_n).$$

Мы будем говорить, что $\psi: N \rightarrow 2^M$ – ε -выборка на множестве $N \subset X$, если $\psi(x) \subset P_M^\varepsilon x$ для всех точек $x \in N$. В случае, когда отображение $F: N \rightarrow 2^X$ обладает свойством: для каждой точки $x \in N$ $Fx \neq \emptyset$, и для всех $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $d(Fx, F(B(x, \delta))) < \varepsilon$, мы будем говорить, что оно H -полунепрерывно сверху на N .

Множество $A \subset X$ называют ациклическим, если оно не пусто, компактно и группы гомологий H_q ($q \geq 1$) и приведенная группа $\tilde{H}_0$ тривиальны (см. [2]). Будем говорить, что отображение $F: N \rightarrow 2^X$ ациклично, если Fx ациклично для всех $x \in N$.

Будем говорить, что отображение $\psi: N \rightarrow 2^M$ является полунепрерывной сверху ациклической ε -выборкой, если это отображение ациклично, H -полунепрерывно сверху и является ε -выборкой.

ЛЕММА А (см. [3; лемма 2]). Пусть $X \in (B)$, K – непустой выпуклый компакт в X , M – выпуклое замкнутое подмножество X , содержащее K , $\delta = d(K, M)$, и $F: M \rightarrow 2^M$ – H -полунепрерывное сверху ациклическое отображение. Тогда существует точка $x \in K$, для которой $\varrho(x, Fx) \leq \delta$.

Точка $x \in X \setminus M$ называется точкой δ -солнечности множества M , если существует последовательность

$$\{z_n\} \subset X: z_n \rightarrow x, \quad n \rightarrow \infty, \quad z_n \neq x,$$

такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varrho(z_n, M) - \varrho(x, M)}{\|z_n - x\|} = 1.$$

Если все точки множества $X \setminus M$ являются точками δ -солнечности, то множество M называют δ -солнцем.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $X \in (B)$, $M \subset X$, $x \in AC(M) \setminus M$ и найдется окрестность $O_r(x) \subset X$, на которой для любого числа $\varepsilon > 0$ существует полунепрерывная сверху ациклическая ε -выборка $\varphi_\varepsilon: O_r(x) \rightarrow 2^M$. Тогда x – точка δ -солнечности, и, если дополнительно, $X \in (R)$, то множество $P_M x$ одноточечно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя при необходимости гомотетию, мы можем считать, что $\varrho(x, M) = 1$. Пусть K – замыкание выпуклой оболочки множества $P_M x$, и $\varepsilon_n = 1/(n+4)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует число $\delta_n \in (0, r/4)$, для которого множество $N = P_M^{3\delta_n} x$ лежит в ε_n -окрестности компакта $P_M x$, а следовательно, и в ε_n -окрестности компакта K . Отметим, что $\varphi_{\varepsilon_n \delta_n}(B(x, 2\delta_n)) \subset P_M^{3\delta_n} x$. При этом, $\|y - x\| \leq \varrho(x, M) + \varepsilon_n \leq 2$ для всех $y \in N$. Отсюда для любой точки y множества T , являющегося выпуклой замкнутой оболочкой множества N , выполнено неравенство

$$\|y - x\| \leq d(\{x\}, T) = d(\{x\}, N) \leq 2.$$

Следовательно, точка $x + \delta_n(x - y) \in B(x, 2\delta_n) \subset O_r(x)$, и, поэтому определено отображение $F: T \rightarrow 2^T$, задаваемое формулой

$$F(y) = \varphi_{\varepsilon_n \delta_n}(x + \delta_n(x - y)).$$

Это отображение ациклично и полунепрерывно сверху, следовательно, в силу предыдущего утверждения существует точка $y_n \in K \subset T$, для которой $\varrho(y_n, Fy_n) \leq \varepsilon_n$. Так как множество Fy_n лежит в ε_n -окрестности компакта $P_M x$, то $\varrho(y_n, P_M x) \leq 2\varepsilon_n$. Следовательно, $\|y_n - x\| \geq 1 - 2\varepsilon_n$. Поскольку Fy_n – компакт, то найдется точка $z_n \in Fy_n$, для которой $\|y_n - z_n\| \leq \varepsilon_n$. Положим

