Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Шафаревич, Асимптотические решения уравнений Навье–Стокса, описывающие сглаженные тангенциальные разрывы, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 6, 938–949

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm912>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 09:44:24

УДК 517.958

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА, ОПИСЫВАЮЩИЕ СГЛАЖЕННЫЕ ТАНГЕНЦИАЛЬНЫЕ РАЗРЫВЫ

А. И. Шафаревич

Изучаются асимптотические решения уравнений Навье–Стокса с малой вязкостью, слабый предел которых терпит разрыв первого рода на двумерной поверхности. Получены и исследованы уравнения, описывающие старший член асимптотики и поправки к нему. Описана рекуррентная процедура построения формального асимптотического ряда, удовлетворяющего соответствующей задаче Коши.

Библиография: 14 названий.

1. Постановка задачи. Хорошо известно (см., например, [1]–[3]), что уравнения гидродинамики идеальной жидкости (т.е. жидкости с нулевой вязкостью) или идеального газа допускают решения, терпящие разрыв первого рода при переходе через некоторую поверхность (фронт разрывного решения). Если жидкость сжимаемая, то такие решения могут быть двух типов: ударные волны и тангенциальные разрывы. В ударной волне разрыв терпят плотность и нормальная к поверхности компонента поля скоростей (касательные компоненты остаются непрерывными), а при тангенциальном разрыве – касательные компоненты этого поля (давление и нормальная компонента поля скоростей при этом обязаны быть непрерывными). При переходе к несжимаемой жидкости ударные волны пропадают, уравнения Эйлера в этом случае допускают только тангенциальные разрывы решений. При учете малой вязкости такие решения перестают быть разрывными: вблизи поверхности (фронта) образуется узкий слой, в котором поле скоростей меняется быстро, “склеивая” между собой гладкие векторные поля по разные стороны от фронта. Описанию решений указанного вида системы Навье–Стокса и посвящена настоящая работа. Именно, ниже строится формальное асимптотическое решение системы Навье–Стокса с малой вязкостью, описывающее сглаженный тангенциальный разрыв. Структура этого решения оказывается следующей. Поле скоростей жидкости по обе стороны от фронта сглаженного разрыва вместе с функцией, задающей сам фронт, удовлетворяет задаче гидродинамики идеальной жидкости со свободной границей. Профиль сглаженного разрыва вблизи фронта удовлетворяет системе уравнений в частных производных, заданных по части переменных на трехмерном многообразии, получающемся объединением поверхностей разрыва в разные моменты времени. Эта система оказывается похожей на уравнения Прандтля теории пограничного слоя; однако она содержит дополнительные слагаемые, связанные с кривизнами поверхности разрыва и ее движением.

Асимптотическим решениям нелинейных уравнений в частных производных, описывающим сглаженные разрывы и уединенные волны, посвящено много работ разных авторов (см., например, [4]–[7] и цитированную там литературу; насколько мне известно, наиболее полно современное состояние этой области отражено в готовящейся к печати книге В. П. Маслова и Г. А. Омелянова “The germ method for obtaining asymptotic solutions of nonlinear PDE’s”). В частности, в [4]–[6] были развиты методы, основанные на соединении метода Уизема и комплексного метода ВКБ и позволяющие строить решения типа сглаженных разрывов для широкого класса уравнений. Эти методы применялись к описанию ударных волн в сжимаемой жидкости или газе с учетом изменения температуры и магнитного поля. В указанных ситуациях профиль сглаженного разрыва находится из “эталонного” обыкновенного дифференциального уравнения, возникающего в старшем приближении теории возмущений, а медленное изменение (модуляция) параметров этого профиля – из условий разрешимости уравнений для поправки, которых также имеется конечное число.

Асимптотические решения, описывающие (сглаженные) тангенциальные разрывы, по-видимому, практически не изучались; в то же время, с точки зрения указанных выше методов задачи описания таких разрывов имеют ряд особенностей. Главная из них – “асимптотическая бесконечномерность”: уравнения, возникающие в старшем порядке теории возмущений, обладают решениями, зависящими от бесконечного числа параметров (другими словами, от произвольных функций). Вследствие этого условий разрешимости уравнений для поправки также бесконечно много, и именно они определяют профиль разрыва (таким образом, этот профиль находится не из обыкновенных дифференциальных уравнений, как в случае ударных волн, а из уравнений в частных производных). Асимптотики с аналогичными свойствами, описывающие “периодические когерентные пульсации”, а также пограничные слои, изучались в работах [8]–[11]; ниже техника этих работ, а также работ [4]–[6] используется при описании движущихся сглаженных тангенциальных разрывов.

