Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Е. Жуковский, О вероятности вхождения копии фиксированного графа в случайный дистанционный граф, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 6, 844–855

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9114>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 15:49:03

О вероятности вхождения копии фиксированного графа в случайный дистанционный граф

М. Е. Жуковский

В настоящей работе найдена пороговая вероятность вхождения копии сбалансированного графа в случайный дистанционный граф. В рассматриваемой модели не удастся применить технику, которую использовали П. Эрдеш и А. Реньи при нахождении пороговой вероятности для классического случайного графа. В связи с этим нами разработан новый метод получения оценок количества копий сбалансированного графа в полном дистанционном графе.

Библиография: 15 названий.

1. Постановка задачи и формулировка основного результата

Объектом нашего изучения являются случайные дистанционные графы. Для любого сбалансированного графа G мы нашли пороговую вероятность вхождения копии G в случайный дистанционный граф.

1.1. История задачи. Изучением пороговых функций занимались Эрдеш и Реньи в своей основополагающей работе [1]. Объектом их изучения являлся *случайный граф* $G(N, p)$, а именно вероятностное пространство $(\Omega_N, \mathcal{F}_N, P_{N,p})$. Здесь N – натуральное число, $0 \leq p \leq 1$, Ω_N – множество всех неориентированных графов без петель и кратных ребер с множеством вершин $\mathcal{V} = \{1, \dots, N\}$. Таким образом, справедливо равенство $\Omega_N = \{\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})\}$. Кроме того,

$$\mathcal{F}_N = 2^{\Omega_N}, \quad P_{N,p}(\mathcal{G}) = p^{|\mathcal{E}|}(1-p)^{C_N^2 - |\mathcal{E}|}.$$

Иными словами, любые две различные вершины графа в пространстве $G(N, p)$ соединены ребром с вероятностью p , независимо от всех остальных пар вершин (см. также [2]–[5]). В дальнейшем мы будем рассматривать модели, в которых вероятность p зависит от количества вершин N , причем нас будет интересовать асимптотическое поведение вероятностей свойств случайных графов при $N \rightarrow \infty$.

Определим теперь *пороговую функцию* для некоторого свойства $\mathcal{A}$. Событие $G \models \mathcal{A}$ – это множество графов, обладающих свойством $\mathcal{A}$. Функция $p_0(n)$ называется

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00294) и гранта Президента РФ № МД-8390.2010.1.

пороговой, если

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N,p}(G \models \mathcal{A}) = \begin{cases} 1, & \text{при } p \gg p_0, \\ 0, & \text{при } p \ll p_0, \end{cases}$$

или, наоборот,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N,p}(G \models \mathcal{A}) = \begin{cases} 0, & \text{при } p \gg p_0, \\ 1, & \text{при } p \ll p_0. \end{cases}$$

Здесь и далее мы будем писать $f(N) \gg g(N)$ ($f(N) \ll g(N)$) в том случае, когда существует такая функция $\alpha(N)$, что $\alpha(N) \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$ и

$$f(N) \geq \alpha(N)g(N) \quad (g(N) \geq \alpha(N)f(N)) \quad \forall N.$$

Эрдеш и Реньи доказали теорему о пороговой вероятности для свойства содержать копию *сбалансированного графа*. Рассмотрим граф G с v вершинами и e ребрами. Назовем отношение $\rho(G) = e/v$ *плотностью* графа G . Граф G называется *сбалансированным*, если для каждого его подграфа H выполнено неравенство $\rho(H) \leq \rho(G)$.

ТЕОРЕМА 1 (Эрдеш, Реньи, 1960, [1]). Пусть G – сбалансированный граф. Тогда функция $p = N^{-1/\rho(G)}$ является пороговой для свойства содержать копию графа G .

Помимо упомянутых авторов изучением асимптотики вероятности свойства содержать копию графа занимались Шургер, Палка, Барбур, Дженсон, Лучак, Ручиньски и др. (см. [6]–[9]).

В следующем пункте мы определим исследуемую нами модель случайных графов, после чего сформулируем основной результат данной работы.

