Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Г. Тасоев, О рациональных приближениях некоторых чисел, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 6, 931–937

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm911>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 15:59:23

УДК 511.3

О РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ ЧИСЕЛ

Б. Г. Тасоев

В статье устанавливается точный порядок приближения некоторых чисел рациональными. Основным инструментом для этого служат разложения в регулярные непрерывные дроби. Доказаны также несколько новых таких разложений.

Библиография: 8 названий.

В 1978 году Девис [1] доказал, что при любом $\varepsilon > 0$ существует бесконечно много рациональных чисел p/q , удовлетворяющих неравенству

$$\left| e - \frac{p}{q} \right| < \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) \frac{\ln \ln q}{q^2 \ln q},$$

и в то же время неравенство

$$\left| e - \frac{p}{q} \right| < \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right) \frac{\ln \ln q}{q^2 \ln q}$$

имеет лишь конечное число решений. Доказательство этого утверждения использовало полученное еще Эйлером разложение числа e в непрерывную дробь

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, \dots] = [2; \overline{1, 2 + 2\lambda, 1}],$$

а также интегральные представления для числителей и знаменателей подходящих дробей этой непрерывной дроби. Мы применили здесь символ $\overline{1, 2 + 2\lambda, 1}$ для обозначения бесконечной последовательности чисел, получающейся последовательным соединением блоков $1, 2 + 2\lambda, 1$ при $\lambda = 0, 1, 2, \dots$. Подобная сокращенная запись будет использоваться и в дальнейшем.

Непрерывная дробь

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}}$$

будет записываться в виде

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots \quad (1)$$

(см. [2]), а в случае $a_1 = a_2 = \dots = 1$ обычно применяется запись $[b_0; b_1, b_2, b_3, \dots]$.

Основным результатом статьи является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть число α определено непрерывной дробью

$$\alpha = [b_0; b_1, \dots, b_s, \overline{c_1 + \lambda d_1, \dots, c_m + \lambda d_m}],$$

где все $b_i, c_i, d_i \in \mathbb{Z}$, причем d_i неотрицательны, а $b_i, c_i, i \geq 1$, положительны. Пусть также Ω – количество чисел d_i , отличных от нуля, $\Omega > 0$, и

$$d = \max_{1 \leq i \leq m} d_i.$$

Тогда при $c = \Omega/d$ и любом $\varepsilon > 0$ справедливы утверждения:

1) неравенство

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < (c + \varepsilon) \frac{\ln \ln q}{q^2 \ln q}$$

имеет бесконечное число решений в рациональных числах p/q ;

2) неравенство

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < (c - \varepsilon) \frac{\ln \ln q}{q^2 \ln q}$$

имеет лишь конечное число решений в рациональных числах p/q .

Если в непрерывной дроби для α все числа $d_i = 0$, то, как хорошо известно, в этом случае α есть квадратичная иррациональность и не допускает рациональных приближений по порядку лучших, чем $1/q^2$.

Утверждение Девиса следует из теоремы 1, так как в рассматриваемом случае $\Omega = 1$ и $d = 2$. Доказательство теоремы 1 использует элементарные свойства непрерывных дробей и существенно проще доказательства теоремы Девиса. Ниже мы приведем ряд других примеров. При этом будут получены новые разложения некоторых чисел в непрерывные дроби указанного типа. Со свойствами непрерывных дробей можно познакомиться по книгам [2], [3].

Следующая лемма относится к произвольным регулярным непрерывным дробям, не обязательно имеющим вид, указанный в теореме 1.

ЛЕММА 1. Пусть $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ – регулярная непрерывная дробь и p_n/q_n , $n \geq 0$, – последовательность ее подходящих дробей. Тогда справедливы неравенства

$$\frac{1}{(a_{n+1} + 2)q_n^2} < \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}, \quad n \geq 1, \quad (2)$$

$$a_1 \cdots a_n \leq q_n \leq F_n \cdot a_1 \cdots a_n, \quad n \geq 1, \quad (3)$$

где F_n – последовательность Фибоначчи.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По существу все неравенства этой леммы хорошо известны. Согласно [3, гл. 24] справедливо равенство

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n},$$

где α_{n+1} есть полное частное непрерывной дроби. Отсюда в силу неравенств $a_{n+1} \leq \alpha_{n+1} < a_{n+1} + 1$ и $0 \leq q_{n-1} \leq q_n$ следуют оценки (2).

