Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, Вещественные четырехмерные GM -триквადрики, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 6, 844–852

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9106>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 15:08:55

Вещественные четырехмерные GM -триквადрики

В. А. Краснов

В работе рассматриваются неособые пересечения трех вещественных шестимерных квадрик. Такие многообразия мы для краткости называем вещественными четырехмерными триквадриками. В данной статье доказываются необходимые и достаточные условия для того, чтобы вещественная четырехмерная триквадрика была GM -многообразием.

Библиография: 8 названий.

DOI: 10.4213/mzm9106

1. Формулировки основных результатов. Сначала приведем несколько обозначений и определений. В данной заметке *вещественным алгебраическим многообразием* называется проективное комплексное алгебраическое многообразие с фиксированной на нем антиголоморфной инволюцией (вещественной структурой). Если A – вещественное алгебраическое многообразие, то его множество вещественных точек обозначается через $\mathbb{R}A$. В случае, когда неравенство Гарнака–Смита–Тома

$$\dim H^*(\mathbb{R}A; \mathbb{F}_2) \leq \dim H^*(A; \mathbb{F}_2)$$

становится равенством, многообразие A называется M -многообразием. Отметим, что в вещественной алгебраической геометрии M -многообразия занимают важное место. В заметке [1] приведены необходимые и достаточные условия для того, чтобы M -многообразием была вещественная четырехмерная триквадрика. Напомним определение триквადрики.

Пусть даны линейно независимые квадратичные формы с вещественными коэффициентами

$$q_1(X_0, \dots, X_7) = q_1(X), \quad q_2(X_0, \dots, X_7) = q_2(X), \quad q_3(X_0, \dots, X_7) = q_3(X). \quad (1.1)$$

Тогда можно рассмотреть связку квадрик в комплексном проективном пространстве $\mathbb{P}^7$

$$\lambda_1 q_1(X) + \lambda_2 q_2(X) + \lambda_3 q_3(X) = 0. \quad (1.2)$$

Пусть M_1, M_2, M_3 – матрицы квадратичных форм (1.1). Тогда рассмотрим уравнение

$$\det(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3) = 0. \quad (1.3)$$

Будем предполагать, что это уравнение задает неособую кривую на комплексной проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ с однородными координатами $(\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3)$. Тогда система уравнений

$$q_1(X_0, \dots, X_7) = 0, \quad q_2(X_0, \dots, X_7) = 0, \quad q_3(X_0, \dots, X_7) = 0$$

определяет неособое четырехмерное комплексное многообразие $V \subset \mathbb{P}^7$, инвариантное относительно инволюции комплексного сопряжения $\tau: \mathbb{P}^7 \rightarrow \mathbb{P}^7$. Такое многообразие будем называть *вещественной триквадрикой*. Вещественная структура $\tau: V \rightarrow V$ индуцирована вещественной структурой на $\mathbb{P}^7$. Заметим, что связка квадрик (1.2) восстанавливается из триквадрики V . Она состоит из квадрик, проходящих через триквадрику V .

Пусть $G = \{1, \tau\}$ – группа второго порядка, действующая на многообразии V . Тогда выполняется неравенство (см. [2], часто это неравенство называется *неравенством Бореля–Свона*)

$$\dim H^*(\mathbb{R}V; \mathbb{F}_2) \leq \dim H^1(G, H^*(V; \mathbb{F}_2)).$$

(Далее все пространства когомологий рассматриваются с коэффициентами в поле $\mathbb{F}_2$, поэтому в обозначении когомологий коэффициенты будут опускаться.) Триквадрика V называется *GM -многообразием*, если это неравенство становится равенством. Заметим, что вещественное алгебраическое многообразие будет GM -многообразием тогда и только тогда, когда вырождается в члене E_2 стабильная часть его спектральной последовательности Бореля–Смита. В данной статье будут доказаны теоремы, которые дают необходимые и достаточные условия для того, чтобы триквадрика V была GM -многообразием.