1.2. Случайные дистанционные графы. Если при определении случайного графа считать, что разные пары вершин соединены независимо друг от друга с различными вероятностями, т.е. ребро $\{x_i, x_j\}$, $1 \leq i, j \leq N$, проведено с вероятностью $p_{ij} \in [0, 1]$, то будем обозначать такое вероятностное пространство $G(N, p_{ij})$. Одним из важнейших примеров этого случайного графа является случайный граф $G(\mathcal{G}_N, p)$, где $\mathcal{G}_N = (\mathcal{V}_N, \mathcal{E}_N)$ – неориентированный граф на N вершинах без петель и кратных ребер. А именно, $G(\mathcal{G}_N, p) = G(N, p_{ij})$, коль скоро

$$p_{ij} = \begin{cases} p, & \{x_i, x_j\} \in \mathcal{E}_N, \\ 0, & \{x_i, x_j\} \notin \mathcal{E}_N. \end{cases}$$

Итак, $G(\mathcal{G}_N, p)$ – это вероятностное пространство

$$G(\mathcal{G}_N, p) = (\Omega_{\mathcal{G}_N}, \mathcal{F}_{\mathcal{G}_N}, P_{\mathcal{G}_N, p}),$$

где

$$\Omega_{\mathcal{G}_N} = \{\mathcal{G}_N^0 = (\mathcal{V}_N^0, \mathcal{E}_N^0) : \mathcal{V}_N^0 = \mathcal{V}_N, \mathcal{E}_N^0 \subseteq \mathcal{E}_N\},$$

$$\mathcal{F}_{\mathcal{G}_N} = 2^{\Omega_{\mathcal{G}_N}},$$

$$P_{\mathcal{G}_N, p}(\mathcal{G}_N^0) = p^{|\mathcal{E}_N^0|} (1-p)^{|\mathcal{E}_N| - |\mathcal{E}_N^0|}.$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$, $n = 4k$. Положим $N = C_n^{n/2}$. Рассмотрим граф $G_N^{\text{dist}} = (V_N^{\text{dist}}, E_N^{\text{dist}})$, в котором

$$V_N^{\text{dist}} = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, x_1 + \dots + x_n = \frac{n}{2} \right\},$$

$$E_N^{\text{dist}} = \{ \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in V_N^{\text{dist}} \times V_N^{\text{dist}} : \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = k \},$$

где $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ – евклидово скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

Заметим, что $|V_N^{\text{dist}}| = N$.

Рассматриваемые графы называются *дистанционными* (см. [10]–[13]), поскольку их ребра отвечают тем парам их вершин, которые отстоят друг от друга на некоторое наперед заданное расстояние в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрение такого рода графов мотивировано классической задачей комбинаторной геометрии о хроматическом числе пространства (см. [14], [15]).

Мы изучаем *случайные дистанционные графы* $G(G_N^{\text{dist}}, p)$.

1.3. Формулировка результата. Пусть G – сбалансированный граф с плотностью ρ . Рассмотрим вероятностное пространство $G(G_N^{\text{dist}}, p)$. Как и в случае случайного графа $G(N, p)$, определим понятие пороговой вероятности для свойства $\mathcal{L}_G$ содержать копию графа G . Функция $p_0(n)$ является пороговой, если при $p \gg p_0$ вероятность $P_{G_N^{\text{dist}}, p}(\mathcal{L}_G)$ стремится к 1 при $N \rightarrow \infty$, а при $p \ll p_0$ – к нулю (или наоборот, при $p \gg p_0$ справедливо $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{G_N^{\text{dist}}, p}(G \models \mathcal{A}) = 0$, при $p \ll p_0$ справедливо $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{G_N^{\text{dist}}, p}(G \models \mathcal{A}) = 1$).

ТЕОРЕМА 2. При сделанных предположениях функция

$$p = N^{-1/\rho(G)} \sqrt{\ln N}$$

является пороговой для свойства $\mathcal{L}_G$.

Заметим, что величина $\rho(G)$ стоит в знаменателе, поэтому мы считаем $\rho(G) \neq 0$. Если же $\rho(G) = 0$, то в графе G не проведено ни одного ребра. Поэтому случайный дистанционный граф с вероятностью 1 содержит копию G при $N > |V(G)|$ и пороговая вероятность равна нулю.

2. Доказательство теоремы 2

Итак, рассмотрим некоторый сбалансированный граф G и дистанционный граф G_N^{dist} . Введем дополнительные обозначения.

2.1. Обозначения. Пусть граф G содержит v вершин и e ребер, a – количество автоморфизмов G , $V(G) = \{x_1, \dots, x_v\}$. Мы считаем, что $\rho(G) > 0$, т.е. в графе G есть хотя бы одно ребро. Будем считать, что ребром соединены вершины x_1 и x_2 . Оценим количество копий $N(G)$ такого графа в дистанционном графе.

