Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Заставный, Асимптотика рядов, возникающих при приближении периодических функций средними Рисса и Чезаро, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 1, 45–55

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9109>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 16:17:36

Асимптотика рядов, возникающих при приближении периодических функций средними Рисса и Чезаро

В. П. Заставный

Найдены асимптотические разложения по степеням δ при $\delta \rightarrow +\infty$ рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{(\beta+1)k} \frac{Q((\delta^\alpha - (ak+b)^\alpha)_+)}{(ak+b)^{r+1}},$$

где $\beta \in \mathbb{Z}$, $\alpha, a, b > 0$, и $r \in \mathbb{C}$, а Q – алгебраический многочлен, удовлетворяющий условию $Q(0) = 0$. В частных случаях эти ряды возникают при приближении периодических дифференцируемых функций средними Рисса и Чезаро.

Библиография: 16 названий.

DOI: 10.4213/mzm9109

1. Введение. Объектом исследования работы являются следующие ряды¹:

$$G_\delta^\beta(r, Q, \alpha, a, b) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{(\beta+1)k} \frac{Q((\delta^\alpha - (ak+b)^\alpha)_+)}{(ak+b)^{r+1}}, \quad \beta \in \mathbb{Z}, \quad \delta, \alpha, a, b > 0, \quad r \in \mathbb{C}, \quad (1.1)$$

где функция Q задана на $[0, +\infty)$ и удовлетворяет условию $Q(0) = 0$. При $Q(x) = x^\mu$, $\mu > 0$, и $Q(x) = \prod_{k=1}^\mu (x+k-1)$, $\mu \in \mathbb{N}$, эти ряды возникают при приближении периодических функций соответственно средними Рисса и средними Чезаро (более подробно об этом изложено в п.4). При $Q(x) = \prod_{k=1}^\mu (x+k-1)$, $\mu \in \mathbb{N}$, $\alpha = 1$, $r \in \mathbb{N}$, $a = 2$, $b = 1$, $\delta \in \mathbb{N}$, эти ряды возникли в работах Нады [1], [2]. В случае $Q(x) = x$, $\alpha = 1$, $r \in \mathbb{N}$, $a = 2$, $b = 1$, $\delta \in \mathbb{N}$, асимптотическое разложение рядов (1.1) по степеням δ при $\delta \rightarrow +\infty$ найдено в работах Теляковского и Баскакова [3], [4].

В теоремах 1 и 2 данной работы в случае, когда Q является алгебраическим многочленом, найдены асимптотические разложения рядов (1.1) при $\delta \rightarrow +\infty$. Коэффициенты этих разложений выражаются через функцию Гурвица $\zeta(s, b)$ и функцию $\tilde{\zeta}(s, b)$, которые при фиксированном $b > 0$ определяются по формулам

$$\zeta(s, b) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+b)^s}, \quad \operatorname{Re} s > 1, \quad \tilde{\zeta}(s, b) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+b)^s}, \quad \operatorname{Re} s > 0. \quad (1.2)$$

¹Здесь и далее $t_+ = t$, если $t > 0$, и $t_+ = 0$, если $t \leq 0$.

С помощью формулы Эрмита функция Гурвица аналитически продолжается в $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, а точка $s = 1$ является для нее полюсом первого порядка и при $b > 0$ справедливости равенства (см. [5], [6])

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1} \left(\zeta(s, b) - \frac{1}{s-1} \right) &= -\frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)}, \\ \lim_{s \rightarrow 1} \left(2^{1-s} \zeta\left(s, \frac{b}{2}\right) - \zeta(s, b) \right) &= \frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)} - \frac{\Gamma'(b/2)}{\Gamma(b/2)} - \ln 2. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$, $\operatorname{Re} s > 0$, – гамма-функция Эйлера. Из равенства

$$\tilde{\zeta}(s, b) = 2^{1-s} \zeta\left(s, \frac{b}{2}\right) - \zeta(s, b), \quad \operatorname{Re} s > 1, \quad (1.4)$$

вытекает, что функция $\tilde{\zeta}(s, b)$ аналитически продолжается в $\mathbb{C}$ и

$$\tilde{\zeta}(1, b) = \frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)} - \frac{\Gamma'(b/2)}{\Gamma(b/2)} - \ln 2, \quad b > 0. \quad (1.5)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть Q – алгебраический многочлен степени $\mu \in \mathbb{N}$, для которого точка $x = 0$ является нулем кратности $\mu_0 \in \mathbb{N}$. Пусть $\alpha, a, b > 0$ и $r \in \mathbb{C}$. Если r/α не является целым числом из отрезка $[0, \mu]$, то для любого $m \in \mathbb{N}$, $m > \max\{\alpha\mu - \operatorname{Re} r; \mu_0\}$, при $\delta \rightarrow +\infty$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} G_\delta^1(r, Q, \alpha, a, b) &= \sum_{p=0}^{\mu} \frac{(-1)^p Q^{(p)}(\delta^\alpha)}{p!} a^{\alpha p - r - 1} \zeta\left(r + 1 - \alpha p, \frac{b}{a}\right) - \frac{A_0(r, Q, \delta^\alpha, \alpha)}{a \delta^r} \\ &\quad - \sum_{k=\mu_0+1}^m \frac{b_k((\delta - b)/a)}{k!} \cdot \frac{a^{k-1} A_k(r, Q, \delta^\alpha, \alpha)}{\delta^{r+k}} + O\left(\frac{1}{\delta^{r+m+1-\alpha\mu}}\right). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь $b_k(x) := B_k(\{x\})$ – сплайны Бернулли, а $B_k(x)$ – многочлены Бернулли, и

