Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Федоров, Представление комплексных банаховых пространств пространством непрерывных функций на компакте, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 2, 316–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9103>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 14:57:43

Представление комплексных банаховых пространств пространством непрерывных функций на компакте

В. М. Федоров

Существует много различных представлений пространства $C(X)$ непрерывных функций на компакте X . Результаты, характеризующие его среди действительных банаховых пространств при помощи естественных свойств нормированного пространства, получены Аренсом–Келли, Джерисоном и Майерсом. В настоящей работе дается характеристика $C(X)$ среди комплексных банаховых пространств. Для этого вначале устанавливаются свойства функционалов Майерса на комплексном нормированном пространстве E и определяются представления пространства орбитальных функций $C_\sigma(X)$ относительно действия однопараметрической группы гомеоморфизмов X . Изложение ведется одновременно для действительного и комплексного случая.

Пусть E – нормированное пространство над полем действительных или комплексных чисел с единичным шаром S , а E' – его сопряженное пространство с единичным шаром S' . Обозначим через $\mathfrak{W} = \mathfrak{W}(E)$ совокупность всех максимальных конусов $K \subset E$, на которых норма аддитивна, а через $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}(E')$ – соответствующее множество минимальных граней $\Gamma \subset S'$ таких, что каждому максимальному конусу $K \in \mathfrak{W}$ соответствует минимальная грань $\Gamma_K \in \mathfrak{V}$ по формуле

$$\Gamma_K \doteq \{\alpha \in S' \mid \operatorname{Re} \alpha(x) = \|x\|, x \in K\}.$$

Заметим, что всякий максимальный конус $K \in \mathfrak{W}$ совпадает с некоторым конусом вида

$$K_\alpha \doteq \{x \in E \mid \operatorname{Re} \alpha(x) = \|\alpha\|\}, \quad \alpha \in S'.$$

Рассмотрим линейную оболочку $L \doteq \operatorname{sp}_{\mathbb{R}}(K)$ как упорядоченное пространство с положительным конусом $K \in \mathfrak{W}$. Нетрудно заметить, что функция $\Delta_x(y) \doteq \|x + y\| - \|y\|$ по переменной $y \in K$ является невозрастающей, поэтому при всех $x \in E$ существует предел по направлению K

$$\varphi_K(x) \doteq \lim_{y \in K} \Delta_x(y) = \inf_{y \in K} \Delta_x(y),$$

Функция $\varphi_K(x)$, заданная при всех $x \in E$, называется *функционалом Майерса*, ассоциированным с максимальным конусом $K \in \mathfrak{W}$ (см. [1; с. 133], [2; с. 148]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Функционал Майерса $\varphi_K(x)$, $K \in \mathfrak{W}$, определенный на нормированном пространстве E , обладает следующими свойствами:*

- $- \|x\| \leq \varphi_K(x) \leq \|x\|$ для всех $x \in E$;
- $\varphi_K(x) = \pm \|x\|$ тогда и только тогда, когда $x \in \pm K$;
- $\varphi_K(\lambda x) = \lambda \varphi_K(x)$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$ и $x \in E$;
- $\varphi_{K_1}(x) = \varphi_{K_2}(x)$ при всех $x \in E$ тогда и только тогда, когда $K_1 = K_2$;
- $\varphi_K(x + y) \leq \varphi_K(x) + \varphi_K(y)$ при всех $x, y \in E$; функционал $\varphi_K(x)$ является непрерывной субнормой на пространстве E и линейным функционалом над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ на линейной оболочке L конуса K ;
- функционал $\varphi_K(x)$ является линейным на пространстве E над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда функция $p(x) = \|x\|$, заданная при всех $x \in K$, имеет единственное продолжение на E до линейного функционала с нормой единица;

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00169).

DOI: 10.4213/mzm9103

© В. М. Федоров, 2013

- г) если $\Gamma_K \in \mathfrak{V}$ есть минимальная грань шара $S' \subset E'$, ассоциированная с максимальным конусом $K \in \mathfrak{W}$, то функционал Майерса равен $\varphi_K(x) \doteq \sup_{\alpha \in \Gamma_K} \operatorname{Re} \alpha(x)$ при всех $x \in E$.