$$\theta_n = \frac{\delta_n}{1 + \delta_n} \quad \text{и} \quad \varpi_n = x + \delta_n(x - y_n).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|\varpi_n - z_n\| &= \|\varpi_n - (x + \theta_n(z_n - y_n))\| + \|(x + \theta_n(z_n - y_n)) - z_n\| \\ &\quad (\text{так как } x + \theta_n(z_n - y_n) \in [\varpi_n, z_n]) \\ &\geq \|\varpi_n - x\| - \theta_n \varepsilon_n + \|z_n - x\| - \theta_n \varepsilon_n \\ &\geq 1 + \|\varpi_n - x\| - 2\theta_n \varepsilon_n \geq 1 + \|\varpi_n - x\| - 2\delta_n \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Положим $w_n = x + \delta_n(x - z_n)$, тогда $\|w_n - \varpi_n\| = \delta_n \|z_n - y_n\| \leq \delta_n \varepsilon_n$, и, следовательно,

$$\|w_n - x\| = \delta_n \|x - z_n\| \geq \delta_n (\|x - y_n\| - \|z_n - y_n\|) \geq \delta_n (1 - 3\varepsilon_n).$$

Кроме того,

$$|\varrho(\varpi_n, M) - \varrho(w_n, M)| \leq \|w_n - \varpi_n\| \leq \delta_n \varepsilon_n.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|x - w_n\| &\geq \varrho(w_n, M) - \varrho(x, M) = \varrho(w_n, M) - 1 \geq \varrho(\varpi_n, M) - 1 - \delta_n \varepsilon_n \\ &\geq d(\{\varpi_n\}, Fy_n) - \varepsilon_n \delta_n - 1 - \delta_n \varepsilon_n \geq \|\varpi_n - z_n\| - 1 - 2\varepsilon_n \delta_n \\ &\geq \|\varpi_n - x\| - 4\delta_n \varepsilon_n \geq \|w_n - x\| - 5\delta_n \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$1 \geq \frac{\varrho(w_n, M) - \varrho(x, M)}{\|w_n - x\|} \geq 1 - \frac{5\delta_n \varepsilon_n}{\|w_n - x\|} = 1 - \frac{5\delta_n \varepsilon_n}{\delta_n(1 - 3\varepsilon_n)} \geq 1 - \frac{5\varepsilon_n}{1 - 3\varepsilon_n}.$$

Таким образом,

$$\frac{\varrho(w_n, M) - \varrho(x, M)}{\|w_n - x\|} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty,$$

т.е. x — точка δ -солнечности.

Теперь докажем, что $P_M x$ одноточечно, если $X \in (R)$. Делая, если необходимо, параллельный перенос, можно считать, что $x = 0$, тогда $w_n = -\delta_n z_n$. Поскольку $z_n \in M$ и $1 \leq \|z_n - x\| \leq 1 + 3\varepsilon_n$, то некоторая подпоследовательность последовательности $\{z_n\}$ сходится к некоторой точке $z^0 \in P_M x$. С точностью до переобозначения, можно считать, что последовательность $\{z_n\}$ сходится к точке z^0 . Докажем методом от противного, что $P_M x = \{z^0\}$. Действительно, предположим, что существует точка $y^0 \in P_M x \setminus \{z^0\}$. Тогда $\|z^0\| = \|y^0\| = 1$, и в силу строгой выпуклости нормы

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \|z^0 + y^0\| < 2.$$

Положим $w_n^0 = -\delta_n z^0$, тогда $\|w_n - w_n^0\| = \delta_n \|z_n - z^0\| = \bar{o}(\delta_n)$ и $\|z_n\| \rightarrow \|z^0\| = 1$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\varrho(w_n, M) = 1 + \|w_n\| + \bar{o}(\|w_n\|) = 1 + \delta_n \|z_n\| + \bar{o}(\delta_n) = 1 + \delta_n + \bar{o}(\delta_n).$$

