Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Н. Бибилов, Об устойчивости в гамильтоновых системах с двумя степенями свободы, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 2, 202–208

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9115>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 06:53:08

Об устойчивости в гамильтоновых системах с двумя степенями свободы

Ю. Н. Бибииков

Рассматривается вопрос об устойчивости положения равновесия в начале координат гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, невозмущенная часть которой описывает осцилляторы с восстанавливающей силой нечетного порядка, большего единицы.

Доказано, что если показатели степени восстанавливающей силы осцилляторов не равны между собой, то положение равновесия устойчиво по Ляпунову. При равенстве показателей положение равновесия условно устойчиво для траекторий, не принадлежащих некоторой поверхности уровня гамильтониана. Редукция системы на эту поверхность показывает, что положение равновесия устойчиво в случае общего положения.

Библиография: 7 названий.

DOI: 10.4213/mzm9115

1. Постановка задачи. Рассмотрим вещественно аналитическую гамильтонову систему с двумя степенями свободы в окрестности положения равновесия в начале координат.

Пусть гамильтониан имеет вид $H = H^0 + H^1$ с невозмущенной частью

$$H^0 = \frac{\lambda_1}{2m}(p_1^{2m} + mq_1^2) - \frac{\lambda_2}{2n}(p_2^{2n} + nq_2^2), \quad (1)$$

где $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, а $m > 1$, $n > 1$ – натуральные числа. Разложение возмущения H^1 по степеням p_1 , q_1 , p_2 , q_2 не содержит членов порядка ниже $2N + |k - \ell| + 1$, где N – наименьшее общее кратное чисел m и n , $N = m\ell = nk$, если, рассматривая переменную p_1 как величину ℓ -го измерения, а переменную p_2 – как величину k -го измерения, приписать переменным q_1 , q_2 измерение, равное N .

ЗАМЕЧАНИЕ. Такая задача возникает при исследовании консервативных возмущений пары осцилляторов

$$\ddot{p}_1 + \lambda_1^2 p_1^{2m-1} = 0 \quad \text{и} \quad \ddot{p}_2 + \lambda_2^2 p_2^{2n-1} = 0.$$

Отметим, что к виду (1) приводятся гамильтонианы, у которых коэффициентами при q_1^2 и q_2^2 являются произвольные положительные числа.

Случаи, когда хотя бы одно из чисел m или n равно 1, рассмотрены в работах Арнольда, Мозера (см. [1; добавление 8]) и Сокольского [2].

В работе доказаны следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Если $n \neq m$, то положение равновесия устойчиво по Ляпунову.*

ТЕОРЕМА 2. *Если $n = m$, то положение равновесия условно устойчиво для начальных данных, удовлетворяющих условию $H \neq 0$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. При $n = m$ устойчивость по Ляпунову положения равновесия по-видимому не имеет места. Доказать это можно было бы с помощью рассуждений из работы [3].

Исследование поверхности уровня $H = 0$ при $m = n$ будет проведено в последнем пункте работы.

2. Переменные “действие-угол”. Перейдем к переменным x, y, φ, ψ по формулам

$$\begin{aligned} p_1 &= ((m+1)x)^{1/(m+1)} C_m(\varphi), & q_1 &= ((m+1)x)^{m/(m+1)} S_m(\varphi), \\ p_2 &= ((n+1)y)^{1/(n+1)} C_n(\psi), & q_2 &= ((n+1)y)^{n/(n+1)} S_n(\psi), \end{aligned} \quad (2)$$

где $x \geq 0, y \geq 0$, а C_m, S_m, C_n, S_n – введенные Ляпуновым [4] функции, определяемые условиями

$$\begin{aligned} C'_m &= -S_m, & S'_m &= C_m^{2m-1}, & C'_n &= -S_n, & S'_n &= C_n^{2n-1}, \\ C_m(0) &= C_n(0) = 1, & S_m(0) &= S_n(0) = 0. \end{aligned}$$

Отметим, что $S_1 = \sin, C_1 = \cos$. Аналогом основного тригонометрического тождества являются тождества

$$C_m^{2m}(\varphi) + mS_m^2(\varphi) = 1, \quad C_n^{2n}(\psi) + nS_n^2(\psi) = 1.$$

Функции C_m, S_m и C_n, S_n периодичны с некоторыми периодами T_m и T_n соответственно.