Из этих свойств нетрудно заметить, что функционал $\varphi_K(x)$ является линейным над $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда он является нечетным, т.е. выполняется равенство $\varphi_K(-x) = -\varphi_K(x)$ при всех $x \in E$. В этом случае он имеет единственное линейное продолжение из подпространства L на все пространство E с сохранением нормы, равной 1, и минимальная грань Γ_K шара S' , соответствующая максимальному конусу $K \in \mathfrak{W}$, состоит из одной точки.

Обозначим через $C(X)$ пространство всех непрерывных и ограниченных функций $f: X \rightarrow \mathbb{F}$ со значениями в поле $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел, определенных на хаусдорфовом топологическом пространстве X с чебышевской нормой $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Пусть $\delta: X \rightarrow C'(X)$ является отображением в сопряженное пространство $C'(X)$, где $\delta(x) = \delta_x$ функционал Дирака, равный $\delta_x(f) = f(x)$ при всех $f \in C(X)$. Тогда отображение δ непрерывно в слабой* топологии пространства $C'(X)$ и является гомеоморфизмом между X и $\delta(X)$ тогда и только тогда, когда пространство X вполне регулярно [3; с. 158–161]. Если X вполне регулярно, то слабое* замыкание образа $\delta(X)$ состоит из всех тех крайних точек α единичного шара в $C'(X)$, для которых выполняется равенство $\operatorname{Re} \alpha(1) = 1$ [2; с. 146]. Далее всюду будем предполагать, что пространство X является вполне регулярным.

Если X компактно, то множество крайних точек единичного шара в $C'(X)$ слабо* замкнуто. Конус $K \subset C(X)$, на котором норма аддитивна, тогда и только тогда является максимальным в пространстве $C(X)$, когда он принимает следующий вид:

$$K_{t,x} = \{f \in C(X) \mid \operatorname{Re} e^{it} f(x) = \|f\|\}, \quad x \in X, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, в этом случае всякая минимальная грань Γ_K единичного шара в $C'(X)$ является крайней точкой, а ее действительная часть является функционалом Майерса φ_K .

Обозначим далее через $\sigma = \{\sigma_t \mid t \in \mathbb{T}\}$ непрерывную однопараметрическую группу гомеоморфизмов $\sigma_t: X \rightarrow X$ пространства X , для которой каждая точка $x \in X$ имеет период 2π за исключением, быть может, неподвижных точек группы σ , т.е. $\sigma(x) = x$. При этом в случае поля действительных чисел $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ параметр $t \in \mathbb{T} \doteq \pi\mathbb{Z}$ считается дискретным, а в случае поля комплексных чисел $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ параметр $t \in \mathbb{T} \doteq \mathbb{R}$ считается непрерывным.

Через $C_\sigma(X)$ обозначается подпространство в $C(X)$ всех орбитальных функций группы σ , т.е. таких функций, что $f(\sigma_t x) = e^{it} f(x)$ при всех $(t, x) \in \mathbb{T} \times X$. Например, если $X = S'$ является единичным шаром сопряженного пространства E' , в котором введена слабая* топология, то действие однопараметрической группы $\sigma = \{\sigma_t \mid t \in \mathbb{T}\}$ гомеоморфизмов X определяется естественным образом по формуле $\sigma_t(\alpha) = e^{it} \alpha$ при всех $(t, \alpha) \in \mathbb{T} \times X$.

Так как отображение δ коммутирует с элементами группы σ , то единичный шар $S'_\sigma \subset C'_\sigma(X)$ является слабо* замкнутой выпуклой оболочкой множества $\delta(X)$ [4; с. 478]. Совокупность крайних точек $\operatorname{ex}(S'_\sigma)$ содержится в слабом* замыкании образа $\delta(X)$. Множество $\delta(X)$ является слабо* замкнутым в шаре S'_σ в том и только в том случае, когда пространство X компактно. Таким образом, если X компактно, то множество крайних точек $\operatorname{ex}(S'_\sigma)$ и множество максимальных конусов пространства $C_\sigma(X)$ находится во взаимно однозначном соответствии с теми точками $x \in X$, которые имеют период 2π , т.е. $\sigma(x) \neq x$. При этом каждый максимальный конус $K \subset C_\sigma(X)$, на котором норма аддитивна, определяется уравнением $\operatorname{Re} v(x) = \|v\|$ в некоторой фиксированной точке $x \in X$, где $\sigma(x) \neq x$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Подпространство $M \subset N$ нормированного пространства $N \subset C(X)$ называется *отделяющим (вполне регулярным)* подпространством в N [2; с. 150], если какова бы не была точка $x_0 \in X$ и замкнутое множество $A \subset X$, не содержащее $x_0 \notin A$, для