Пусть $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}$ – произвольные вершины графа G_N^{dist} . Пусть, кроме того, $V_G(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1})$ – множество таких вершин в дистанционном графе, что

$$\forall j \in \{1, \dots, i-1\} (x_i \sim x_j) \implies \forall \mathbf{x} \in V_G(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}) (\mathbf{x} \sim \mathbf{x}_j).$$

где $0 \leq u_k(i) \leq w_k(i)$ для всех $k \in \{1, 2, 3, \dots, 2^{i-1}\}$. Все неизвестные можно выразить через

$$\begin{aligned} &u_1(i), \dots, u_{2^{i-1}-2^{i-1-l_1(i)}-1}(i), \\ &u_{2^{i-1}-2^{i-1-l_1(i)}+1}(i), \dots, u_{2^{i-1}-2^{i-1-l_2(i)}-1}(i), \dots, \\ &u_{2^{i-1}-2^{i-1-l_{j(i)}(i)}+1}(i), \dots, u_{2^{i-1}-1}(i). \end{aligned}$$

Обозначим множество всех соответствующих индексов через $I(i)$. Т.е. положим

$$\begin{aligned} I(i) = &\{1, 2, 3, \dots, 2^{i-1}\} \\ &\setminus \{2^{i-1} - 2^{i-1-l_1(i)}, 2^{i-1} - 2^{i-1-l_2(i)}, \dots, 2^{i-1} - 2^{i-1-l_{j(i)}(i)}, 2^{i-1}\}. \end{aligned}$$

Предположим, что $j(i) > 1$ (т.е. $i \geq 3$) и для каждого k справедливо неравенство

$$w_k(i) \geq \frac{n}{2^{2(i-1)}}. \quad (2)$$

Построим интервалы для значений переменных

$$\begin{aligned} &u_1(i), \dots, u_{2^{i-1}-2^{i-1-l_1(i)}-1}(i), \\ &u_{2^{i-1}-2^{i-1-l_1(i)}+1}(i), \dots, u_{2^{i-1}-2^{i-1-l_2(i)}-1}(i), \dots, \\ &u_{2^{i-1}-2^{i-1-l_{j(i)}(i)}+1}(i), \dots, u_{2^{i-1}-1}(i), \end{aligned}$$

при которых будет существовать такое решение системы (1), что справедливы неравенства

$$u_k(i) \geq \frac{n}{2^{2i}}, \quad w_k(i) - u_k(i) \geq \frac{n}{2^{2i}}. \quad (3)$$

Положим

$$J_k(i) = \left(\frac{w_k(i)}{2} - \frac{n}{2^{6(i-1)}}, \frac{w_k(i)}{2} + \frac{n}{2^{6(i-1)}} \right).$$

Докажем, что если при каждом $k \in I(i)$ справедливо $u_k(i) \in J_k(i)$, то существует решение системы (1). Действительно, при условии выполнения неравенств (2) каждое из $u_k(i)$ при $k \in I(i)$ удовлетворяет неравенствам системы. При этом если через $u_k(i)$, $k \in I(i)$, выразить произвольный элемент $u_j(i)$, то он будет отличаться от $w_j(i)/2$ на значение, не превосходящее $(i-1)2^{i-1}n/(2^{6(i-1)})$. Следовательно, в силу справедливости неравенств (2) этот элемент будет удовлетворять неравенствам системы. При этом для любых $i \geq 2$, $j(i) < i$ и $1 \leq k \leq 2^{j(i)}$ выполнены неравенства (3).

Напомним, что мы определили функцию $j(i)$ для $i \in \{2, 3, \dots, v\}$. Пусть J_0 – множество таких i , что $j(i) = 0$, J_1 – множество таких i , что $j(i) = 1$, J – множество таких i , что $j(i) > 1$.

Будем при каждом $i \geq 2$ так подбирать вершины из множества $V_G(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1})$, чтобы при $i \geq 3$ все числа $w_k(i)$ удовлетворяли неравенствам (2).