$$\begin{aligned} A_k(r, Q, x, \alpha) &:= \sum_{p=0}^{\mu} \frac{(-1)^p Q^{(p)}(x) x^p}{p!} \cdot \gamma_{k-1}(r - \alpha p + 1), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \\ \gamma_{-1}(s) &= \frac{1}{s-1}, \quad \gamma_0(s) = 1, \quad \gamma_k(s) = s(s+1) \cdots (s+k-1), \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$A_k(r, Q, x, \alpha) = 0, \quad 1 \leq k \leq \mu_0, \quad A_{\mu_0+1}(r, Q, x, \alpha) = Q^{(\mu_0)}(0) \alpha^{\mu_0} x^{\mu_0}.$$

Если $r/\alpha = q \in \mathbb{Z}$ и $q \in [0, \mu]$, то для любого $m \in \mathbb{N}$, $m > \max\{\alpha\mu - \operatorname{Re} r; \mu_0\}$, при $\delta \rightarrow +\infty$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} G_\delta^1(r, Q, \alpha, a, b) &= \frac{(-1)^q Q^{(q)}(\delta^\alpha)}{q! a} \left(\ln \frac{\delta}{a} - \frac{\Gamma'(b/a)}{\Gamma(b/a)} \right) - \sum_{p=0, p \neq q}^{\mu} \frac{(-1)^p Q^{(p)}(\delta^\alpha) \delta^{\alpha p - r}}{\alpha a p! (q-p)} \\ &\quad + \sum_{p=0, p \neq q}^{\mu} \frac{(-1)^p Q^{(p)}(\delta^\alpha)}{p!} a^{\alpha p - r - 1} \zeta\left(r + 1 - \alpha p, \frac{b}{a}\right) \\ &\quad - \sum_{k=\mu_0+1}^m \frac{b_k((\delta - b)/a)}{k!} \cdot \frac{a^{k-1} A_k(r, Q, \delta^\alpha, \alpha)}{\delta^{r+k}} + O\left(\frac{1}{\delta^{r+m+1-\alpha\mu}}\right). \end{aligned} \quad (1.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Очевидно $\gamma_k(s) = \Gamma(s+k)/\Gamma(s)$, $k = -1, 0, 1, \dots$, $s \in \mathbb{C}$. Если $Q(x) = x^\mu$, $\mu \in \mathbb{N}$, то $A_k(r, Q, x, \alpha) = x^\mu a_k(r, \mu, \alpha)$, где

$$a_k(r, \mu, \alpha) := \sum_{p=0}^{\mu} (-1)^p \binom{\mu}{p} \cdot \frac{\Gamma(r - \alpha p + k)}{\Gamma(r - \alpha p + 1)}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad (1.9)$$

$$a_k(r, \mu, \alpha) = 0, \quad 1 \leq k \leq \mu, \quad a_{\mu+1}(r, \mu, \alpha) = \alpha^\mu \mu!.$$

Легко проверить, что для любого алгебраического многочлена Q степени μ справедливы равенства

$$A_k(r, Q, x, \alpha) = \frac{a_k(r, \mu, \alpha) Q^{(\mu)}(0)}{\mu!} x^\mu + O(x^{\mu-1}), \quad x \rightarrow \infty, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Если $-r, \alpha \in \mathbb{N}$, то, очевидно, $A_k(r, Q, x, \alpha) = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$ и $k \geq \alpha\mu - r + 1$. Если $-r \notin \mathbb{N}$ или $\alpha \notin \mathbb{N}$, то $a_k(r, \mu, \alpha) \neq 0$ при всех достаточно больших $k \in \mathbb{N}$. Это вытекает из того, что в последнем случае или $1/\Gamma(r+1) \neq 0$, или $1/\Gamma(r-\alpha+1) \neq 0$. Следует только учесть, что если $s_1 < s_2$, то $\Gamma(s_1+u)/\Gamma(s_2+u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow +\infty$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть Q – алгебраический многочлен степени $\mu \in \mathbb{N}$, для которого точка $x = 0$ является нулем кратности $\mu_0 \in \mathbb{N}$. Пусть $\alpha, a, b > 0$ и $r \in \mathbb{C}$. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$, $m > \max\{\alpha\mu - \operatorname{Re} r; \mu_0\}$, при $\delta \rightarrow +\infty$ справедливы соотношения

$$G_\delta^2(r, Q, \alpha, a, b) = \sum_{p=0}^{\mu} \frac{(-1)^p Q^{(p)}(\delta^\alpha)}{p!} a^{\alpha p - r - 1} \tilde{\zeta}\left(r+1 - \alpha p, \frac{b}{a}\right) + \sum_{k=\mu_0+1}^m \frac{e_{k-1}((\delta-b)/a)}{2(k-1)!} \cdot \frac{a^{k-1} A_k(r, Q, \delta^\alpha, \alpha)}{\delta^{r+k}} + O\left(\frac{1}{\delta^{r+m+1-\alpha\mu}}\right). \quad (1.10)$$

Здесь $A_k(r, Q, x, \alpha)$ определяются по формуле (1.7), а

$$e_{k-1}(x) = \frac{2}{k} \left(b_k(x) - 2^k b_k\left(\frac{x}{2}\right) \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

– сплайны Эйлера.