Оценим величину $\|y^0 - w_n^0\|$ сверху и снизу. Получим оценки

$$\|y^0 - w_n^0\| = \|y^0 + \delta_n z^0\| = \|y^0(1 - \delta_n) + \delta_n(y^0 + z^0)\| \leq 1 - \delta_n + \delta_n \alpha = 1 + \beta \delta_n,$$

где $\beta = \alpha - 1 < 1$, и

$$\|y^0 - w_n^0\| \geq \|y^0 - w_n\| - \|w_n - w_n^0\| \geq \varrho(w_n, M) - \|w_n - w_n^0\| = 1 + \delta_n + \bar{o}(\delta_n).$$

Отсюда

$$1 + \delta_n + \bar{o}(\delta_n) \leq 1 + \beta \delta_n,$$

противоречие. Следовательно, $y^0 \notin P_M x$, т.е. $P_M x = \{z^0\}$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из предыдущей теоремы вытекает (см. [4]), что в случае $X \in (R)$ точка x является точкой дифференцируемости по Гато расстояния до множества $\varrho(x, M)$. При этом максимальная производная по направлению равна 1 и достигается на направлении из ближайшей точки $P_M x$ в точку x . Кроме того, точка x является точкой δ' -солнечности (см. [4]).

ТЕОРЕМА В (см. [5], [6]). Пусть пространство $X \in (B)$ таково, что $X \in (SS)$ или $X^* \in (R)$, и $M \subset X$ — множество существования, являющееся δ -солнцем. Тогда M выпукло.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть пространство $X \in (B)$ таково, что $X \in (SS)$ или $X^* \in (R)$, и $M \subset X$ — аппроксимативно компактное множество, обладающее полунепрерывной сверху ациклической ε -выборкой на $X \setminus M$ для любого $\varepsilon > 0$. Тогда M выпукло.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $X \in (R)$, $M \subset X$ – аппроксимативно компактное множество, обладающее полунепрерывной сверху ациклической ε -выборкой на окрестности $O(x)$ для любого $\varepsilon > 0$. Тогда метрическая проекция $P_M u$ одноточечна для всех $u \in O(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. На самом деле, в случае, когда, кроме того, X – локально равномерно выпуклое пространство или M ограниченно компактно, точки окрестности $O(x)$ являются точками локальной солнечности (см. [4]).

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $X \in (R)$, $M \subset X$ – аппроксимативно компактное множество, обладающее полунепрерывной сверху ациклической ε -выборкой на множестве $X \setminus M$ для любого $\varepsilon > 0$. Тогда M – чебышевское множество.