Рассмотрим двумерную сферу $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, заданную уравнением $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$. На этой сфере определена целочисленная функция $I(\lambda) = I_V(\lambda)$, равная отрицательному индексу инерции квадратичной формы

$$q_\lambda(X) = \lambda_1 q_1(X) + \lambda_2 q_2(X) + \lambda_3 q_3(X). \quad (1.4)$$

Эта функция называется *индекс-функцией* триквадрики V . В общем случае индекс-функция $I(\lambda)$ удовлетворяет неравенствам $0 \leq I(\lambda) \leq 8$. Рассмотрим уравнение (1.3), оно определяет кривую $C = C_V$ степени 8 в комплексной плоскости $\mathbb{P}^2$. Эта кривая называется *спектральной кривой* триквадрики V (см. [3]). По нашему предположению кривая C неособая. Спектральная кривая $C \subset \mathbb{P}^2$ также имеет вещественную структуру $\tau: C \rightarrow C$, индуцированную вещественной структурой на $\mathbb{P}^2$. Индекс-функция $I(\lambda)$ имеет точки разрыва на кривой $\Gamma = \Gamma_V \subset S^2$, равной прообразу вещественной части $\mathbb{R}C$ спектральной кривой C при проекции $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$. Функция $I(\lambda)$ также удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) функция $I(\lambda)$ полунепрерывна снизу;
- 2) при переходе через компоненты связности кривой Γ значения функции $I(\lambda)$ изменяются на ± 1 ;
- 3) в точках непрерывности выполняется равенство

$$I(-\lambda) = 8 - I(\lambda);$$

4) в точках разрыва выполняется равенство

$$I(-\lambda) = 7 - I(\lambda).$$

На спектральной кривой C определено вещественное линейное расслоение $L = L_V$, называемое *спектральным расслоением* триквадрики V . Если $\lambda \in C$, то слой L_λ равен ядру квадратичной формы (1.4) в пространстве $\mathbb{C}^8$. (Так как мы предполагаем, что спектральная кривая C неособая, то ядро квадратичной формы $q_\lambda(X)$ — одномерное подпространство $\mathbb{C}^8$ (см. [3]).)

Для формулировки теорем нам нужно еще рассмотреть инвариант $\ell(V)$, который в случае непустого множества $\mathbb{R}V$ равен максимальному числу i , при котором не равен нулю гомоморфизм ограничения

$$H^i(\mathbb{RP}^7) \rightarrow H^i(\mathbb{R}V).$$

Если множество $\mathbb{R}V$ пустое, то инвариант $\ell(V)$ по определению равен -1 .

Так как триквадрика V является четырехмерным полным пересечением, то она будет GM -многообразием тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $\ell(V) \geq 1$ (см. [4]). С другой стороны, если $I_{\min} = I_{\min}(V)$ — минимальное значение индекс-функции $I_V(\lambda)$, то выполняется неравенство $\ell(V) < I_{\min}$ (см. [5]). Следовательно, для того, чтобы триквадрика V была GM -многообразием, необходимо выполнение неравенства $I_{\min} \geq 2$. В данной статье будет доказана

ТЕОРЕМА 1.1. *Если для триквадрики V выполняется неравенство $I_{\min} \geq 3$, то триквадрика V является GM -многообразием.*

Заметим, что вещественная схема неособой кривой степени 8 имеет вид

$$\begin{aligned} \langle a \rangle \text{ или } \langle a \sqcup 1\langle b \rangle \rangle \text{ или } \langle a \sqcup 1\langle b \rangle \sqcup 1\langle c \rangle \rangle \text{ или } \langle a \sqcup 1\langle b \rangle \sqcup 1\langle c \rangle \sqcup 1\langle d \rangle \rangle \\ \text{или } \langle 4\langle 1 \rangle \rangle \text{ или } \langle a \sqcup 1\langle b \sqcup 1\langle c \rangle \rangle \rangle \text{ или } \langle 1\langle 1\langle 1\langle 1 \rangle \rangle \rangle \end{aligned}$$

(см., например, [6], в этой статье объяснено как кодируются вещественные схемы плоских кривых; см. также [7]). В данной статье будет доказана

ТЕОРЕМА 1.2. *Если для триквадрики V выполняется равенство $I_{\min} = 2$ и вещественная схема спектральной кривой имеет вид*

$$\langle a \sqcup 1\langle b \rangle \rangle \text{ или } \langle a \sqcup 1\langle b \rangle \sqcup 1\langle c \rangle \rangle \text{ или } \langle a \sqcup 1\langle b \rangle \sqcup 1\langle c \rangle \sqcup 1\langle d \rangle \rangle \text{ или } \langle 4\langle 1 \rangle \rangle,$$

то триквадрика V является GM -многообразием.