Начнем с $i = 3$. Очевидно, $u_1(2) = u_2(2) = n/4$. Следовательно,

$$w_1(3) = w_2(3) = w_3(3) = w_4(3) = \frac{n}{4}.$$

Пусть теперь $i > 3$ и $w_k(i-1)$ удовлетворяет неравенству (2) для каждого k . Если $i \in J_0$, то в качестве $w_{2k-1}(i)$ при k отличных от 2^{i-2} можно выбрать произвольное

число из интервала

$$\left(\frac{w_k(i-1)}{2} - \frac{n}{2^{6(i-1)}}, \frac{w_k(i-1)}{2} + \frac{n}{2^{6(i-1)}} \right),$$

элемент $w_{2^{i-1}-1}$ можно положить равным

$$\frac{n}{2} - w_1(i) - w_3(i) - \dots - w_{2^{i-1}-3},$$

а элементы $w_{2k}(i)$ – равными $w_k(i-1) - w_{2k-1}(i)$. Если $i \in J_1$ (пусть для определенности $x_1 \sim x_i$), то в качестве $w_{2k-1}(i)$ при k отличных от $2^{i-3}, 2^{i-2}$ можно выбрать произвольное число из интервала

$$\left(\frac{w_k(i-1)}{2} - \frac{n}{2^{6(i-1)}}, \frac{w_k(i-1)}{2} + \frac{n}{2^{6(i-1)}} \right),$$

элементы $w_{2^{i-2}-1}, w_{2^{i-1}-1}$ можно положить равными

$$\begin{aligned} \frac{n}{4} - w_1(i) - w_3(i) - \dots - w_{2^{i-2}-3}(i), \\ \frac{n}{4} - w_{2^{i-2}+1}(i) - w_{2^{i-2}+3}(i) - \dots - w_{2^{i-1}-3}(i) \end{aligned}$$

соответственно, а элементы $w_{2k}(i)$ – равными $w_k(i-1) - w_{2k-1}(i)$.

Случай $i \in J$ мы уже рассмотрели (доказали справедливость неравенств (3)).

Итак, для каждого $i \geq 3$ и каждого $k \in \{1, 2, 3, \dots, 2^{i-1}\}$ мы построили интервалы $J_k(i)$, внутри которых некоторые из $w_k(i+1)$ выбираются произвольно, независимо от остальных, а другие выражаются через эти свободные элементы. Иными словами, мы построили множество $\mathcal{X}$, состоящее из векторов

$$\mathbf{w} = (w_1(3), \dots, w_4(3), w_1(4), \dots, w_8(4), \dots, w_1(v), \dots, w_{2^{v-1}}(v))$$

таких, что для каждой компоненты $w_k(i)$ вектора $\mathbf{w}$ справедливы неравенства (2). При этом для каждого вектора

$$\mathbf{u}(i) = (w_1(i+1), w_3(i+1), \dots, w_{2^{i-1}}(i+1))$$

выполнены все уравнения и неравенства системы (1).

Заметим, наконец, что справедливо равенство

$$\begin{aligned} \tilde{N}(G) = N(C_{n/2}^{n/4})^2 \sum \left(C_{n/4}^{u_1(3)} C_{n/4}^{u_2(3)} C_{n/4}^{u_3(3)} C_{n/4}^{u_4(3)} \right. \\ \left. \times \sum \left(\prod_{i=1}^8 C_{w_i(4)}^{u_i(4)} \right) \dots \sum \left(\prod_{i=1}^{2^v-1} C_{w_i(v)}^{u_i(v)} \right) \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Суммирование здесь ведутся по всем возможным значениям переменных.

2.3. Нижняя оценка. Обратимся к равенству (4). Из рассуждений, приведенных в предыдущем пункте следует, что справедлива оценка

$$\tilde{N}(G) \geq N(C_{n/2}^{n/4})^2 \sum_{\mathbf{w} \in \mathcal{X}} \left(C_{n/4}^{u_1(3)} C_{n/4}^{u_2(3)} C_{n/4}^{u_3(3)} C_{n/4}^{u_4(3)} \left(\prod_{i=1}^8 C_{w_i(4)}^{u_i(4)} \right) \dots \left(\prod_{i=1}^{2^v-1} C_{w_i(v)}^{u_i(v)} \right) \right),$$

где $u_k(i) = w_{2k-1}(i+1)$. Иными словами, суммирование ведется по построенным нами уменьшенным интервалам.

При достаточно больших n из формулы Стирлинга следует, что для некоторой константы $c > 0$

$$\left| \frac{C_{w_1(i)}^{u_1(i)} \cdots C_{w_{2^{i-1}}(i)}^{u_{2^{i-1}}(i)}}{F(u_k(i), k \in I(i))} - 1 \right| \leq \frac{c}{n}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} & F(u_k(i), k \in I(i)) \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2^{i-1}} \frac{w_1(i) \cdots w_{2^{i-1}}(i)}{u_1(i) \cdots u_{2^{i-1}}(i)(w_1(i) - u_1(i)) \cdots (w_{2^{i-1}}(i) - u_{2^{i-1}}(i))}} \\ & \quad \times \frac{1}{u_1(i)^{u_1(i)} \cdots u_{2^{i-1}}(i)^{u_{2^{i-1}}(i)}} \\ & \quad \times \frac{w_1(i)^{w_1(i)} \cdots w_{2^{i-1}}(i)^{w_{2^{i-1}}(i)}}{(w_1(i) - u_1(i))^{w_1(i) - u_1(i)} \cdots (w_{2^{i-1}}(i) - u_{2^{i-1}}(i))^{w_{2^{i-1}}(i) - u_{2^{i-1}}(i)}}. \end{aligned}$$