Так как

$$dp_1 \wedge dq_1 = dx \wedge d\varphi \quad \text{и} \quad dp_2 \wedge dq_2 = dy \wedge d\psi,$$

то замена (2) является канонической. В результате получается гамильтониан $F = f(x, y) + f^*(x, y, \varphi, \psi)$, где

$$f = \frac{\lambda_1}{2m} ((m+1)x)^{2m/(m+1)} - \frac{\lambda_2}{2n} ((n+1)y)^{2n/(n+1)},$$

а f^* есть ряд по степеням $x^{1/(m+1)}, y^{1/(n+1)}$ с периодическими по φ, ψ коэффициентами, разложение которого не содержит членов порядка ниже $2N + |k - \ell| + 1$, если $x^{1/(m+1)}$ приписать ℓ -е измерение, а $y^{1/(n+1)} - k$ -е измерение.

Система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -f_{\varphi}^*, & \dot{y} &= -f_{\psi}^*, \\ \dot{\varphi} &= \lambda_1((m+1)x)^{(m-1)/(m+1)} + f_x^*, \\ \dot{\psi} &= -\lambda_2((n+1)y)^{(n-1)/(n+1)} + f_y^*.\end{aligned}\quad (3)$$

Устойчивость по отношению к исходным переменным $p_i, q_i, i = 1, 2$, эквивалентна устойчивости по отношению к переменным x, y .

3. Положения КАМ-теории. Доказательства будут проводиться методами КАМ-теории. Сформулируем положения этой теории в том виде [5], [6], который используется в дальнейшем.

Рассматривается гамильтонова или обратимая система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Z(z, \varphi, a), \\ \dot{\varphi} &= a + \Phi(z, \varphi, a),\end{aligned}\quad (4)$$

где z, φ – векторные переменные размерности ν ; Z, Φ – вещественно аналитические 2π -периодические по компонентам вектора φ при $\|z\| < \delta_0, \|\operatorname{Im} \varphi\| < r_0$ функции. Параметр a меняется в p_0 -окрестности множества

$$M = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\nu}) \mid |k_1\alpha_1 + \dots + k_{\nu}\alpha_{\nu}| > \gamma|k|^{-\tau}\}, \quad (5)$$

где $\gamma > \nu - 1, \tau > 0, k_i$ – целые числа, $|k| = |k_1| + \dots + |k_{\nu}| > 0, p_0 = \gamma\delta_0/2$. Пусть Z, Φ удовлетворяют неравенствам

$$\|Z\| < r_0^{\tau+1}\gamma\delta_0^2, \quad \|\Phi\| \leq r_0^{\tau+2}\gamma\delta_0.$$

Тогда существует функция $a_0(\alpha), \alpha \in M$, такая, что система (4) при $a = a_0(\alpha)$ имеет квазипериодические решения

$$z = g(\alpha t + \varphi_0, \alpha), \quad \varphi = \alpha t + \varphi_0 + h(\alpha t + \varphi_0, \alpha), \quad (6)$$

где φ_0 – произвольный постоянный вектор, α – вектор базисных частот. При этом

$$a_0(\alpha) = \alpha + \Gamma(\alpha), \quad (7)$$

где $\Gamma(\alpha)$ имеет тот же порядок малости, что и Φ .

Квазипериодические решения (6) заполняют ν -мерные торы фазового пространства системы (4).

ЗАМЕЧАНИЕ. Если период функций Z, Φ по компонентам φ отличен от 2π , то его следует нормализовать к 2π . При этом гамильтониан умножается на постоянную. Именно эта ситуация имеет место в настоящей работе. Постоянный множитель считаем инкорпорированным в постоянные λ_1 и λ_2 .