Поле скоростей $u(x, t)$ несжимаемой жидкости удовлетворяет нестационарным уравнениям Навье–Стокса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u, \nabla)u + \nabla \mathcal{P} = \varepsilon^2 \nu \Delta u, \quad (\nabla, u) = 0. \quad (1)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^3$, u – трехмерное векторное поле, $\mathcal{P}$ – скалярная функция (давление), $\varepsilon^2 \nu$ – коэффициент вязкости (через ε обозначен малый параметр, характеризующий ее величину). Рассмотрим для уравнений (1) задачу Коши

$$u|_{t=0} = u_0 \left(\frac{\hat{S}(x)}{\varepsilon}, x \right), \quad (2)$$

где начальное поле u_0 описывает сглаженный тангенциальный разрыв с компактным фронтом. Это означает, что мы предполагаем следующие свойства векторного поля u_0 : гладкая ограниченная со всеми производными функция $\hat{S}(x)$ обращается в нуль на гладкой компактной поверхности $M \subset \mathbb{R}^3$, причем $|\nabla \hat{S}| \geq \text{const} > 0$ для любого $x \in \mathbb{R}^3$. Для определенности считаем, что $\hat{S} < 0$ внутри M ; без ограничения общности можно также считать, что в окрестности этой поверхности функция $\hat{S}$ равна (с соответствующим знаком) расстоянию до нее по нормали.

Пусть функция $u_0(z, x)$ принадлежит пространству Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ по переменным x равномерно по z , а при стремлении переменной z к $\pm\infty$ равномерно по x стремится к гладким пределам $V_0^\pm(x)$ быстрее любой степени z , причем все ее производные по z стремятся (также быстрее любой степени) к нулю. Предполагается, кроме того, что все производные функции u_0 по переменным x обладают аналогичными свойствами.

Наконец, поле u_0 должно быть бездивергентным; для этого, очевидно, достаточно выполнения равенств $(\nabla \hat{S}, u_0(z, x)) = 0$, $(\nabla, u_0(z, x)) = 0$ для всех $\{z, x\} \in \mathbb{R}^4$, которые мы и будем для определенности предполагать выполненными (здесь во втором равенстве градиент вычисляется по переменным x при фиксированном z).

Отметим, что поле u_0 можно представить в виде $u_0 = \chi(z)V_0^+(x) + (1 - \chi(z))V_0^-(x) + \hat{u}_0(z, x)$, где $\chi(z) = (1 + \text{th } z)/2$, а $\hat{u}_0 \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$ быстрее любой степени $|z|$. Вводя в окрестности поверхности M координаты $\hat{S}, \xi$ (ξ – локальные координаты на M), заменяя в аргументе x поля $\hat{u}_0$ на εz и разлагая это поле по формуле Тейлора при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим для u_0 представление

$$u_0(z) = \chi(z)V_0^+(x) + (1 - \chi(z))V_0^-(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \hat{v}_j(z, x) + O(\varepsilon^\infty), \quad (3)$$

где поля $\hat{v}_j(z, x)$ в окрестности поверхности M не зависят от расстояния до нее по нормали, в точках M касаются ее, а ряд понимается как асимптотический.

Асимптотическое при $\varepsilon \rightarrow 0$ решение задачи Коши (1), (2) будем искать в виде

$$\begin{aligned} u(x, t, \varepsilon) &= U\left(\frac{S(x, t)}{\varepsilon}, x, t\right) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j U_j\left(\frac{S(x, t)}{\varepsilon}, x, t\right), \\ \mathcal{P}(x, t, \varepsilon) &= \pi_0\left(\frac{S(x, t)}{\varepsilon}, x, t\right) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \pi_j\left(\frac{S(x, t)}{\varepsilon}, x, t\right), \end{aligned} \quad (4)$$

где векторные поля $U(z, x, t)$, $U_j(z, x, t)$ и функции $S(x, t)$, $\pi_j(z, x, t)$ гладко зависят от всех своих аргументов, причем

$$U(z, x, t) \rightarrow V^\pm(x, t), \quad U_j(z, x, t) \rightarrow V_j^\pm(x, t), \quad \pi_j(z, x, t) \rightarrow P_j^\pm(x, t)$$

при $z \rightarrow \pm\infty$, а все производные по z от U, U_j, π_j стремятся к нулю при $|z| \rightarrow \infty$ быстрее любой степени $|z|$. Кроме того, предполагается, что приведенные асимптотики можно дифференцировать по x, t сколько угодно раз. Ясно, что решение с такими свойствами представляет собой сглаженный разрыв – слабый предел написанных функций при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет разрыв первого рода на поверхности M_t , задаваемой уравнением $S(x, t) = 0$. При $\varepsilon > 0$ функции (4) гладкие, но их производные в точках поверхности M_t , вообще говоря, неограниченно возрастают при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Далее будем считать, что в некоторой (не зависящей от ε) окрестности поверхности M_t функция $|S(x, t)|$ равна расстоянию до нее по нормали (этого всегда можно добиться путем переразложений в формулах (4); см., например, [4]).