Ослабим эту оценку и, тем самым, приведем ее к более наглядному виду. Для этого докажем вспомогательное утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть m, n – произвольные натуральные числа, $x \leq n$, $y \leq m$ – целые неотрицательные числа. Тогда справедливо неравенство

$$\frac{n^n}{x^x(n-x)^{n-x}} \cdot \frac{m^m}{y^y(m-y)^{m-y}} \geq \frac{(m+n)^{m+n}}{(x+y)^{x+y}(m+n-(x+y))^{m+n-(x+y)}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 < \xi < 1$. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \xi \ln x + (1 - \xi) \ln(1 - x),$$

определенную на интервале $(0, 1)$. Тогда справедливо равенство

$$f'(x) = \frac{\xi - x}{x(1 - x)}.$$

Следовательно, эта функция имеет максимум в точке $x = \xi$, возрастает на $(0, \xi)$ и убывает на $(\xi, 1)$.

Положим

$$\alpha = \frac{x}{n}, \quad \beta = \frac{y}{m}, \quad \gamma = \frac{m}{n}.$$

Сравним числа

$$\left(\frac{1}{\alpha^\alpha(1-\alpha)^{1-\alpha}}\right) \left(\frac{1}{\beta^\beta(1-\beta)^{1-\beta}}\right)^\gamma \quad \text{и} \quad \left(\frac{1}{\sigma^\sigma(1-\sigma)^{1-\sigma}}\right)^{1+\gamma}, \quad \text{где} \quad \sigma = \frac{\alpha + \beta\gamma}{1 + \gamma}.$$

Для этого рассмотрим отношение этих чисел и возьмем от него логарифм. Получим

$$\begin{aligned} & -\alpha \ln \alpha - (1 - \alpha) \ln(1 - \alpha) - \gamma \beta \ln \beta - \gamma(1 - \beta) \ln(1 - \beta) \\ & \quad + (\alpha + \beta\gamma) \ln \sigma + (1 + \gamma - \beta\gamma - \alpha) \ln(1 - \sigma) \\ & = (\alpha \ln \sigma + (1 - \alpha) \ln(1 - \sigma)) - (\alpha \ln \alpha + (1 - \alpha) \ln(1 - \alpha)) \\ & \quad + \gamma((\beta \ln \sigma + (1 - \beta) \ln(1 - \sigma)) - ((\beta \ln \beta + (1 - \beta) \ln(1 - \beta)))) < 0 \end{aligned}$$

при $\sigma \neq \beta$. Если $\sigma = \beta$, то $\alpha = \beta$, и вместо неравенства будет равенство нулю.

Отсюда в силу определения чисел α , β , γ и полученных неравенств следует наше утверждение.

Рассмотрим для некоторого $i \in \{3, \dots, v\}$ сумму

$$\sum_{u_k(i) \in J_k(i), k \in I(i)} C_{w_1(i)}^{u_1(i)} \dots C_{w_{2^i-1}(i)}^{u_{2^i-1}(i)}.$$

Применим неравенство (5). Получим, что при достаточно больших n справедлива оценка

$$\left| \frac{\sum_{u_k(i) \in J_k(i), k \in I(i)} C_{w_1(i)}^{u_1(i)} \dots C_{w_{2^i-1}(i)}^{u_{2^i-1}(i)}}{\sum_{u_k(i) \in J_k(i), k \in I(i)} F(u_k(i), k \in I(i))} - 1 \right| \leq \frac{c}{n}.$$

Следовательно,

$$\sum_{u_k(i) \in J_k(i), k \in I(i)} C_{w_1(i)}^{u_1(i)} \dots C_{w_{2^i-1}(i)}^{u_{2^i-1}(i)} \sim \sum_{u_k(i) \in J_k(i), k \in I(i)} F(u_k(i), k \in I(i)).$$