которых существует функция $u \in N$, удовлетворяющая неравенству

$$\operatorname{Re} u(x_0) > \sup_{x \in A} |u(x)| \quad (\|u\| = \operatorname{Re} u(x_0) > \sup_{x \in A} |u(x)|),$$

существует функция $v \in M$, также удовлетворяющая этому неравенству:

$$\operatorname{Re} v(x_0) > \sup_{x \in A} |v(x)| \quad (\|v\| = \operatorname{Re} v(x_0) > \sup_{x \in A} |v(x)|).$$

Всякое нормированное пространство E над полем действительных или комплексных чисел допускает изометричное отображение на отделяющее подпространство в $C_\sigma(X)$ на вполне регулярном пространстве X с непрерывной однопараметрической группой σ гомеоморфизмов, где в качестве X можно взять совокупность всех крайних точек минимальных граней единичного шара $S' \subset E'$ сопряженного пространства E' , наделенного слабой* топологией.

Если $M \subset C_\sigma(X)$ вполне регулярно, то всякий конус вида $K_x = \{v \in M \mid \operatorname{Re} v(x) = \|v\|\}$, где $\sigma x \neq x$, на котором норма аддитивна, является максимальным конусом в подпространстве M , т.е. $K_x \in \mathfrak{W}(M)$. При этом функционал Майерса φ_{K_x} на подпространстве M , ассоциированный с максимальным конусом K_x , принимает вид $\varphi_{K_x}(v) = \operatorname{Re} v(x)$ при всех $v \in M$. Если, кроме того, пространство X компактно, то каждый максимальный конус $K \in \mathfrak{W}(M)$, на котором норма аддитивна, принимает вид $K = K_x$ при некотором $x \in X$ и $\sigma x \neq x$.

ТЕОРЕМА 1. *Нормированное пространство E над полем действительных или комплексных чисел тогда и только тогда изометрично вполне регулярному подпространству в $C_\sigma(X)$ на вполне регулярном X с непрерывной однопараметрической группой σ гомеоморфизмов, когда существует такое множество $Y \subset \operatorname{ex}(S')$ крайних точек единичного шара $S' \subset E'$, что*

- a) *каждый элемент Y является одноточечной минимальной гранью S' ;*
- b) *множество Y инвариантно $\sigma(Y) = Y$ относительно действия группы σ ;*
- c) *слабо* замкнутая выпуклая оболочка множества Y равна $\overline{\operatorname{co}}(Y) = S'$.*

Если, кроме того, X компактно, то эти условия равносильны одному из следующих условий:

- d) *каждый функционал Майерса является линейным над полем действительных чисел и множество всех функционалов Майерса $Y = \{\varphi_K \mid K \in \mathfrak{W}\}$ (или множество $Y \cup 0$) является слабо* компактным в сопряженном пространстве E' ;*
- e) *каждая минимальная грань единичного шара S' является крайней точкой и множество $\operatorname{ex}(S')$ всех крайних точек этого шара (или множество $\operatorname{ex}(S') \cup 0$) является слабо* компактным в пространстве E' .*

В случае компактного пространства X утверждение этой теоремы вытекает из следующих соображений. Пусть $I: E \rightarrow C_\sigma(X)$ является изометричным отображением на вполне регулярное подпространство $M = I(E)$. Так как пересечение с шаром S'_σ прообраза $I'^{-1}(A)$ любого экстремального подмножества $A \subset S'$ при сопряженном отображении $I': C'_\sigma(X) \rightarrow E'$ является экстремальным подмножеством шара S'_σ , то в силу теоремы Крейна–Мильмана каждая крайняя точка единичного шара S' является образом некоторой крайней точки единичного шара S'_σ , т.е. имеют место следующие включения: $\operatorname{ex}(S') \subset I'(\operatorname{ex}(S'_\sigma)) \subset I'(\delta(X))$.