2. Задача со свободной границей для старшей части внешних потоков.

Подставим (4) в систему (1) и уничтожим возникающие при этом слагаемые порядка ε^{-1} . Получим

$$\left[\frac{\partial S}{\partial t} + (U, \nabla S) \right] \frac{\partial U}{\partial z} + \nabla S \frac{\partial \pi_0}{\partial z} = O(\varepsilon), \quad \left(\frac{\partial U}{\partial z}, \nabla S \right) = O(\varepsilon). \quad (5)$$

Все слагаемые в полученных равенствах убывают при $|z| \rightarrow \infty$ быстрее любой степени $|z|$, поэтому все входящие в эти равенства функции можно $\text{mod } O(\varepsilon)$ ограничить на поверхность M_t : $S(x, t) = 0$ (ср. с [4]). В результате получим

$$\left[\frac{\partial S}{\partial t} + (U, \nabla S) \right] \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{M_t} + \nabla S \frac{\partial \pi_0}{\partial z} \Big|_{M_t} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} (U, \nabla S) \Big|_{M_t} = 0. \quad (6)$$

Умножая первое равенство скалярно на $\nabla S|_{M_t}$ и используя второе равенство, получим $\partial \pi_0 / \partial z|_{M_t} = 0$, после чего из (6) находим $\partial S / \partial t + (U, \nabla S) = 0$ при $\{x, t\} \in M_t$.

Перейдем теперь к уничтожению слагаемых порядка ε^0 , возникающих при подстановке (4) в (1). Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + (U, \nabla)U + \nabla \pi_0 + \nabla S \frac{\partial \pi_1}{\partial z} + \left[\frac{\partial S}{\partial t} + (U, \nabla S) \right] \frac{\partial U_1}{\partial z} + (U_1, \nabla S) \frac{\partial U}{\partial z} \\ + z(\nabla S, \nabla) \left(\left[\frac{\partial S}{\partial t} + (U, \nabla S) \right] \frac{\partial U}{\partial z} + \nabla S \frac{\partial \pi_0}{\partial z} \right) \Big|_{M_t} - \nu_0 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (7)$$

$$(\nabla, U) + z(\nabla S, \nabla) \left(\frac{\partial U}{\partial z}, \nabla S \right) \Big|_{M_t} + \left(\frac{\partial U_1}{\partial z}, \nabla S \right) = O(\varepsilon). \quad (8)$$

Здесь учтены слагаемые порядка ε , содержащиеся в левых частях равенств (5); они возникают после подстановки в аргументы всех функций $S = \varepsilon z$ и последующего тейлоровского разложения при $\varepsilon \rightarrow 0$ (т.е., фактически, разложения по расстоянию от M_t). Устремим в (7), (8) z к $\pm\infty$ (т.е. рассмотрим эти равенства вне любой не зависящей от ε окрестности поверхности M_t); в результате получим уравнения Эйлера для векторных полей $V^\pm$:

$$\frac{\partial V^\pm}{\partial t} + (V^\pm, \nabla)V^\pm + \nabla P_0^\pm = 0, \quad (\nabla, V^\pm) = 0. \quad (9)$$

Эти уравнения должны выполняться в областях $\Omega^\pm$, на которые поверхность M_t делит трехмерное пространство. Кроме того, из формул (6) следуют дополнительные условия на поверхности раздела M_t :

$$(V^+, \nabla S) = (V^-, \nabla S), \quad P_0^+ = P_0^-, \quad \frac{\partial S}{\partial t} + (V^\pm, \nabla S) = 0 \quad (10)$$

при $\{x, t\} \in M_t$. Конечно, равенства (9), (10) должны быть дополнены начальными условиями

$$V^\pm|_{t=0} = V_0^\pm. \quad (11)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть асимптотический ряд (4) удовлетворяет $\text{mod } O(\varepsilon)$ задаче Коши (1), (2). Тогда функция $S(x, t)$, векторные поля $V^\pm$ и функции $P_0^\pm$ в областях $\Omega_t^\pm$ удовлетворяют задаче (9)–(11).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Полученная система уравнений и краевых условий в точности совпадает с известной задачей гидродинамики идеальной жидкости со свободной границей (см., например, [12]); соотношения (10) суть равенства давлений и нормальных компонент поля скоростей по обе стороны границы раздела M_t , дополненные кинематическим условием, означающим, что скорость $-\partial S/\partial t$ точки поверхности по направлению нормали к ней совпадает с нормальной компонентой поля скоростей в этой точке.