С другой стороны, в силу утверждения 1 при достаточно больших n справедливы неравенства

$$\begin{aligned} & F(u_k(i), k \in I(i)) \\ & \geq \sqrt{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2^{i-1}} \prod_{k=1}^{2^{i-1}} \left(\frac{w_k(i)}{u_k(i)(w_k(i) - u_k(i))}\right)} \\ & \quad \times \prod_{k \in I(i)} \left(\frac{w_k(i)^{w_k(i)}}{u_k(i)^{u_k(i)}(w_k(i) - u_k(i))^{w_k(i) - u_k(i)}}\right) \\ & \quad \times \frac{1}{(n/2 - \sum_{k \in I(i)} u_k(i))^{(n/2 - \sum_{k \in I(i)} u_k(i))}} \\ & \quad \times \frac{(n - \sum_{k \in I(i)} w_k(i))^{(n - \sum_{k \in I(i)} w_k(i))}}{(n/2 + \sum_{k \in I(i)} (u_k(i) - w_k(i)))^{(n/2 + \sum_{k \in I(i)} (u_k(i) - w_k(i)))}} \\ & \geq \sqrt{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2^{i-1}} \prod_{k=1}^{2^{i-1}} \left(\frac{w_k(i)}{u_k(i)(w_k(i) - u_k(i))}\right)} \\ & \quad \times \prod_{k \in I(i) \setminus \{1\}} \left(\frac{w_k(i)^{w_k(i)}}{u_k(i)^{u_k(i)}(w_k(i) - u_k(i))^{w_k(i) - u_k(i)}}\right) \\ & \quad \times \frac{(n - \sum_{k \in I(i) \setminus \{1\}} w_k(i))^{(n - \sum_{k \in I(i) \setminus \{1\}} w_k(i))}}{\zeta(-1)\zeta(-1)\zeta(1)\zeta(1)}, \end{aligned}$$

где

$$\zeta(h) = \frac{n}{2} - \sum_{k \in I(i) \setminus \{1\}} \frac{w_k(i)}{2} + h \left(\sum_{k \in I(i) \setminus \{1\}} \left(\frac{w_k(i)}{2} - u_k \right) + w_1(i) - 2u_1(i) \right).$$

Следовательно, существует такая константа $c(i) > 0$, что при достаточно больших n выполнено неравенство

$$\begin{aligned} & \sum_{u_k(i) \in J_k(i), k \in I(i)} C_{w_1(i)}^{u_1(i)} \dots C_{w_{2^i-1}(i)}^{u_{2^i-1}(i)} \\ & \geq \sum_{u_k(i) \in I_k(i), k \in I(i)} c(i) n^{-(j(i)+1/2)} C_{(n-\sum_{k \in I(i) \setminus \{1\}} w_k(i))}^{(n/2-\sum_{k \in I(i) \setminus \{1\}} u_k(i)+w_1(i)-2u_1(i))} \prod_{k \in I(i) \setminus \{1\}} C_{w_k(i)}^{u_k(i)}. \end{aligned}$$

Заметим, что суммирование ведется по всем $u_k(i)$ при $k \in I(i)$ внутри интервалов $J_k(i)$. Поэтому если мы будем уменьшать длины интервалов, то неравенство только усилится. Следовательно, интервал для $u_1(i)$ мы можем оставить без изменений, а остальные уменьшить так, чтобы при всех значениях $u_k(i)$, $k > 1$, величина

$$\sum_{k \in I(i) \setminus \{1\}} u_k(i) + w_1(i) - 2u_1(i)$$

пробегала значения внутри некоторого интервала с центром в $\sum_{k \in I(i) \setminus \{1\}} (w_k(i)/2)$ длины $\Theta(n)$ (мы пишем $f(N) = \Theta(g(N))$, если существуют такие положительные числа c , C , N_0 , что для любого $N > N_0$ выполнено $c|g(N)| \leq |f(N)| \leq C|g(N)|$). Таким образом, в силу того, что для любого $0 < \gamma < 1/2$ справедливо соотношение

$$\sum_{k=0}^{[\gamma n]} C_n^k = o(2^n),$$

имеем

$$\sum_{u_k(i) \in J_k(i), k \in I(i)} C_{w_1(i)}^{u_1(i)} \dots C_{w_{2^i-1}(i)}^{u_{2^i-1}(i)} \geq \frac{c(i)}{2} n^{-(j(i)+1)/2} 2^n.$$