Для доказательства неравенств (3) воспользуемся индукцией. При $n = 1$ и $n = 2$ неравенства (3), очевидно, выполняются. При $n \geq 2$ из равенства $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$ следует, что $a_{n+1}q_n \leq q_{n+1} \leq a_{n+1}(q_n + q_{n-1})$. Из этих неравенств в силу индуктивного предположения и рекуррентного уравнения $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ для чисел Фибоначчи легко выводятся неравенства (3).

Мы будем применять доказанную лемму к числу α из теоремы 1. В этом случае $a_n = b_n$ при $n \leq s$. Если же $n > s$, определим целые числа t и r равенством $n - s = mt + r$, $1 \leq r \leq m$. Тогда $a_n = c_r + td_r$.

ЛЕММА 2. В условиях теоремы 1 при $n \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\ln(a_1 \cdots a_n) = \frac{\Omega}{m} \cdot n \ln n + O(n). \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если в левой части (4) отбросить все сомножители, отвечающие числам b_i , а также числам $c_i + \lambda d_i$ с $d_i = 0$, то произошедшая от этого ошибка будет иметь величину $O(n)$. Поэтому лемму 2 достаточно доказать в предположении, что $s = 0$ и при любом j справедливо условие $d_j \neq 0$, т.е. $\Omega = m$. Теперь утверждение легко выводится с помощью равенства

$$c_i(c_i + d_i)(c_i + 2d_i) \cdot (c_i + td_i) \cdot \Gamma\left(\frac{c_i}{d_i}\right) = d_i^{t+1} \Gamma\left(\frac{c_i}{d_i} + t + 1\right)$$

и асимптотической формулы для логарифма гамма-функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Докажем сначала второе утверждение теоремы 1. Если рациональное число p/q не является подходящей дробью к числу α , то справедливо неравенство (см. [3, гл. 25])

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{2q^2},$$

и, следовательно, неравенство из утверждения 2) теоремы нарушается при больших q .

Если $p/q = p_n/q_n$, $n \geq s$, есть подходящая дробь к числу α , то определим целые числа t и r так, чтобы $n + 1 - s = mt + r$, $1 \leq r \leq m$. Тогда $a_{n+1} = c_r + td_r$.

Если $d_r = 0$, то из левого неравенства (2) следует, что

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{1}{(c_r + 2)q_n^2}.$$

Это противоречит неравенству из утверждения 2) теоремы 1 при больших n .

Если же $d_r \neq 0$, то из левого неравенства (2) находим

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{1}{(td_r + c_r + 2)q_n^2}. \quad (5)$$

Из (3) и леммы 2, учитывая, что $\ln F_n = O(n)$, находим

$$\ln q_n = \ln(a_1 \cdots a_n) + O(n) = \frac{\Omega}{m} \cdot n \ln n + O(n)$$

и

$$t = \frac{1}{\Omega} \cdot \frac{\ln q_n}{\ln \ln q_n} \cdot (1 + o(1)) \quad (6)$$

при $t \rightarrow \infty$. Теперь из (5) следует, что

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{\Omega}{d_r} \cdot \frac{\ln \ln q_n}{q_n^2 \ln q_n} \cdot (1 + o(1)). \quad (7)$$

Поскольку $d_r \leq d$, то (7) противоречит неравенству из утверждения 2) теоремы 1 при достаточно больших t .

Итак, любое решение p/q неравенства из утверждения 2) имеет знаменатель, ограниченный некоторой константой, зависящей от α . Этим доказательство утверждения 2) завершается.

Для доказательства утверждения 1) выберем r так, чтобы $d_r = d$, и положим $n+1 = s + mt + r$ при произвольно выбранном натуральном числе t . Тогда $a_{n+1} = c_r + td$ и из правого неравенства (2) находим

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{(td + c_r)q_n^2},$$

что в силу (6) приводит к неравенству

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{\Omega}{d} \cdot \frac{\ln \ln q_n}{q_n^2 \ln q_n} \cdot (1 + o(1)),$$

выполняющемуся при всех натуральных t . Это означает, что подходящие дроби p_n/q_n с $n+1 = s + mt + r$ при r , определенном равенством $d_r = d$, и любом достаточно большом целом t удовлетворяют неравенству из пункта 1) теоремы 1.

Выведем теперь ряд следствий теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 1. Число

$$\operatorname{th} \frac{2}{a} = \frac{e^{2/a} - 1}{e^{2/a} + 1}, \quad a \in \mathbb{Z}, \quad a > 0,$$

удовлетворяет утверждению теоремы 1 с константой $c = 1/(2a)$.