2. Вспомогательные утверждения. Многочлены Бернулли $B_n(x)$ и Эйлера $E_n(x)$ определяются с помощью следующих производящих функций (см., например, [6; § 1.13, § 1.14]):

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B_n(x), \quad |t| < 2\pi, \quad \frac{2e^{tx}}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} E_n(x), \quad |t| < \pi. \quad (2.1)$$

Связь между ними вытекает из тождества $nE_{n-1}(x) = 2(B_n(x) - 2^n B_n(x/2))$, $n \in \mathbb{N}$. Сплайны Бернулли и Эйлера определяются соответственно по формулам

$$b_n(x) = B_n(\{x\}), \quad e_n(x) = \frac{2}{n+1} \left(b_{n+1}(x) - 2^{n+1} b_{n+1}\left(\frac{x}{2}\right) \right), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Отметим, что

$$e_n(x) = (-1)^{[x]} E_n(\{x\}),$$

$n \in \mathbb{Z}_+$. При $0 \leq x < 1$ равенство очевидно, а при $1 \leq x < 2$ вытекает из формулы умножения $B_n(2u) = 2^{n-1}(B_n(u) + B_n(u + 1/2))$.

Если $p, m \in \mathbb{N}$ и $f \in C^m[0, p]$, то формулу Эйлера–Маклорена (см., например, [7; гл. IV, § 3]) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p f(k) &= \int_0^p f(t) dt + \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^k}{(k)!} B_k(f^{(k-1)}(p) - f^{(k-1)}(0)) \\ &\quad + \frac{(-1)^{m-1}}{(m)!} \int_0^p b_m(t) f^{(m)}(t) dt, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $B_k := B_k(0)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, — числа Бернулли. При этом надо учесть, что $(-1)^k B_k = B_k$ при всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $k \neq 1$, и $B_1 = -1/2$.

Пусть

$$\zeta_p(s, b) := \sum_{k=0}^p \frac{1}{(k+b)^s}, \quad b > 0, \quad s \in \mathbb{C}, \quad p \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.3)$$

Применим формулу (2.2) к функции $f(t) = (t+b)^{-s}$, $b > 0$, $s \in \mathbb{C}$. Производные этой функции равны

$$f^{(k)}(t) = (-1)^k \gamma_k(s) (t+b)^{-s-k}, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

где $\gamma_0(s) = 1$, $\gamma_k(s) = s(s+1) \cdots (s+k-1)$, $k \in \mathbb{N}$. Функции $\gamma_k(s)$ целые и могут быть представлены в виде $\gamma_k(s) = \Gamma(s+k)/\Gamma(s)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Если $n \in \mathbb{Z}_+$, то $\gamma_k(-n) = 0$ при всех $k \geq n+1$.

Если $s \neq 1$, то для любых $p, m \in \mathbb{N}$, $m > 1 - \operatorname{Re} s$, справедливы равенства

$$\zeta_p(s, b) = c_m(s, b) - \frac{1}{(s-1)(p+b)^{s-1}} - \sum_{k=1}^m \frac{B_k}{k!} \cdot \frac{\gamma_{k-1}(s)}{(p+b)^{s+k-1}} + R_p^m(s, b), \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} R_p^m(s, b) &= \frac{1}{m!} \int_p^{+\infty} \frac{\gamma_m(s) b_m(t)}{(t+b)^{s+m}} dt, \\ |R_p^m(s, b)| &\leq \frac{|\gamma_m(s)|}{m!} \cdot \frac{\sup_{[0,1]} |b_m(t)|}{(\operatorname{Re} s + m - 1)(p+b)^{\operatorname{Re} s + m - 1}} = O\left(\frac{1}{(p+b)^{s+m-1}}\right), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$c_m(s, b) = \frac{1}{b^s} + \frac{1}{(s-1)b^{s-1}} + \sum_{k=1}^m \frac{B_k}{k!} \cdot \frac{\gamma_{k-1}(s)}{b^{s+k-1}} - \frac{1}{m!} \int_0^{+\infty} \frac{\gamma_m(s) b_m(t)}{(t+b)^{s+m}} dt. \quad (2.6)$$

Если $-s \in \mathbb{Z}_+$, то эти равенства справедливы при $m \geq 1-s$ (в этом случае слагаемые, содержащие интегралы, равны нулю). При фиксированном $b > 0$ функция $c_m(s, b)$ является аналитической в области $\operatorname{Re} s > 1-m$, $s \neq 1$, и $c_m(s, b) = \zeta(s, b)$ при всех $\operatorname{Re} s > 1$ (это вытекает из (2.4) и (2.5) при $p \rightarrow \infty$). В силу теоремы единственности равенство $c_m(s, b) = \zeta(s, b)$ выполняется при всех $\operatorname{Re} s > 1-m$, $s \neq 1$. Заменяя

в равенстве (2.4) m на $m + 1$ и учитывая равенство $B_0 = 1$, получаем, что при любых $s \in \mathbb{C}$, $s \neq 1$, $p, m \in \mathbb{N}$, $m > 1 - \operatorname{Re} s$, справедливы равенства

$$\zeta_p(s, b) = \zeta(s, b) - \sum_{k=0}^m \frac{B_k}{k!} \cdot \frac{\Gamma(s+k-1)}{\Gamma(s)} \cdot \frac{1}{(p+b)^{s+k-1}} + O\left(\frac{1}{(p+b)^{s+m}}\right), \quad (2.7)$$