4. Доказательство теорем 1 и 2. Ограничимся рассмотрением случая $m \geq n$. Тогда $k \geq \ell$. Перейдем в системе (3) к переменным z_1, z_2 по формулам

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{m+1} (\varepsilon \rho \cos \Theta)^{N+\ell} \lambda_2^{(m+1)/(2m)} + \varepsilon^{N+k+1/2} \rho^{N+k} z_1, \\ y &= \frac{1}{n+1} (\varepsilon \rho \sin \Theta)^{N+k} \lambda_1^{(n+1)/(2n)} + \varepsilon^{N+k+1/2} \rho^{N+k} z_2, \end{aligned} \quad (8)$$

где ε – малый положительный параметр, $\rho > 0$, $|z_i| < 1$, $i = 1, 2$,

$$\delta < \Theta < \frac{\pi}{2} - \delta, \quad \delta > 0. \quad (9)$$

Рассмотрим кривую, задаваемую параметрически с параметром $t = \varepsilon \rho$ уравнениями

$$(m+1)x = (t \cos \delta)^{N+\ell} \lambda_2^{(m+1)/(2m)}, \quad (n+1)y = (t \sin \delta)^{N+k} \lambda_1^{(n+1)/(2n)}.$$

Абсцисса x_1 точки ее пересечения с кривой $f = c$ имеет вид $x_1 = x_0(1 + A(\delta))$, где x_0 – абсцисса точки кривой $f = c$ при $y = 0$, а $A(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Таким образом, если фазовая точка системы (3), выйдя из очень малой окрестности начала координат $x = y = 0$, станет, двигаясь по гиперповерхности $F = \text{const}$, удаляться от начала координат, она скоро попадет в область (9) с достаточно малым δ . Следовательно, вне области (9) при достаточно малых δ устойчивость соблюдается. Случай $\Theta = \pi/2 - \delta$ рассматривается аналогично.

В переменных (8) система (3) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= O(\varepsilon^{N-\ell+1/2}), \\ \dot{\varphi} &= \lambda_1 \lambda_2^{(m-1)/(2m)} (\varepsilon \rho \cos \Theta)^{N-\ell} + O(\varepsilon^{N+k-2\ell+1}), \\ \dot{\psi} &= -\lambda_1^{(n-1)/(2n)} \lambda_2 (\varepsilon \rho \sin \Theta)^{N-k} + O(\varepsilon^{N-\ell+1}). \end{aligned} \quad (10)$$

Так как $k \geq \ell$, то порядок малости функций, обозначенный символом Ландау O , превышает порядок малости первых слагаемых в уравнениях для $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$. Это позволяет применить КАМ-теорию.

Введем в систему (10) параметры

$$a_1 = \lambda_1 \lambda_2^{(m-1)/(2m)} (\varepsilon \rho \cos \Theta)^{N-\ell}, \quad a_2 = -\lambda_1^{(n-1)/(2n)} \lambda_2 (\varepsilon \rho \sin \Theta)^{N-k}.$$

Получим систему вида (4). Пусть числа $\alpha_1 = \varepsilon^{N-\ell} \beta_1$ и $\alpha_2 = \varepsilon^{N-k} \beta_2$ удовлетворяют неравенству

$$|k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2| > K \varepsilon^{N-\ell} (|k_1| + |k_2|)^{-2}, \quad (11)$$

где, как и ранее, k_1, k_2 – целые, $|k_1| + |k_2| \neq 0$, $K > 0$. Считаем, что β_1 изменяется в окрестности точки $\lambda_1 \lambda_2^{(m-1)/(2m)} (\rho \cos \Theta)^{N-\ell}$, а β_2 – в окрестности точки $-\lambda_1^{(n-1)/(2n)} \lambda_2 (\rho \sin \Theta)^{N-k}$.