Отображение $f: N \rightarrow X$ называют ε -сдвигом, если $\|f(x) - x\| \leq \varepsilon$ для всех $x \in N$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $X \in (B)$, $M \subset X$, $x \in AC(M) \setminus M$, $O(x) \subset X$ – некоторая окрестность, и для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют множество $N_\varepsilon \subset X$ и непрерывный ε -сдвиг $f_\varepsilon: O(x) \rightarrow N_\varepsilon$. И пусть на множестве N_ε существует полунепрерывная сверху ациклическая ε -выборка $\psi_\varepsilon: N_\varepsilon \rightarrow 2^M$. Тогда x – точка δ -солнечности, и, если дополнительно, $X \in (R)$, то множество $P_M x$ одноточечно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $\psi_\varepsilon \circ f_\varepsilon$ является полунепрерывной сверху ациклической 2ε -выборкой на окрестности $O(x)$. Из произвольности выбора $\varepsilon > 0$ и теоремы 1 вытекает утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $X \in (B)$, $M \subset X$, $x \in AC(M) \setminus M$, $O(x) \subset X$ – некоторая окрестность и для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют выпуклое множество $K_\varepsilon \subset X$: $d(K_\varepsilon, O(x)) < \varepsilon$, на котором существует полунепрерывная сверху ациклическая ε -выборка $\psi_\varepsilon: K_\varepsilon \rightarrow 2^M$. Тогда x – точка δ -солнечности, и, если дополнительно, $X \in (R)$, то множество $P_M x$ одноточечно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется локально конечное покрытие пространства $O(x)$ открытыми множествами $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, диаметр которых меньше $\varepsilon/2$ и каждое из которых содержится в $O(x)$. Пусть x_α – некоторая точка из U_α . Для каждого $\alpha \in \mathcal{A}$ существует такая функция $\varphi_\alpha \in C(X, \mathbb{R}_+)$, что $\varphi_\alpha > 0$ на U_α и $\varphi_\alpha \equiv 0$ вне U_α . Пусть $\psi_\alpha = \varphi_\alpha / \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \varphi_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$. Тогда $\psi_\alpha \equiv 0$ вне U_α , $\psi_\alpha > 0$ на U_α и $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \psi_\alpha \equiv 1$ на $O(x)$. Для каждого $\alpha \in \mathcal{A}$ выберем некоторую точку $l_\alpha \in N_\varepsilon \cap B(x_\alpha, \varepsilon/2)$, где $N_\varepsilon = K_{\varepsilon/2}$. Построим непрерывное отображение $f(y) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} l_\alpha \psi_\alpha(y)$ окрестности $O(x)$ в множество N_ε . Нетрудно видеть, что для всех точек $y \in O(x)$ верны соотношения

$$\begin{aligned} \|f(y) - y\| &= \left\| \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} l_\alpha \psi_\alpha(y) - y \right\| = \left\| \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} l_\alpha \psi_\alpha(y) - y \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \psi_\alpha(y) \right\| \\ &\leq \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \psi_\alpha(y) \|l_\alpha - y\| = \sum_{\alpha: y \in U_\alpha} \psi_\alpha(y) \|l_\alpha - y\| \\ &\leq \sum_{\alpha: y \in U_\alpha} \psi_\alpha(y) (\|l_\alpha - x_\alpha\| + \|x_\alpha - y\|) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда в силу теоремы 2 выполняется утверждение теоремы 3.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $X \in (B)$, $M \subset X$, $x \in AC(M) \setminus M$, $O(x) \subset X$ – некоторая окрестность и для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют выпуклое множество K , всюду плотное на $O(x)$ и на котором существует полунепрерывная сверху ациклическая (в частности, непрерывная однозначная) ε -выборка $\psi_\varepsilon: K \rightarrow 2^M$. Тогда x – точка δ -солнечности, и, если дополнительно, $X \in (R)$, то множество $P_M x$ одноточечно.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $X \in (R)$, $M \subset X$ – аппроксимативно компактное множество, обладающее для всех $\varepsilon > 0$ полунепрерывной сверху ациклической ε -выборкой на некотором выпуклом множестве $N: X \setminus M \subset \bar{N}$. Тогда M – чебышевское множество.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. Г. Царьков, “О связности некоторых классов множеств в банаховых пространствах”, *Матем. заметки*, **40**:2 (1986), 174–196.
- [2] Н. Стинрод, С. Эйленберг, *Основания алгебраической топологии*, Физматгиз, М., 1958.
- [3] И. Г. Царьков, “Свойства множеств, обладающих непрерывной выборкой из оператора P^δ ”, *Матем. заметки*, **48**:4 (1990), 122–131.
- [4] В. С. Балаганский, Л. П. Власов, “Проблема выпуклости чебышёвских множеств”, *УМН*, **51**:6 (1996), 125–188.
- [5] Л. П. Власов, “Аппроксимативные свойства множеств в банаховых пространствах”, *Матем. заметки*, **7**:5 (1970), 594–604.
- [6] Л. П. Власов, “Некоторые теоремы о чебышевских множествах”, *Матем. заметки*, **11**:2 (1972), 135–144.

И. Г. Царьков

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: tsar@mech.math.msu.su

Поступило

03.09.2010