ЛЕММА 1. Пусть $s \in \mathbb{C}$, $s \neq 1$, $b > 0$. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$, $m > 1 - \operatorname{Re} s$, при $\delta \rightarrow +\infty$ имеет место равенство

$$\zeta_{[\delta-b]}(s, b) = \zeta(s, b) - \sum_{k=0}^m \frac{\Gamma(s+k-1)}{\Gamma(s)} \cdot \frac{1}{\delta^{s+k-1}} \cdot \frac{b_k(\delta-b)}{k!} + O\left(\frac{1}{\delta^{s+m}}\right). \quad (2.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\delta \geq b + 1$. В равенстве (2.7) берем $p = [\delta - b] \in \mathbb{N}$. Тогда $p + b = \delta - \varepsilon$, где $\varepsilon = \{\delta - b\} \in [0, 1)$. Учитывая, что при любых $z \in \mathbb{C}$, $q \in \mathbb{Z}_+$ справедливы соотношения

$$\frac{1}{(1-x)^z} = \sum_{j=0}^q \frac{\Gamma(z+j)}{\Gamma(z)} \cdot \frac{x^j}{j!} + O(x^{q+1}), \quad x \rightarrow 0, \quad (2.9)$$

получаем, что для любого $m \in \mathbb{N}$, $m > 1 - \operatorname{Re} s$, при $\delta \rightarrow +\infty$ имеет место равенство

$$\zeta_{[\delta-b]}(s, b) = \zeta(s, b) - \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^{m-k} \frac{B_k}{k!} \cdot \frac{\Gamma(s+k-1+j)}{\Gamma(s)} \cdot \frac{1}{\delta^{s+k-1+j}} \cdot \frac{\varepsilon^j}{j!} + O\left(\frac{1}{\delta^{s+m}}\right).$$

Если в повторной сумме сделать замену $k + j = l$, то эта сумма будет равна выражению

$$\sum_{l=0}^m \frac{\Gamma(s+l-1)}{\Gamma(s)} \cdot \frac{1}{\delta^{s+l-1}} \sum_{j=0}^l \frac{B_{l-j}}{(l-j)!} \cdot \frac{\varepsilon^j}{j!} = \sum_{l=0}^m \frac{\Gamma(s+l-1)}{\Gamma(s)} \cdot \frac{1}{\delta^{s+l-1}} \cdot \frac{B_l(\varepsilon)}{l!}.$$

Здесь мы воспользовались разложением многочлена Бернулли по степеням аргумента (см., например, [7; гл. IV, (13)]). Осталось учесть, что $B_l(\varepsilon) = b_l(\delta - b)$. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $b > 0$. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ при $\delta \rightarrow +\infty$ имеет место равенство

$$\zeta_{[\delta-b]}(1, b) = -\frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)} + \ln \delta - \sum_{k=1}^m \frac{\Gamma(k)}{\delta^k} \cdot \frac{b_k(\delta-b)}{k!} + O\left(\frac{1}{\delta^{m+1}}\right). \quad (2.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим формулу (2.2) к функции $f(t) = (t+b)^{-1}$, $b > 0$. Тогда для любых $p, m \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\zeta_p(1, b) = d_m(b) + \ln(p+b) - \sum_{k=1}^m \frac{B_k}{k!} \cdot \frac{\Gamma(k)}{(p+b)^k} + R_p^m(1, b), \quad (2.11)$$

где величина $R_p^m(1, b)$ определена по формуле (2.5) при $s = 1$, а

$$d_m(b) = \frac{1}{b} - \ln b + \sum_{k=1}^m \frac{B_k}{k!} \cdot \frac{\Gamma(k)}{b^k} - \int_0^{+\infty} \frac{b_m(t)}{(t+b)^{m+1}} dt. \quad (2.12)$$

Из равенства (2.11) и соотношения $R_p^m(1, b) = O((p + b)^{-m})$, $p \rightarrow +\infty$, получаем равенство

$$d_m(b) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^p \frac{1}{k+b} - \ln(p+b) \right).$$

Из этого равенства вытекает, что $d_m(1) = C$, где $C = -\Gamma'(1)$ – постоянная Эйлера, и

$$d_m(1) - d_m(b) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+b} \right) = \frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)} + C.$$

Поэтому $d_m(b) = -\Gamma'(b)/\Gamma(b)$. Заменяя в равенстве (2.11) m на $m+1$, получаем, что при любых $p, m \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\zeta_p(1, b) = -\frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)} + \ln(p+b) - \sum_{k=1}^m \frac{B_k}{k!} \cdot \frac{\Gamma(k)}{(p+b)^k} + O\left(\frac{1}{(p+b)^{m+1}}\right). \quad (2.13)$$

Пусть $\delta \geq b+1$. В равенстве (2.13) берем $p = [\delta - b] \in \mathbb{N}$. Тогда $p+b = \delta - \varepsilon$, где $\varepsilon = \{\delta - b\} \in [0, 1)$. Учитывая (2.9) и равенство

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^m \frac{x^k}{k} + O(x^{m+1}), \quad x \rightarrow 0,$$

получаем, что для любого $m \in \mathbb{N}$ при $\delta \rightarrow +\infty$ справедливо равенство

$$\zeta_{[\delta-b]}(1, b) = -\frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)} + \ln \delta - \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \cdot \frac{\varepsilon^k}{\delta^k} - \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{m-k} \frac{B_k}{k!} \cdot \frac{\Gamma(k+j)}{\delta^{k+j}} \cdot \frac{\varepsilon^j}{j!} + O\left(\frac{1}{\delta^{m+1}}\right).$$

Если в повторной сумме сделать замену $k+j=l$, то эта сумма будет равна выражению

$$\sum_{l=1}^m \frac{\Gamma(l)}{\delta^l} \sum_{j=0}^{l-1} \frac{B_{l-j}}{(l-j)!} \cdot \frac{\varepsilon^j}{j!} = \sum_{l=1}^m \frac{\Gamma(l)}{\delta^l} \left(\frac{B_l(\varepsilon)}{l!} - \frac{\varepsilon^l}{l!} \right) = \sum_{l=1}^m \frac{\Gamma(l)}{\delta^l} \cdot \frac{b_l(\delta-b)}{l!} - \sum_{l=1}^m \frac{1}{l} \cdot \frac{\varepsilon^l}{\delta^l}.$$

Лемма 2 доказана.