Рассмотрим неравенство

$$|k_1 \Delta + k_2| > K \varepsilon^{k-\ell} (|k_1| + |k_2|)^{-2}, \quad (12)$$

равносильное (11) при фиксированном δ и при $0 < \text{const}_1 < \rho < \text{const}_2$, где $\Delta = \alpha_1/\alpha_2 = \varepsilon^{k-\ell}\beta_1/\beta_2$. Положим $K = \varepsilon^{0,1}$.

Числа Δ , удовлетворяющие неравенству (12) при указанном K , заполняют большую по мере часть любого отрезка длины порядка $\varepsilon^{k-\ell}$. Из (12) следует (11), причем γ в условии (5) имеет вид

$$\gamma = \varepsilon^{0,1+N-\ell}|\beta_2| > \varepsilon^{N-\ell+0.2}.$$

Следовательно, можно применить положения КАМ-теории из п. 3.

В силу (7) параметры ρ , Θ , удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{aligned} \lambda_1 \lambda_2^{(m-1)/(2m)} (\varepsilon \rho \cos \Theta)^{N-\ell} &= \alpha_1 + \Gamma_1(\alpha_1, \alpha_2, \varepsilon), \\ -\lambda_1^{(n-1)/(2n)} \lambda_2 (\varepsilon \rho \sin \Theta)^{N-k} &= \alpha_2 + \Gamma_2(\alpha_1, \alpha_2, \varepsilon), \end{aligned} \quad (13)$$

порождают инвариантные торы системы (10) (а значит, и системы (3)) с квазипериодическими решениями (6). Эти торы разделяют трехмерные поверхности уровня гамильтониана, тем самым, “запирая” движения между инвариантными торами.

Осталось доказать, что каждая поверхность уровня в некоторой окрестности начала координат (общей для всех поверхностей уровня) содержит инвариантные торы.

Подставляя (8) в гамильтониан F и сокращая на $\varepsilon^{N+k+1/2}\rho^{N+k}$, получим

$$F = \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2 \varepsilon^{N-k-1/2} \rho^{N-k} \left(\frac{1}{m} \cos^{2N} \Theta - \frac{1}{n} \sin^{2N} \Theta \right) + \dots$$

Из (13), учитывая, что $\alpha_1 = \Delta \alpha_2$, находим

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \left(\frac{(-\Delta)^{2m/(m-1)}}{m \lambda_1^{(m+1)/(m-1)}} (-\alpha_2)^{2m/(m-1)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{n \lambda_2^{(n+1)/(n-1)}} (-\alpha_2)^{2n/(n-1)} \right) \varepsilon^{-N-k-1/2} \rho^{-N-k} + \dots, \end{aligned}$$

где многоточием обозначены члены более высокого порядка малости по ε .

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\alpha_2} &= \left(-\frac{(-\Delta)^{2m/(m+1)}}{m-1} \left(-\frac{\alpha_2}{\lambda_1} \right)^{(m+1)/(m-1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n-1} \left(-\frac{\alpha_2}{\lambda_2} \right)^{(n+1)/(n-1)} \right) \varepsilon^{-N-k-1/2} \rho^{-N-k} + \dots \end{aligned}$$

Пусть сначала $m \neq n$. Сравнивая полученные выражения и учитывая, что

$$\frac{m+1}{m-1} + 1 = \frac{2m}{m-1}, \quad \frac{n+1}{n-1} + 1 = \frac{2n}{n-1}, \quad \frac{m-1}{n-1} \neq \frac{m}{n},$$

заключаем, что, если $F = 0$, то $(dF)/(d\alpha_2) \neq 0$ при достаточно малых ε . Следовательно, при фиксированном Δ гамильтониан F принимает при изменении α_2 (и соответствующем изменении α_1) все значения из некоторой окрестности нуля. Отсюда вытекает теорема 1.