Таким образом, чтобы ответить на поставленный вопрос: когда вещественная четырехмерная триквадрика является GM -многообразием, остается исследовать триквадрики, для которых $I_{\min} = 2$, а вещественная схема спектральной кривой имеет вид $\langle a \sqcup 1\langle b \sqcup 1\langle c \rangle \rangle \rangle$ или $\langle 1\langle 1\langle 1\langle 1 \rangle \rangle \rangle$. В данной статье будет доказана

ТЕОРЕМА 1.3. *Пусть спектральная кривая C вещественной четырехмерной триквадрики V имеет вещественную схему $\langle a \sqcup 1\langle b \sqcup 1\langle c \rangle \rangle \rangle$, причем наиболее глубоко расположенные овалы обозначены через $C_1, \dots, C_c$ (см. рис. 1). Тогда в случае $I_{\min} = 2$ триквадрика V будет GM -многообразием только в том случае, если расслоение $\mathbb{R}L$ тривиально на овалах $C_1, \dots, C_c$.*

Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

Если вещественная схема спектральной кривой C имеет вид $\langle 1 \langle 1 \langle 1 \rangle \rangle \rangle$, то овалы кривой $\mathbb{R}C$ обозначим так, как показано на рис. 2. При проекции $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ прообраз диска, ограниченного овалом C_1 , состоит из двух дисков D , D' . Эти

Рис. 4

пары дисков изображены на рис. 3, 4. На этих рисунках также указаны значения индекс-функции, причем рассмотрены только те случаи, когда $I_{\min} = 2$ и множество $\{I(\lambda) = 2\}$ содержит кольцо. Положим $\varepsilon_i = 0$, если расслоение $\mathbb{R}L$ тривиально на овале C_i , в противном случае $\varepsilon_i = 1$, где $\varepsilon_i \in \mathbb{F}_2$. В данной статье будет доказана

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть спектральная кривая C вещественной четырехмерной триквადрики V имеет вещественную схему $\langle 1 \langle 1 \langle 1 \rangle \rangle \rangle$ и $I_{\min} = 2$. Тогда справедливы утверждения:

- 1) если множество $\{I(\lambda) = 2\}$ состоит из диска, то триквадрика V является GM -многообразием;
- 2) если во множество $\{I(\lambda) = 2\}$ входит кольцо, то триквадрика V будет GM -многообразием только в том случае, когда выполняется $\varepsilon_3 + \varepsilon_4 = 0$.

Теоремы 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 можно объединить, если сформулировать отрицательное утверждение, т.е. указать, когда триквадрика не является GM -многообразием.

СЛЕДСТВИЕ 1.5. Вещественная четырехмерная триквадрика V не является GM -многообразием тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

- 1) $I_{\min}(V) < 2$;
- 2) $I_{\min}(V) = 2$, вещественная схема спектральной кривой C_V имеет вид

$$\langle a \sqcup 1 \langle b \sqcup 1 \langle c \rangle \rangle \rangle$$

(см. рис. 1), и линейное расслоение $\mathbb{R}L_V$ нетривиально на хотя бы одном из овалов $C_1, \dots, C_c$;

- 3) $I_{\min}(V) = 2$, вещественная схема спектральной кривой C_V имеет вид

$$\langle 1 \langle 1 \langle 1 \rangle \rangle \rangle$$

(см. рис. 1, 2, 3, 4), множество $\{I_V(\lambda) = 2\}$ содержит кольцо, и выполняется неравенство $\varepsilon_3 + \varepsilon_4 \neq 0$.