3. Доказательство теорем 1 и 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Учитывая тождество

$$Q(x-y) = \sum_{p=0}^{\mu} \frac{(-1)^p Q^{(p)}(x)}{p!} y^p, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

получаем, что при $\delta \geq b+a$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} G_{\delta}^1(r, Q, \alpha, a, b) &= \sum_{k=0}^{[\delta/a-b/a]} \frac{Q(\delta^{\alpha} - (ak+b)^{\alpha})}{(ak+b)^{r+1}} \\ &= \sum_{p=0}^{\mu} \frac{(-1)^p Q^{(p)}(\delta^{\alpha})}{p!} a^{\alpha p - r - 1} \zeta_{[\delta/a-b/a]} \left(r+1 - \alpha p, \frac{b}{a} \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Если r/α не является целым числом из отрезка $[0, \mu]$, то к каждому слагаемому в (3.2) применяем лемму 1 с любым натуральным $m > 1 - \operatorname{Re}(r + 1 - \alpha\mu) = \alpha\mu - \operatorname{Re} r$. Тогда для таких m при $\delta \rightarrow +\infty$ будут справедливы равенства

$$G_\delta^1(r, Q, \alpha, a, b) = \sum_{p=0}^{\mu} \frac{(-1)^p Q^{(p)}(\delta^\alpha)}{p!} a^{\alpha p - r - 1} \zeta\left(r + 1 - \alpha p, \frac{b}{a}\right) - \sum_{k=0}^m \frac{b_k((\delta - b)/a)}{k!} \cdot \frac{a^{k-1} A_k(r, Q, \delta^\alpha, \alpha)}{\delta^{r+k}} + O\left(\frac{1}{\delta^{r+m+1-\alpha\mu}}\right),$$

где числа $A_k(r, Q, x, \alpha)$ определены по формуле (1.7). Докажем, что $A_k(r, Q, x, \alpha) = 0$ при всех целых $k \in [1, \mu_0]$. Так как точка $x = 0$ для многочлена Q является нулем кратности $\mu_0 \in \mathbb{N}$, то $Q(x) = x^{\mu_0} Q_1(x)$, где Q_1 – алгебраический многочлен степени $\mu - \mu_0$ и $Q^{(\mu_0)}(0) = \mu_0! Q_1(0) \neq 0$. При фиксированном x рассмотрим функцию

$$f(y) := Q(x - xe^y) = x^{\mu_0} (1 - e^y)^{\mu_0} Q_1(x - xe^y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Очевидно $f^{(q)}(0) = 0$ при всех целых $q \in [0, \mu_0 - 1]$ и $f^{(\mu_0)}(0) = \mu_0! \lim_{y \rightarrow 0} f(y)/y^{\mu_0} = (-1)^{\mu_0} Q^{(\mu_0)}(0) x^{\mu_0}$. Учитывая тождество (3.1), получаем равенства

$$f^{(q)}(0) = \sum_{p=0}^{\mu} \frac{(-1)^p Q^{(p)}(x)}{p!} x^p p^q = \begin{cases} 0, & 0 \leq q \leq \mu_0 - 1, \\ (-1)^{\mu_0} Q^{(\mu_0)}(0) x^{\mu_0}, & q = \mu_0. \end{cases}$$

Поэтому $A_k(r, Q, x, \alpha) = 0$ при $1 \leq k \leq \mu_0$. Это следует из того, что при $k \in \mathbb{N}$ отношение $\Gamma(r - \alpha p + k)/\Gamma(r - \alpha p + 1)$ является относительно p многочленом степени $k - 1$ и коэффициент при старшей степени равен $(-\alpha)^{k-1}$. Отсюда следует, что

$$A_{\mu_0+1}(r, Q, x, \alpha) = (-\alpha)^{\mu_0} \sum_{p=0}^{\mu} \frac{(-1)^p Q^{(p)}(x) x^p p^{\mu_0}}{p!} = Q^{(\mu_0)}(0) \alpha^{\mu_0} x^{\mu_0}.$$

Равенство (1.6) доказано. Осталось учесть, что $b_0(x) \equiv 1$.