Это утверждение следует из доказанного в 1737 году Эйлером разложения $\operatorname{th}(2/a) = [0; (1 + 2\lambda)a]$. Отметим, что в работе [4] доказано лишь существование константы c , для которой выполняется второе из утверждений теоремы 1 для числа $\operatorname{th}(1/a)$. В связи с подобными результатами см. также [5].

СЛЕДСТВИЕ 2. Числа e^2 , $e^{1/a}$ и $e^{2/b}$ при целых a, b , $a \geq 2$, $b \geq 3$, b нечетно, удовлетворяют утверждению теоремы 1 с константами c , равными соответственно $1/4$, $1/(2a)$, $1/(4b)$.

Это утверждение выполняется в силу следующих классических разложений в непрерывную дробь (см. [6, гл. 14]):

$$e^2 = [7; \overline{2 + 3\lambda, 1, 1, 3 + 3\lambda, 18 + 12\lambda}], \quad e^{1/a} = [1; \overline{(1 + 2\lambda)a - 1, 1, 1}],$$

$$e^{2/b} = \left[1; \overline{\frac{b-1}{2} + 3b\lambda, 6b + 12b\lambda, \frac{5b-1}{2} + 3b\lambda, 1, 1} \right].$$

Отметим, что утверждения относительно чисел $e^{1/a}$, $e^{2/b}$ доказаны в работе Девиса [7].

В следующей теореме мы приведем еще ряд разложений в регулярные непрерывные дроби, из которых при помощи теоремы 1 могут быть получены результаты о рациональных приближениях.

ТЕОРЕМА 2. Справедливы следующие разложения в непрерывные дроби:

$$\sqrt{\frac{v}{u}} \operatorname{th} \frac{1}{\sqrt{uv}} = [0; \overline{(4\lambda + 1)u, (4\lambda + 3)v}], \quad u, v \in \mathbb{N}, \quad (8)$$

$$ae^{1/a} = [a + 1; \overline{2a - 1, 2\lambda + 2, 1}], \quad a \in \mathbb{N}, \quad (9)$$

$$a^{-1}e^{1/a} = [0; a - 1, 2a, \overline{1, 2\lambda + 2, 2a - 1}], \quad a \in \mathbb{Z}, \quad a > 1, \quad (10)$$

$$2e = [5; 2, \overline{3, 2\lambda + 2, 3, 1, 2\lambda + 2}], \quad (11)$$

$$3e = [8; 6, 2, \overline{5, 2\lambda + 2, 5, 1, 2\lambda + 2, 5, 1, 2\lambda + 2, 1}], \quad (12)$$

$$4e = [10; 1, 6, 1, 7, 2, \overline{7, \lambda + 2, 7, 1, \lambda + 1, 1}], \quad (13)$$

$$\frac{1}{2}e = [1; 2, \overline{2\lambda + 1, 3, 1, 2\lambda + 1, 1, 3}], \quad (14)$$

$$\frac{1}{3}e = [0; 1, 9, \overline{1, 1, 2\lambda + 1, 5, 1, 2\lambda + 1, 1, 1, 26 + 18\lambda}], \quad (15)$$

$$\frac{1}{4}e = [0; 1, 2, 8, 3, \overline{1, 1, 1, \lambda + 1, 7, 1, \lambda + 1, 2}], \quad (16)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{a} = [0; a - 1, \overline{1, (2\lambda + 3)a - 2}], \quad a \in \mathbb{Z}, \quad a > 1, \quad (17)$$

$$\operatorname{tg} 1 = [1; \overline{2\lambda + 1, 1}], \quad (18)$$

$$\sqrt{a} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{a}} = [1; \overline{(4\lambda + 3)a - 2, 1, 4\lambda + 3, 1}], \quad a \in \mathbb{N}, \quad (19)$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{a}} = [0; a - 1, \overline{1, 4\lambda + 1, 1, (4\lambda + 5)a - 2}], \quad a \in \mathbb{Z}, \quad a > 1, \quad (20)$$

$$2 \operatorname{tg} 1 = [3; 8, \overline{1, 3\lambda + 2, 2, 3\lambda + 3, 12\lambda + 20}], \quad (21)$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} 1 = [0; 1, 3, \overline{1 + 3\lambda, 1, 12 + 2\lambda, 1, 3 + 3\lambda, 2}]. \quad (22)$$

Для доказательства этой теоремы используются классические разложения значений аналитических функций в нерегулярные непрерывные дроби, а также следующее утверждение.