2. Доказательство основных результатов. В этом пункте мы докажем сформулированные теоремы, но сначала будет доказано несколько лемм.

Для триквадрики V рассмотрим на сфере S^2 семейство векторных пространств $F_+ = F_+(V)$, которое устроено следующим образом. Если $\lambda \in S^2$, то слой $(F_+)_{\lambda}$ равен линейной оболочке собственных векторов в пространстве $\mathbb{R}^8$ матрицы

$$M(\lambda) = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3,$$

отвечающих положительным собственным значениям. Пусть $\mathbb{P}(F_+)$ – проективизация семейства векторных пространств F_+ . Тогда всегда существует гомотопическая эквивалентность пространства $\mathbb{P}(F_+)$ с многообразием $\mathbb{RP}^7 \setminus \mathbb{R}V$. Она строится следующим образом. Пусть L_+ – открытое подмножество произведения $S^2 \times \mathbb{RP}^7$, заданное неравенством

$$L_+ = \{(\lambda, x) \in S^2 \times \mathbb{RP}^7 \mid q_{\lambda}(x) > 0\}.$$

Тогда проекция

$$p: S^2 \times \mathbb{RP}^7 \rightarrow \mathbb{RP}^7$$

индуцирует гомотопическую эквивалентность $p: L_+ \rightarrow \mathbb{RP}^7 \setminus \mathbb{R}V$ (см. [3]). С другой стороны, отображение вложения $\mathbb{P}(F_+) \hookrightarrow L_+$ также индуцирует гомотопическую эквивалентность.

Спектральная последовательность Лере проекции $\pi: \mathbb{P}(F_+) \rightarrow S^2$ имеет вид (см. [8], [3])

$$E_2^{i,j} = H^i(\Omega_{7-j}) \implies H^{i+j}(\mathbb{P}(F_+)) = H^{i+j}(L_+) = H^{i+j}(\mathbb{RP}^7 \setminus \mathbb{R}V), \quad (2.1)$$

где замкнутое множество $\Omega_q \subset S^2$ состоит из точек $\lambda \in S^2$, удовлетворяющих неравенству $I(\lambda) \leq q$. Из спектральной последовательности (2.1) в случае, когда выполняются неравенства

$$2 \leq I(\lambda) \leq 6, \quad (2.2)$$

вытекает равенство $H^6(\mathbb{P}(F_+)) = H^1(\Omega_2)$. Поэтому, если t – базисный элемент одномерного пространства $H^1(\mathbb{RP}^7)$, то элемент $p^*(t^6)$ принадлежит пространству $H^1(\Omega_2)$, где проекция $p: \mathbb{P}(F_+) \rightarrow \mathbb{RP}^7$ индуцирована проекцией $p: S^2 \times \mathbb{RP}^7 \rightarrow \mathbb{RP}^7$. Элемент $p^*(t^6)$ будем обозначать через $\kappa_1(F_+)$ и называть *первым характеристическим классом семейства векторных пространств F_+* .

ЛЕММА 2.1. Пусть для триквадрики V выполняются неравенства (2.2). Тогда справедливо утверждение: гомоморфизм

$$H_1(\mathbb{R}V) \rightarrow H_1(\mathbb{RP}^7) \quad (2.3)$$

не равен нулю, если и только если $\kappa_1(F_+(V)) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из точной гомологической последовательности пары $(\mathbb{RP}^7, \mathbb{R}V)$

$$\dots \rightarrow H_1(\mathbb{R}V) \rightarrow H_1(\mathbb{RP}^7) \rightarrow H_1(\mathbb{RP}^7, \mathbb{R}V) \rightarrow \dots$$

получаем утверждение: гомоморфизм (2.3) не равен нулю, если и только если гомоморфизм

$$H_1(\mathbb{RP}^7) \rightarrow H_1(\mathbb{RP}^7, \mathbb{R}V)$$

равен нулю. Применим двойственность Пуанкаре–Лефшеца, тогда получим утверждение: гомоморфизм (2.3) не равен нулю, если и только если гомоморфизм ограничения

$$H^6(\mathbb{RP}^7) \rightarrow H^6(\mathbb{RP}^7 \setminus \mathbb{R}V) \quad (2.4)$$

равен нулю. Осталось заметить, что из верхних конструкций вытекает, что образ элемента t^6 при гомоморфизме (2.4) равен элементу $p^*(t^6) \in H^6(\mathbb{P}(F_+))$, если использовать равенство $H^6(\mathbb{P}(F_+)) = H^6(\mathbb{RP}^7 \setminus \mathbb{R}V)$. Лемма доказана.