Если $r/\alpha = q \in \mathbb{Z}$ и $q \in [0, \mu]$, то к каждому слагаемому в (3.2) при $p \neq q$ применяем лемму 1 с любым натуральным $m > \alpha\mu - \operatorname{Re} r$, а к слагаемому при $p = q$ применяем лемму 2. Для таких m при $\delta \rightarrow +\infty$ будут справедливы равенства

$$\begin{aligned} G_\delta^1(r, Q, \alpha, a, b) &= \frac{(-1)^q Q^{(q)}(\delta^\alpha)}{q! a} \left(\ln \frac{\delta}{a} - \frac{\Gamma'(b/a)}{\Gamma(b/a)} - \sum_{k=1}^m \frac{\Gamma(k) a^k}{\delta^k} \cdot \frac{b_k((\delta - b)/a)}{k!} \right) \\ &+ \sum_{p=0, p \neq q}^{\mu} \frac{(-1)^p Q^{(p)}(\delta^\alpha)}{p!} a^{\alpha p - r - 1} \zeta\left(r + 1 - \alpha p, \frac{b}{a}\right) \\ &- \sum_{k=0}^m \frac{b_k((\delta - b)/a) a^{k-1}}{k! \delta^{r+k}} \\ &\times \sum_{p=0, p \neq q}^{\mu} \frac{(-1)^p Q^{(p)}(\delta^\alpha) \delta^{\alpha p}}{p!} \cdot \frac{\Gamma(r - \alpha p + k)}{\Gamma(r - \alpha p + 1)} + O\left(\frac{1}{\delta^{r+m+1-\alpha\mu}}\right). \end{aligned}$$

Если в двойной сумме выделить отдельно слагаемое при $k = 0$, то эта сумма будет равна выражению

$$\sum_{p=0, p \neq q}^{\mu} \frac{(-1)^p Q^{(p)}(\delta^\alpha) \delta^{\alpha p - r}}{\alpha a p! (q - p)} + \sum_{k=1}^m \frac{b_k ((\delta - b)/a) a^{k-1}}{k! \delta^{r+k}} \left(A_k(r, Q, \delta^\alpha, \alpha) - \frac{(-1)^q Q^{(q)}(\delta^\alpha) \delta^{\alpha q} \Gamma(k)}{q!} \right).$$

Равенство (1.8) доказано. Надо только учесть, что $A_k(r, Q, \delta^\alpha, \alpha) = 0$ при $k = 1, \dots, \mu_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Доказательство вытекает из теоремы 1 и следующего очевидного равенства:

$$G_\delta^2(r, Q, \alpha, a, b) = 2G_\delta^1(r, Q, \alpha, 2a, b) - G_\delta^1(r, Q, \alpha, a, b), \quad \delta, \alpha, a, b > 0, \quad r \in \mathbb{C}.$$

В случае, когда r/α не является целым числом из отрезка $[0, \mu]$, надо учесть равенство $\tilde{\zeta}(s, b) = 2^{1-s} \zeta(s, b/2) - \zeta(s, b)$, $s \neq 1$, которое при $\operatorname{Re} s > 1$ очевидно, а при остальных $s \neq 1$ вытекает из теоремы единственности, а в случае, когда r/α является целым числом из отрезка $[0, \mu]$, надо еще учесть равенство (1.5).

4. Приближение средними типа Рисса и Чезаро. Пусть $L_p = L_p(-\pi, \pi)$ – классы 2π -периодических вещественнозначных измеримых функций с конечной нормой $\|f\|_p = (\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt)^{1/p}$ при $1 \leq p < \infty$ и $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\{|f(t)| : t \in [-\pi, \pi]\}$. Коэффициенты Фурье функции $\varphi \in L_1$ и свертка функций φ и K определяются соответственно по формулам

$$\widehat{\varphi}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) e^{-ikt} dt, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (\varphi * K)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) K(t) dt.$$

Пусть $\beta \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $n \in \mathbb{N}$, а $\mathbf{W}_{p,n}^{r,\beta}$ – класс функций, представимых в виде

$$f = \varphi * \psi_{r,\beta},$$

где $\varphi \in L_p$, $\|\varphi\|_p \leq 1$, $\widehat{\varphi}(k) = 0$, $|k| \leq n-1$, $k \in \mathbb{Z}$ и

$$\psi_{r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cos(kt - \beta\pi/2)}{k^r}, \quad r > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Известно, что $\psi_{r,\beta} \in L_1$ (см. [8; гл. V] или [9; гл. 7]). Поэтому $\mathbf{W}_{p,n}^{r,\beta} \subset L_p$ при всех $1 \leq p \leq \infty$, а если $p = \infty$ или $\psi_{r,\beta} \in L_\infty$, то $\mathbf{W}_{p,n}^{r,\beta} \subset C(\mathbb{R})$ (см. [10; гл. 4]). В частных случаях, когда $n = 1$, $\beta = r$ или $\beta = r+1$, получаются классы $W_p^r := W_{p,1}^{r,r}$ и $\widetilde{W}_p^r := W_{p,1}^{r,r+1}$.

Если U – линейный оператор, действующий из $\mathbf{W}_{p,n}^{r,\beta}$ в L_p , то величина приближения класса $\mathbf{W}_{p,n}^{r,\beta}$ оператором U определяется по формуле

$$E(\mathbf{W}_{p,n}^{r,\beta}; U)_p := \sup_{f \in \mathbf{W}_{p,n}^{r,\beta}} \|f - U(f)\|_p. \quad (4.1)$$

Мы рассматриваем операторы $U = G_\delta^{\alpha, Q}$, $\alpha, \delta > 0$, следующего вида:

$$G_\delta^{\alpha, Q}(f)(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{Q((\delta^\alpha - |k|^\alpha)_+)}{Q(\delta^\alpha)} \hat{f}(k) e^{ikx}, \quad f \in L_1,$$

где функция $Q(x) > 0$ при $x > 0$ и $Q(0) = 0$. Если $Q(x) = x^\mu$, $\mu > 0$, то получаем $G_\delta^{\alpha, Q} = R_\delta^{\alpha, \mu}$ – средние Рисса (при $\alpha = \mu = 1$, $\delta \in \mathbb{N}$ получаются средние арифметические частных сумм ряда Фурье). Если $Q(x) = \prod_{k=1}^\mu (x + k - 1)$, $\mu \in \mathbb{N}$, то при $\alpha = 1$, $m \in \mathbb{Z}_+$, получаем $G_{m+1}^{1, Q} = \sigma_m^\mu$ – средние Чезаро целого порядка $\mu \in \mathbb{N}$.