С другой стороны, в силу первой части теоремы 1 каждый функционал вида $\alpha_x = I'\delta_x$, где $\sigma(x) \neq x$, является одноточечной минимальной гранью шара S' и его действительная часть совпадает с функционалом Майерса $\varphi_{K_{\alpha_x}} = \operatorname{Re} \alpha_x$, где K_{α_x} является максимальным конусом E , на котором норма аддитивна. Отсюда будут справедливы следующие равенства:

$$\{\alpha_x = I'\delta_x \mid \sigma(x) \neq x\} = \{\alpha \mid \operatorname{Re} \alpha = \varphi_K, K \in \mathfrak{W}\} \quad \text{и} \quad \{I'\delta_x \mid \sigma(x) = x\} = \{0\}.$$

Таким образом, если группа σ не имеет неподвижных точек, то множество X гомеоморфно множеству $\text{ex}(S')$, а если группа σ имеет неподвижные точки, то X при отождествлении всех неподвижных точек будет гомеоморфно множеству $\text{ex}(S') \cup 0$, т.е. имеют место (d) и (e). Обратно, если выполнено одно из этих условий (d) или (e), то в силу первой части образ канонического отображения $J: E \rightarrow C_\sigma(X)$ является вполне регулярным подпространством в $C_\sigma(X)$, где X обозначает слабо* компактное множество, равное $\text{ex}(S')$ или $\text{ex}(S') \cup 0$.

В действительном случае Аренс–Келли указали два критерия изометричности пространству $C(X)$ на компакте X в терминах нормированного пространства. Мы укажем несколько эквивалентных критериев для пространства $C(X)$ комплекснозначных непрерывных функций.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть E – банахово пространство и множество Y состоит из всех крайних точек минимальных граней сопряженного шара S' . Тогда пространство E в том и только в том случае изометрично пространству $C_\sigma(X)$ на некотором хаусдорфовом компакте X с непрерывной однопараметрической группой σ гомеоморфизмов, когда выполнено одно из следующих условий:

- для каждой системы максимальных конусов $\{K_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathfrak{W}$, для которых пересечение $\bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha = 0$ равно нулю, найдутся такие сети $\{\alpha'_n\}, \{\alpha''_n\} \subset A$ и число $t \neq \pi \pmod{2\pi}$, что $\lim\{\varphi_{K_{\alpha'_n}}(v) + \varphi_{K_{\alpha''_n}}(e^{it}v)\} = 0$ при всех $v \in E$;
- для каждого подмножества $A \subset Y$, для которого при всех $t \neq 0 \pmod{2\pi}$ пересечение $\bar{A} \cap \sigma_t(\bar{A}) = \emptyset$ слабых* замыканий множеств A и $\sigma_t(A)$ является пустым множеством, пересечение соответствующих максимальных конусов $\bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha \neq 0$ не равно нулю;
- для каждого подмножества $A \subset Y$, для которого при всех $t \neq 0 \pmod{2\pi}$ пересечение $\bar{A} \cap \sigma_t(\bar{A}) = \emptyset$ слабых* замыканий множеств A и $\sigma_t(A)$ является пустым множеством, существует такой ненулевой элемент $e \in E$, что $\text{Re } \alpha(e) = \|e\|$ при всех $\alpha \in A$;
- пространство E канонически изометрично пространству $C_\sigma(X)$ на слабо* компактном множестве $X = \bar{Y}$, совпадающим со слабым* замыканием множества Y в сопряженном пространстве E' .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Говорят [2; с. 154], что банахово пространство E обладает свойством (A), если для каждой системы максимальных выпуклых подмножеств $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \partial S$ границы единичного шара $\partial S \subset E$, у которых пересечение $\bigcap_{\alpha \in A} V_\alpha = \emptyset$ пусто, существуют такие сети $\{\alpha'_n\}, \{\alpha''_n\} \subset A$ и число $t \neq \pi \pmod{2\pi}$, что $\lim\{\rho(u, V_{\alpha'_n}) + \lim \rho(e^{it}u, V_{\alpha''_n})\} = 2$ при всех $u \in E$, где $\rho(u, V) = \inf_{v \in V} \|u - v\|$ обозначает расстояние от точки $u \in E$ до множества $V \subset E$.