Ограничение семейства векторных пространств F_+ на замкнутое множество Ω_2 не является векторным расслоением, но ограничение его на внутренность $\mathring{\Omega}_2$ уже является векторным расслоением. Так как $H^1(\Omega_2) = H^1(\mathring{\Omega}_2)$, то можно считать, что

$$\kappa_1(F_+(V)) \in H^1(\mathring{\Omega}_2).$$

ЛЕММА 2.2. *Если для триквадрики V выполняются неравенства (2.2), то выполняется следующее равенство:*

$$\kappa_1(F_+(V)) = w_1(F_+(V)|_{\mathring{\Omega}_2}),$$

где $w_1(F_+(V)|_{\mathring{\Omega}_2})$ – первый характеристический класс Штифеля–Уитни векторного расслоения $F_+(V)|_{\mathring{\Omega}_2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим гомоморфизм ограничения спектральной последовательности Лере для проекции $\pi: \mathbb{P}(F_+) \rightarrow S^2$ в спектральную последовательность Лере для проекции

$$\pi: \mathbb{P}(F_+|_{\mathring{\Omega}_2}) \rightarrow \mathring{\Omega}_2.$$

Тогда получим равенства

$$H^6(\mathbb{P}(F_+)) = H^6(\mathbb{P}(F_+|_{\mathring{\Omega}_2})) = H^1(\mathring{\Omega}_2).$$

Осталось заметить, что класс когомологий

$$p^*(t^6) \in H^6(\mathbb{P}(F_+|_{\mathring{\Omega}_2})) = H^1(\mathring{\Omega}_2)$$

равен обычному первому характеристическому классу Штифеля–Уитни векторного расслоения $F_+|_{\mathring{\Omega}_2}$. Лемма доказана.

Заметим теперь, что теорема 1.1 вытекает из леммы 2.1, так как из условий теоремы получаем равенство $\Omega_2 = \emptyset$. А теорема 1.2 вытекает из леммы 2.2, так как из условий теоремы получаем равенство $H^1(\Omega_2) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3. Чтобы доказать теорему 1.3, заметим, что из условий этой теоремы следует, что множество $\Omega_2 \subset S^2$ устроено так, как показано на рис. 5. Оно состоит из неодносвязной области D_0 , ограниченной изнутри овалами $O_1, \dots, O_c$, которые при проекции $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ проектируются в овалы $C_1, \dots, C_c$. Кроме этого в множество Ω_2 могут входить несколько дисков.

Нам нужно показать, что характеристический класс Штифеля–Уитни $w_1(F_+|_{\mathring{D}_0})$ равен нулю тогда и только тогда, когда расслоение $\pi^*(\mathbb{R}L)$ тривиально на овалах

Рис. 5

$O_1, \dots, O_c$. На области D_0 рассмотрим векторное расслоение F_0 , полагая, что слой $(F_0)_\lambda$ равен линейной оболочке собственных векторов в пространстве $\mathbb{R}^8$ матрицы