Если $\beta \in \mathbb{Z}$, а $p = 1$ или $p = \infty$, то для некоторых функций Q и при некоторых значениях параметров $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, $r > 0$ и для любого $\delta > 0$ имеет место равенство

$$E(\mathbf{W}_{p,n}^{r,\beta}; G_\delta^{\alpha, Q})_p = \frac{4}{\pi n^r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(\beta+1)}}{(2k+1)^{r+1}} \left(1 - \frac{Q((\delta^\alpha - (2k+1)^\alpha n^\alpha)_+)}{Q(\delta^\alpha)} \right). \quad (4.2)$$

В работе автора [11; § 3] (см. также [12]) доказан следующий результат.

Пусть $Q(x) = \sum_{k=1}^m a_k x^{\mu_k}$, где $m \in \mathbb{N}$, $a_k > 0$ и $\mu_k \geq 1$. Пусть $\beta \in \mathbb{Z}$, $p = 1$ или $p = \infty$, $n = 1$, $0 < \alpha \leq 1$ и $\delta > 0$. Тогда равенства (4.2) справедливы по крайней мере в следующих случаях:

- 1) $\beta + 1 \in 2\mathbb{Z}$, $r = 1$ или $r \geq 2$;
- 2) $\beta \in 2\mathbb{Z}$, $r = 2$ или $r \geq 3$.

В [11; § 3] (см. также [12]) доказано, что для средних Рисса ($Q(x) = x^\mu$) равенство (4.2) при любом $\delta > 0$ и $p = 1$ или $p = \infty$ справедливо по крайней мере в следующих случаях (доказательство использует теорему Никольского [13], [14]):

- 1) $\beta + 1 \in 2\mathbb{Z}$ и выполняется одно из трех условий:
 - i) $0 < \alpha \leq 1$, $\mu \geq 2$, $r \geq \alpha$, $n \in \mathbb{N}$;
 - ii) $0 < \alpha \leq 1$, $\mu \geq 1$, $r = 1$, $n = 1$;
 - iii) $\alpha > 0$, $\mu \geq 1$, $r \geq \max\{2; \alpha + 1\}$, $n = 1$.
- 2) $\beta \in 2\mathbb{Z}$ и выполняется одно из четырех условий:
 - i) $0 < \alpha \leq 1$, $\mu \geq 3$, $r \geq \alpha$, $n \in \mathbb{N}$;
 - ii) $0 < \alpha \leq 1$, $\mu \geq 2$, $r \geq \alpha + 1$, $n = 1$;
 - iii) $0 < \alpha \leq 1$, $\mu \geq 1$, $r = 2$, $n = 1$;
 - iv) $\alpha > 0$, $\mu \geq 1$, $r \geq \max\{3; \alpha + 2\}$, $n = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае средних Чезаро ($Q(x) = \prod_{k=1}^\mu (x + k - 1)$, $\mu \in \mathbb{N}$, $\alpha = 1$, $\delta \in \mathbb{N}$) для классов W_p^r , $r \in \mathbb{N}$, и $\widetilde{W}_p^r$, $r - 1 \in \mathbb{N}$, равенство (4.2) при $p = \infty$ доказано в работах Нады [1], [2], а в работе Теляковского [15] доказано совпадение величин $E(\mathbf{W}_{p,1}^{r,\beta}; G_\delta^{1,Q})_p$ для указанных классов при $p = 1$ и $p = \infty$. В этом же случае для класса W_∞^1 в работе Фалалеева [16] были приведены шесть первых членов в асимптотике для величины (4.2) при $\delta \rightarrow +\infty$. В случае средних арифметических ($Q(x) = x$, $\alpha = 1$, $\delta \in \mathbb{N}$) для классов W_p^r , $r \in \mathbb{N}$, и $\widetilde{W}_p^r$, $r - 1 \in \mathbb{N}$, для которых параметр $n = 1$, асимптотическое разложение ряда (4.2) по степеням δ при $\delta \rightarrow +\infty$ найдено в работах Теляковского и Баскакова [3], [4]. В случае средних Рисса ($Q(x) = x^\mu$, $\alpha = 1$), $\mu \in \mathbb{N}$, $\delta \in \mathbb{N}$, для класса W_∞^1 в работе Фалалеева [16] приведены три первых члена в асимптотике величины (4.2).

Если Q является алгебраическим многочленом степени $\mu \in \mathbb{N}$, то из теорем 1 и 2 сразу получаются асимптотические разложения при $\delta \rightarrow +\infty$ ряда (4.2). В частности, получаются асимптотические разложения величины (4.2) для средних Рисса и Чезаро целого порядка. Выпишем эти разложения, например, для средних Рисса.

Сумма ряда в правой части равенства (4.2) при $Q(x) = x^\mu$ равна $F_\delta^\beta/n(r, \mu, \alpha)$, где

$$F_\delta^\beta(r, \mu, \alpha) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(\beta+1)}}{(2k+1)^{r+1}} \left(1 - \frac{(\delta^\alpha - (2k+1)^\alpha)_+^\mu}{\delta^{\alpha\mu}} \right), \quad \beta \in \mathbb{Z}, \quad \delta, r, \mu, \alpha > 0.$$

Из теорем 1 и 2 получаем следующие асимптотические разложения при $\delta \rightarrow +\infty$ функции $F_\delta^\beta(r, \mu, \alpha)$.