Вернемся к равенству (4). Подставим в него только что полученную оценку. Существует такая константа $\underline{c} > 0$, что

$$\begin{aligned} \tilde{N}(G) & \geq \underline{c} \left(\frac{2^n}{\sqrt{n}} \right)^{|J_0|+1} \left(\frac{2^n}{n} \right)^{|J_1|} \prod_{i \in J} \left(n^{-(j(i)+1)/2} 2^n \right) = \\ & = \underline{c} \left(\frac{2^n}{\sqrt{n}} \right)^{|J_0|+|J_1|+|J|+1} n^{-|J_1|/2} \prod_{i \in J} n^{-j(i)/2} = \underline{c} \left(\frac{2^n}{\sqrt{n}} \right)^v n^{-e/2}. \end{aligned}$$

2.4. Верхняя оценка. Вернемся к равенству (4). Так как у системы (1) свободных неизвестных $2^{i-1} - j(i) - 1$, то суммирование в этом равенстве ведется по индексам, отвечающим этим свободным переменным. Тогда для каждой суммы $\sum C_{w_1(i)}^{u_1(i)} \dots C_{w_{2^i-1}(i)}^{u_{2^i-1}(i)}$ существуют такие константы $C(i)$, $c(i)$, что справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \sum C_{w_1(i)}^{u_1(i)} \dots C_{w_{2^i-1}(i)}^{u_{2^i-1}(i)} & \leq C(i) \prod_{k \in \{1,2,3,\dots,2^{i-1}\} \setminus I(i)} \frac{2^{w_k(i)}}{\sqrt{n}} \sum \prod_{h \in I(i)} C_{w_h(i)}^{u_h(i)} \\ & \sim c(i) \frac{2^n}{n^{(j(i)+1)/2}}. \end{aligned}$$

Следовательно, существует такая константа $\bar{c} > 0$, что

$$\tilde{N}(G) \leq \bar{c} \left(\frac{2^n}{\sqrt{n}} \right)^v n^{-e/2}.$$

2.5. Пороговая вероятность. Рассмотрим случайный граф $G(G_N^{\text{dist}}, p)$. Пусть $X(G)$ – количество копий графа G в случайном графе $G(G_N^{\text{dist}}, p)$. Рассмотрим различные наборы по v вершин в графе G_N^{dist} . Поясним, в каком смысле мы будем понимать различие между наборами. Будем считать, что из одного набора перестановкой вершин можно получить столько различных наборов, сколько не изоморфных копий G можно построить на этих вершинах. Пусть $A = \{a_1, \dots, a_M\}$ – множество этих наборов. Здесь

$$M = \frac{N!}{(N-v)!a}.$$

Для каждого $i \in \{1, 2, \dots, M\}$ рассмотрим случайную величину ξ_i , равную 1, если индуцированный подграф на наборе a_i является копией графа G , и 0 – в противном случае. Определим множество индексов L тех наборов, которые входят в граф G_N^{dist} в виде копии G . Т.е. $i \in L$ тогда и только тогда, когда множество ребер подграфа в G_N^{dist} , индуцированного набором a_i , содержит в себе множество ребер G . Найдем математическое ожидание $E_{G_N^{\text{dist}}, p}(X(G))$. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} E_{G_N^{\text{dist}}, p}(X(G)) &= \sum_{i=1}^M P_{G_N^{\text{dist}}, p}(\xi_i = 1) \\ &= \sum_{i \in L} P_{G_N^{\text{dist}}, p}(\xi_i = 1) + \sum_{i \in \{1, 2, \dots, M\} \setminus L} P_{G_N^{\text{dist}}, p}(\xi_i = 1) \\ &= \sum_{i \in L} p^e = N(G)p^e. \end{aligned}$$

Если $E_{G_N^{\text{dist}}, p}X(G) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, то и случайная величина $X(G)$ стремится к 0 с асимптотической вероятностью 1, т.е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{G_N^{\text{dist}}, p}(X(G) = 0) = 1.$$

В силу найденной нами верхней оценки на $N(G)$ условие $E_{G_N^{\text{dist}}, p}X(G) \rightarrow 0$ выполнено при

$$p \ll \frac{\sqrt{\ln N}}{N^{v/e}}.$$

Пусть теперь

$$p \gg \frac{\sqrt{\ln N}}{N^{v/e}}.$$

Тогда в силу найденной нами нижней оценки

$$E_{G_N^{\text{dist}}, p}X(G) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty.$$

Для рассмотрения этого случая мы воспользуемся одним известным утверждением о сумме зависимых случайных величин.