Для того чтобы банахово пространство E обладало свойством (A), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из эквивалентных условий предложения 2. В случае, если элемент $e \in \text{ex}(S)$ является крайней точкой, то каждый элемент $v \in E$ принадлежит некоторому множеству вида $U_t \doteq \{u \in E \mid \|u + e^{it}e\| = \|u\| + 1\}$, $t \in \mathbb{T}$. При этом все элементы максимального конуса $K \in \mathfrak{W}$ принадлежат одному из этих множеств U_t и для всякого максимального конуса $K \in \mathfrak{W}$ существует такое единственное число $t \in \mathbb{T} \pmod{2\pi}$, что $e^{it}e \in K$.

ТЕОРЕМА 2. Банахово пространство E над полем $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел в том и только том случае изометрически изоморфно пространству непрерывных функций $C(X)$ на некотором хаусдорфовом компакте X , когда его единичный шар $S \subset E$ имеет крайнюю точку $e \in \text{ex}(S)$ и выполнено одно из эквивалентных условий предложения 2 или свойство (A).

В самом деле, всякая непрерывная функция $f \in C(X)$, модуль которой равен $|f(x)| = 1$ при всех $x \in X$, является крайней точкой единичного шара в $C(X)$. Поскольку пространство $C(X)$ изометрично пространству $C_\sigma(e^{i\mathbb{T}} \times X)$, где $\sigma_\tau(e^{it}, x) = (e^{i(\tau+t)}, x)$ при всех $\tau, t \in \mathbb{T}$ и $x \in X$, то имеют место все эквивалентные условия предложения 2, а следовательно, и свойство (A).

С другой стороны, если единичный шар S в пространстве E имеет крайнюю точку $e \in \text{ex}(S)$ и выполнено каждое из эквивалентных условий предложения 2, то E канонически изометрично пространству $C_\sigma(X)$, где X является слабым* замыканием множества крайних точек единичного шара $S' \subset E'$. В силу теоремы 1 и указанного выше замечания для каждой крайней точки $\alpha \in \text{ex}(S')$ найдется такое $t \in \mathbb{T}$, что $\text{Re } e^{it}\alpha(e) = 1$ и, следовательно, α принадлежит одному из непересекающихся слабо* замкнутых множеств $X_t \doteq \{\alpha \in X \mid \text{Re } e^{it}\alpha(e) = 1\}$. Так как имеют место равенства $\sigma_\tau X_t = X_{\tau+t}$ и $\bigcup_{t \in \mathbb{T}} X_t = X$, то пространство $C_\sigma(X)$ изометрично пространству $C(X_0)$ на слабо* компактном фактормножестве $X_0 = X/\sigma$.

В действительном случае свойство (A) было введено Аренсом и Келли [5] и была доказана его необходимость, как это сформулировано в теореме 2. Утверждения предложения 2 в действительном случае и достаточность теоремы 2 в действительном случае принадлежат Джерисону [6]. Указанные выше теоремы можно применить к специальному классу банаховых пространств, подробно изученных в действительном случае Акиловым [7], [8], Нахбином [9], Гуднером [10] и Келли [11], для доказательства соответствующих результатов над полем комплексных чисел.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. B. Myers, *Ann. of Math.* (2), **49**:1 (1948), 132–140. [2] М. М. Дей, *Нормированные линейные пространства*, Библиотека сборника “Математика”, ИЛ, М., 1961. [3] Дж. Л. Келли, *Общая топология*, Наука, М., 1981. [4] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы*. Т. 1. *Общая теория*, ИЛ, М., 1962. [5] R. F. Arens, J. L. Kelley, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **62** (1947), 499–508. [6] M. Jerison, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **70** (1951), 103–113. [7] Г. П. Акилов, *ДАН СССР*, **57** (1947), 643–646. [8] Г. П. Акилов, *ДАН СССР*, **59** (1948), 417–418. [9] L. Nachbin, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **68** (1950), 28–46. [10] D. B. Goodner, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **69** (1950), 89–108. [11] J. L. Kelley, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **72** (1952), 323–326.

В. М. Федоров

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: vferdorov@rambler.ru

Поступило
30.03.2011