1) Пусть $r, \alpha > 0$ и $\mu \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$, $m > \max\{\alpha\mu - r; \mu\}$ при $\delta \rightarrow +\infty$ равенства (4.3) и (4.4) справедливы соответственно в случаях, когда r/α не является натуральным числом из отрезка $[1, \mu]$ и когда $r/\alpha = q \in \mathbb{N}$, $q \in [1, \mu]$:

$$\begin{aligned} F_\delta^1(r, \mu, \alpha) = & \sum_{p=1}^{\mu} (-1)^{p+1} \binom{\mu}{p} \frac{2^{\alpha p - r - 1} \zeta(r+1 - \alpha p, 1/2)}{\delta^{\alpha p}} + \frac{a_0(r, \mu, \alpha)}{2\delta^r} \\ & + \sum_{k=\mu+1}^m b_k \left(\frac{\delta-1}{2} \right) \cdot \frac{2^{k-1} a_k(r, \mu, \alpha)}{k! \delta^{r+k}} + O\left(\frac{1}{\delta^{r+m+1}} \right), \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} F_\delta^1(r, \mu, \alpha) = & \frac{1}{2\delta^r} \left((-1)^{q+1} \binom{\mu}{q} (\ln \delta + \ln 2 + C) + \frac{1}{\alpha} \sum_{p=0, p \neq q}^{\mu} \binom{\mu}{p} \frac{(-1)^p}{q-p} \right) \\ & + \sum_{p=1, p \neq q}^{\mu} (-1)^{p+1} \binom{\mu}{p} \frac{2^{\alpha p - r - 1} \zeta(r+1 - \alpha p, 1/2)}{\delta^{\alpha p}} \\ & + \sum_{k=\mu+1}^m b_k \left(\frac{\delta-1}{2} \right) \cdot \frac{2^{k-1} a_k(r, \mu, \alpha)}{k! \delta^{r+k}} + O\left(\frac{1}{\delta^{r+m+1}} \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь C – константа Эйлера², а числа $a_k(r, \mu, \alpha)$ определены по формуле (1.9).

2) Пусть $r, \alpha > 0$ и $\mu \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$, $m > \max\{\alpha\mu - r; \mu\}$, при $\delta \rightarrow +\infty$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} F_\delta^2(r, \mu, \alpha) = & \sum_{p=1}^{\mu} (-1)^{p+1} \binom{\mu}{p} \frac{2^{\alpha p - r - 1} \tilde{\zeta}(r+1 - \alpha p, 1/2)}{\delta^{\alpha p}} \\ & - \sum_{k=\mu+1}^m e_{k-1} \left(\frac{\delta-1}{2} \right) \cdot \frac{2^{k-2} a_k(r, \mu, \alpha)}{(k-1)! \delta^{r+k}} + O\left(\frac{1}{\delta^{r+m+1}} \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. Nagy, “Függvények megközelítése Fourier-sorok számtani közepeivel”, *Math. Fiz. Lapok*, **49** (1942), 123–138.

²В (4.4) мы воспользовались равенством $\Gamma'(1/2)/\Gamma(1/2) = -C - 2 \ln 2$.

- [2] B. Nagy, “Approximation der Funktionen durch die arithmetischen Mittel ihrer Fourierschen Reihen”, *Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math*, **11** (1946), 71–84.
- [3] С. А. Теляковский, “О приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера”, *Укр. матем. журн.*, **21**:3 (1969), 334–343.
- [4] В. А. Баскаков, С. А. Теляковский, “О приближении дифференцируемых функций суммами Фейера”, *Матем. заметки*, **32**:2 (1982), 129–140.
- [5] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge Math. Lib., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927.
- [6] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1973.
- [7] А. О. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*, Наука, М., 1967.
- [8] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Т. 1, Мир, М., 1965.
- [9] Р. Эдвардс, *Ряды Фурье в современном изложении*, Т. 1, Мир, М., 1985.
- [10] Н. П. Корнейчук, *Экстремальные задачи теории приближения*, Наука, М., 1976.
- [11] В. П. Заставный, “Точная оценка приближения некоторых классов дифференцируемых функций сверточными операторами”, *Укр. матем. вісник*, **7**:3 (2010), 409–433.
- [12] V. P. Zastavnyi, *Exact Estimation of an Approximation of Some Classes of Differentiable Functions by Convolution Operators*, arXiv:math.CA/1003.4973.
- [13] С. М. Никольский, “Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **10**:3 (1946), 207–256.
- [14] В. П. Заставный, “Теорема Никольского для ядер, удовлетворяющих более общему условию, чем A_n^* ”, *Тр. Ин-та прикл. матем. и мех. НАН Украины*, **20** (2010), 75–85.
- [15] С. А. Теляковский, “О приближении функций средними Чезаро второго порядка”, *Anal. Math.*, **8**:4 (1982), 305–319.
- [16] Л. П. Фалалеев, “К 75-летию профессора С. А. Теляковского. О методах Чезаро и Рисса”, *Матем. журн.*, **7**:4 (2007), 82–56.

В. П. Заставный

Донецкий национальный университет, Украина

E-mail: zastavn@rambler.ru

Поступило

12.09.2010