Пусть задана некоторая последовательность вероятностных пространств $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Пусть $A_1(n), A_2(n), \dots, A_M(n) \in \mathcal{F}_n$ – некоторые события, $X_i(n)$ – индикатор события $A_i(n)$, $X(n) = X_1(n) + \dots + X_M(n)$. Будем писать $i \sim j$, если события A_i и A_j являются зависимыми. Положим

$$\Delta_n = \sum_{i \sim j} P_n(A_j | A_i).$$

Тогда справедливо следующее утверждение (см. [5]).

ТЕОРЕМА 3. *Если*

$$E_n(X(n)) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad \Delta = o(E_n(X(n))),$$

то

$$P_n(X(n) > 0) \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Кроме того, справедлива оценка $X(n) \sim E_n X(n)$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n((1 - \varepsilon)E_n X(n) \leq X(n) \leq (1 + \varepsilon)E_n X(n)) = 1.$$

Итак, рассмотрим величину

$$\Delta = \sum_{a_i \sim a_j} P_{G_N^{\text{dist}}, p}(\xi_j = 1 | \xi_i = 1).$$

Здесь знак $\sim$ означает, что в полном дистанционном графе у подграфов, индуцированных наборами a_i, a_j , есть общее ребро. Если это условие выполняется, то будем говорить, что наборы являются *смежными*. Для того, чтобы два набора были смежны, необходимо и достаточно, чтобы у них было хотя бы две общих вершины. Заметим, что для фиксированного набора a_i существует $O(N(G)^{v-m})$ наборов a_j , которые обладают общими с a_i m вершинами, т.е. $|a_i \cap a_j| = m$. При этом справедливо равенство

$$P_{G_N^{\text{dist}}, p}(\xi_j = 1 | \xi_i = 1) = p^{e(j, i)}.$$

Здесь $e(j, i)$ — это количество ребер, соединяющих между собой вершины из $a_j \setminus a_i$, и ребер, соединяющих вершины из $a_j \setminus a_i$ с вершинами из $a_i \cap a_j$. Так как граф G сбалансированный, то справедливо неравенство $e(j, i) \geq e(1 - m/v)$. Следовательно, справедливы равенства

$$\Delta = \sum_{m=2}^{v-1} O(N(G)^{v-m} p^{e(1-m/v)}) = o(N(G)p^e).$$

Поэтому в силу справедливости теоремы 3 вероятность

$$p_0 = \frac{\sqrt{\ln N}}{N^{v/e}}$$

является пороговой для свойства содержать копию графа G . Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Erdős, A. Rényi, "On the evolution of random graphs", *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, **5** (1960), 17–61.
- [2] В. Ф. Колчин, *Случайные графы*, Физматлит, М., 2004.
- [3] B. Bollobás, *Random Graphs*, Cambridge Stud. Adv. Math., **73**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
- [4] S. Janson, T. Łuczak, A. Ruciński, *Random Graphs*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., Wiley, New York, 2000.

- [5] Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, Бином. Лаборатория знаний, М., 2007.
- [6] K. Schürger, “Limit theorems for complete subgraphs of random graphs”, *Period. Math. Hungar.*, **10**:1 (1979), 47–53.
- [7] Z. Palka, “On the number of vertices of given degree in a random graph”, *J. Graph Theory*, **8**:1 (1984), 167–170.
- [8] A. D. Barbour, “Poisson convergence and random graphs”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **92**:2 (1982), 349–359.
- [9] S. Janson, T. Luczak, A. Ruciński, “An exponential bound for the probability of nonexistence of a specified subgraph in a random graph”, *Random Graphs '87* (Poznań, 1987), John Wiley & Sons, Chichester, 1987, 73–87.
- [10] М. Е. Жуковский, “Ослабленный закон “нуля или единицы” для случайных дистанционных графов”, *Вестн. РУДН*, **2**:1 (2010), 11–25.
- [11] М. Е. Жуковский, “Ослабленный закон нуля или единицы для случайных дистанционных графов”, *ДАН*, **430**:3 (2010), 314–317.
- [12] М. Е. Жуковский, “Ослабленный закон нуля или единицы для случайных дистанционных графов”, *ТВП*, **55**:2 (2010), 344–349.
- [13] К. А. Михайлов, А. М. Райгородский, “О числах Рамсея для полных дистанционных графов с вершинами в $\{0, 1\}^n$ ”, *Матем. сб.*, **200**:12 (2009), 63–80.
- [14] А. М. Райгородский, “Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств”, *УМН*, **56**:1 (2001), 107–146.
- [15] А. М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, МЦНМО, М., 2007.

М. Е. Жуковский

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: zhukmax@gmail.com

Поступило

16.02.2011