ЛЕММА 3. Пусть $r_0 = 1, r_1, r_2, \dots$ – ненулевые числа и

$$a_n^* = r_n r_{n-1} a_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad b_n^* = r_n b_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда непрерывная дробь

$$b_0^* + \frac{a_1^*}{b_1^* + \frac{a_2^*}{b_2^* + \dots}}$$

сходится к тому же числу, что и дробь (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [2, теорема 2.6].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Чтобы доказать равенство (8), положим $x = \sqrt{uv}$ в равенстве $\text{th}(1/x) = [0; (\overline{2\lambda + 1})x]$ и воспользуемся леммой 3 с $r_0 = 1, r_{2k+2} = \sqrt{v/u}, r_{2k+1} = \sqrt{u/v}, k \geq 0$.

Разложения (9)–(16) доказываются похожими методами. Для доказательства, например, равенства (9) положим в разложении [2, равенство (6.1.37)] $x = 1/a$ и применим к результату лемму 3 с $r_0 = 1, r_{2k} = a, r_{2k-1} = 1, k \geq 1$. В результате получится разложение

$$ae^{1/a} = a + \frac{1}{1 - \frac{1}{2a} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2a} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2a} + \frac{1}{7} - \dots} \quad (23)$$

Обозначим через P_n/Q_n и p_n/q_n последовательности подходящих дробей для правых частей (23) и (9) соответственно. Индукцией по n легко доказать, что

$$\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = \frac{p_{3n}}{q_{3n}}, \quad \frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}} = \frac{p_{3n+1}}{q_{3n+1}}, \quad n \geq 0.$$

Это доказывает равенство (9).

Равенства (17)–(22) также доказываются похожими способами. Например, для доказательства равенства (17) воспользуемся разложением

$$\text{tg } x = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{5} - \frac{x^2}{7} - \frac{x^2}{9} - \dots} \quad (24)$$

(см. [2, равенство (6.1.55)]). Четная часть непрерывной дроби из (18) имеет вид (см. [2, теорема 2.10])

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \dots$$

Сравнивая эту дробь с (24) при $x = 1$, легко получаем, что (24), а вместе с тем и непрерывная дробь из (18) равны $\text{tg } 1$.

Отметим, что все разложения теоремы 2 в литературе не встречались.

Укажем еще одну теорему, доказываемую так же, как и теорема 1.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $a_0, a > 1, m > 1$ – целые числа и

$$\alpha = \left[a_0; \underbrace{a^\lambda, \dots, a^\lambda}_m \right]_{\lambda=1}^{\infty}.$$

Тогда при $c = 1/\sqrt{a}$ и любом $\varepsilon > 0$ справедливы утверждения:

1) неравенство

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < (c + \varepsilon) q^{-2 - \sqrt{2 \ln a / (m \ln q)}}$$

имеет бесконечное число решений в рациональных числах p/q ;

2) неравенство

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < (c - \varepsilon) q^{-2 - \sqrt{2 \ln a / (m \ln q)}}$$

имеет лишь конечное число решений в рациональных числах p/q .

Пример к теореме 3 дает следующее разложение, доказанное в работе [8]:

$$\frac{\sum_{s=0}^{\infty} a^{-(s+1)^2} \cdot \prod_{m=0}^s (a^{2m} - 1)^{-1}}{\sum_{s=0}^{\infty} a^{-s^2} \cdot \prod_{m=0}^s (a^{2m} - 1)^{-1}} = [0; a, a^2, a^3, a^4, \dots].$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Davis C.S. Rational approximations to e // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1978. V. 25. P. 497–502.
- [2] Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. М.: Мир, 1985.
- [3] Бухштаб А.А. Теория чисел. М.: Госпедиздат, 1960.
- [4] Shiokawa I. Rational approximations to the values of certain hypergeometric functions // Number Theory and Combinatorics (Japan, 1984). Singapore: World Sci. Publ., 1985. P. 353–367.
- [5] Иванов П. Л. О приближении значений некоторых функций // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1994. № 4. С. 12–15.
- [6] Perron O. Die Lehre von den Kettenbrüchen. New York: Chelsea, 1929.
- [7] Davis C.S. A note on rational approximation // Bull. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1979. V. 20. P. 407–410.
- [8] Тасоев Б. Г. О некоторых задачах в теории цепных дробей // Тр. Тбилисского ун-та, 1984. С. 53–84.