$$M(\lambda) = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3,$$

отвечающих неотрицательным собственным значениям. Тогда ограничения $F_+|_{\dot{D}_0}$, $F_0|_{\dot{D}_0}$ совпадают. Следовательно, характеристический класс $w_1(F_+|_{\dot{D}_0})$ равен нулю тогда и только тогда, когда равен нулю характеристический класс $w_1(F_0)$. Обозначим класс когомологий $w_1(F_0) \in H^1(D_0)$ через w_1 , а линейное расслоение $\pi^*(\mathbb{R}L)$ обозначим через E . Достаточно установить, что значение класса когомологий w_1 на овале O_i , $i = 1, \dots, s$, равно нулю тогда и только тогда, когда расслоение E тривиально на овале O_i . Диски, ограниченные овалами $O_1, \dots, O_c$, мы обозначили через $D_1, \dots, D_c$. Внутри каждого такого диска индекс-функция $I(\lambda)$ принимает значение, равное 3. Ограничение семейства векторных пространств F_+ на диск D_i , $i = 1, \dots, s$, является пятимерным векторным расслоением, которое обозначим через F_i . Заметим, что расслоения $F_1, \dots, F_s$ тривиальны. Поэтому из равенства векторных расслоений

$$F_0|_{O_i} = F_i|_{O_i} \oplus E|_{O_i}$$

получаем, что значение класса когомологий w_1 на овале O_i равно нулю тогда и только тогда, когда расслоение E тривиально на овале O_i . Теорема 1.3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4. Теорему 1.4 достаточно доказать в случаях, когда множество $\{I_{\min} = 2\}$ содержит кольцо. Мы рассмотрим только случай, когда реализуется рис. 3, так как в случае, когда реализуется рис. 4, рассуждения аналогичны.

Обозначим через D_i , $i = 2, 3$, замкнутое кольцо, ограниченное овалами O_i , O_{i+1} . Через D_4 обозначаем замкнутый диск, ограниченный овалом O_4 . Через F_2 , F_4 обозначим шестимерные векторные расслоения на областях D_2 , D_4 , полагая, что слой $(F_i)_\lambda$ равен линейной оболочке собственных векторов в пространстве $\mathbb{R}^8$ матрицы

$$M(\lambda) = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3,$$

отвечающих неотрицательным собственным значениям. Заметим, что расслоение F_4 тривиально. Через F_3 обозначаем пятимерное векторное расслоение на области D_3 ,

которое равно ограничению семейства векторных пространств F_+ на эту область. Тогда справедливы равенства для ограничений векторных расслоений на овалы

$$F_4|_{O_4} = F_3|_{O_4} \oplus E|_{O_4}, \quad F_2|_{O_3} = F_3|_{O_3} \oplus E|_{O_3}. \quad (2.5)$$

Из этих равенств вытекает, что значение характеристического класса $w_1(F_2)$ на овале O_3 равно сумме $\varepsilon_3 + \varepsilon_4$. Поэтому характеристический класс $w_1(F_+|_{\dot{\Omega}_2})$ равен нулю тогда и только тогда, когда $\varepsilon_3 + \varepsilon_4 = 0$. Осталось применить лемму 2.2. Теорема 1.4 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Краснов, “Вещественные четырехмерные M -триквადрики”, *Матем. заметки*, **92**:6 (2012), 884–892.
- [2] В. А. Краснов, “Характеристические классы векторных расслоений на вещественном алгебраическом многообразии”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:4 (1991), 716–746.
- [3] A. Degtyarev, I. Itenberg, V. Kharlamov, *On the Number of Components of a Complete Intersection of Real Quadrics*, arXiv: 0806.4077v2.
- [4] В. А. Краснов, “Вещественные алгебраические GM-многообразия”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:3 (1998), 39–66.
- [5] В. А. Краснов, “Максимальные пересечения трех вещественных квадрик”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:3 (2011), 127–146.
- [6] О. Я. Виро, “Плоские вещественные кривые степеней 7 и 8: новые запреты”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **47**:5 (1983), 1135–1150.
- [7] S. Yu. Orevkov, “Classification of flexible M -curves of degree 8 up to isotopy”, *Geom. Funct. Anal.*, **12**:4 (2002), 723–755.
- [8] А. А. Аграчев, “Гомологии пересечений вещественных квадрик”, *ДАН СССР*, **299**:5 (1988), 1033–1036.

В. А. Краснов

Ярославский государственный университет

им. П. Г. Демидова

E-mail: krasnov@uniyar.ac.ru

Поступило

25.03.2011

Исправленный вариант

12.09.2011