Пусть теперь $m = n$. Тогда

$$f = \frac{df}{d\alpha_2} = 0, \quad \text{если} \quad \Delta = -\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{(n+1)/(2n)}.$$

В противном случае $F \neq 0$ и $(dF)/(d\alpha_2) \neq 0$. Поэтому существования инвариантных торов на поверхности уровня $F = 0$ (и только на ней) не гарантировано. Отсюда вытекает теорема 2.

5. Исследование поверхности $F = 0$. Проведем редукцию системы на поверхность $F = 0$. Разрешая уравнение $F(x, y, \varphi, \psi) = 0$ относительно y , получим $y = G(x, \varphi, \psi)$. В системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -F_\varphi, & \dot{y} &= -F_\psi, \\ \dot{\varphi} &= F_x, & \dot{\psi} &= F_y \end{aligned}$$

положим $y = G(x, \varphi, \psi)$. Так как $F(x, G, \varphi, \psi) = 0$, то $F_y G_\varphi + F_\varphi = 0$ и $F_x + F_y G_x = 0$. Следовательно,

$$\frac{dx}{d\psi} = -\frac{F_\varphi}{F_y} = G_\varphi, \quad \frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{F_x}{F_y} = -G_x.$$

Итак, на поверхности $F = 0$ движения описываются гамильтоновой системой с гамильтонианом $-G$ и с независимой переменной ψ . Это система с одной степенью свободы, но не автономная, а периодически зависящая от “времени” ψ . Такую систему можно исследовать стандартными методами КАМ-теории.

Из вида F следует, что

$$G = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{(m+1)/(2m)} x + g(x^{1/(m+1)}, \varphi, \psi),$$

где $g = O(x^{(m+2)/(m+1)})$. Гамильтониану $-G$ соответствует система

$$\frac{dx}{d\psi} = g_\varphi, \quad \frac{d\varphi}{d\psi} = -\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{(m+1)/(2m)} - g_x. \quad (14)$$

Если число $(\lambda_1/\lambda_2)^{(m+1)/(2m)}$ диофантово, т.е. существуют такие $\gamma > 0$ и $\tau > 1$, что

$$\left| k_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{(m+1)/(2m)} - k_2 \right| > \gamma k_1^{-\tau} \quad \text{при всех натуральных } k_1 \text{ и } k_2,$$

то канонической заменой переменных гамильтониан G можно привести к виду

$$E = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{(m+1)/(2m)} z + dz^{(m+2)/(m+1)} + O(z^{(m+3)/(m+1)}),$$

где d – среднее значение коэффициента g_1 функции g при $x^{(m+2)/(m+1)}$.

Если $d \neq 0$, то отображение Пуанкаре является закручивающим в смысле [7] и система (14) имеет в любой окрестности начала координат инвариантные двумерные торы [7], которые разделяют трехмерное фазовое пространство системы. Отсюда и из теоремы 2 вытекает

ТЕОРЕМА 3. Если число $(\lambda_1/\lambda_2)^{(n+1)/(2n)}$ диофантово и среднее значение коэффициента g_1 отлично от нуля, то положение равновесия системы с гамильтонианом $H(p_1, q_1, p_2, q_2)$ устойчиво по Ляпунову.

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1974.
- [2] А. Г. Сокольский, “Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансе первого порядка”, *ПММ*, **41**:1 (1977), 24–33.
- [3] А. Д. Брюно, “Об устойчивости в системе Гамильтона”, *Матем. заметки*, **40**:3 (1986), 385–392.
- [4] А. М. Ляпунов, “Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения”, *Собрание сочинений*, Т. 2, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1956, 272–331.
- [5] Ю. К. Мозер, “О разложении условно-периодических движений в сходящиеся степенные ряды”, *УМН*, **24**:2 (1969), 165–211.
- [6] Ю. Н. Бибииков, *Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации*, Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1991.
- [7] J. K. Moser, *Lectures on Hamiltonian Systems*, Mem. Amer. Math. Soc., **81**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.

Ю. Н. Бибииков

Санкт-Петербургский государственный университет

E-mail: bibicoff@yandex.ru

Поступило

17.01.2013

Исправленный вариант

03.02.2013