3. Обобщенные уравнения Прандтля на движущейся поверхности M_t . Построение старшего члена асимптотического решения. Вернемся теперь к равенствам (7), (8). Заметим, что, в силу (9) левые части этих равенств убывают при $|z| \rightarrow \infty$ быстрее любой степени $|z|$. Поэтому $\text{mod } O(\varepsilon)$ их можно ограничить на поверхность M_t ; учитывая (10), приходим к уравнениям

$$\left[\frac{\partial U}{\partial t} + (U, \nabla)U + \nabla \pi_0 \right] \Big|_{M_t} + \nabla S \frac{\partial \pi_1}{\partial z} \Big|_{M_t} + (U_1, \nabla S) \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{M_t} + z(\nabla S, \nabla) \left(\left[\frac{\partial S}{\partial t} + (U, \nabla S) \right] \frac{\partial U}{\partial z} + \nabla S \frac{\partial \pi_0}{\partial z} \right) \Big|_{M_t} - \nu_0 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \Big|_{M_t} = 0, \quad (12)$$

$$(\nabla, U)|_{M_t} + z(\nabla S, \nabla) \left(\frac{\partial U}{\partial z}, \nabla S \right) \Big|_{M_t} + \left(\frac{\partial U_1}{\partial z}, \nabla S \right) \Big|_{M_t} = 0. \quad (13)$$

Из равенств (12), (13) выводятся уравнения для касательных к M_t компонент поля U . Именно, спроектируем (12) на касательную плоскость к поверхности M_t . Получим

$$\Pi \left(\left[\frac{\partial U}{\partial t} + (U, \nabla)U + \nabla \pi_0 \right] \Big|_{M_t} \right) + (U_1, \nabla S)|_{M_t} \frac{\partial}{\partial z} \Pi(U|_{M_t}) + z \Pi \left((\nabla S, \nabla) \left(\left[\frac{\partial S}{\partial t} + (U, \nabla S) \right] \frac{\partial U}{\partial z} + \nabla S \frac{\partial \pi_0}{\partial z} \right) \Big|_{M_t} \right) = \nu_0 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Pi(U|_{M_t}), \quad (14)$$

где Π – ортогональный проектор на касательную плоскость к M_t . Рассмотрим на этой поверхности векторное поле $v = \Pi(U|_{M_t})$. Обозначим через ρ трехмерное многообразие в четырехмерном пространстве с координатами x, t , полученное объединением по всем $t \in (-\delta, T + \delta)$, $\delta > 0$, поверхностей M_t . Это многообразие естественно представлять себе как (тривиальное) расслоение над интервалом $(-\delta, T + \delta)$, слоем которого над точкой t является поверхность M_t . Поле v , очевидно, – вертикальное векторное поле в пространстве этого расслоения. Обозначим через ∂_t касательную к многообразию расслоения компоненту вектора $\partial/\partial t$. Очевидно, это векторное поле имеет вид $\partial_t = \partial/\partial t + (U, \nabla S)\nabla S|_{M_t}$.

ТЕОРЕМА 1. Уравнения (14), (13) эквивалентны системе уравнений

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\partial_t} v - 2V_n \mathfrak{B}v + \widehat{\nabla}_v v + a \frac{\partial v}{\partial z} = -\widehat{\nabla} P + \nu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial a}{\partial z} + (\widehat{\nabla}, v) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Здесь $\mathfrak{L}_{\partial_t} v = \{\partial_t, v\}$ – производная Ли вертикального поля v вдоль вектора ∂_t в расслоении ρ , $\hat{\nabla}$ – ковариантный градиент в индуцированной из $\mathbb{R}^3$ метрике на поверхности M_t , $\mathfrak{B}$ – оператор второй квадратичной формы на M_t (т.е. линейный оператор в касательных плоскостях, собственные векторы которого – главные направления, а собственные числа – главные кривизны), функции V_n , P и a имеют вид

$$P = \pi_0|_{M_t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 \Big|_{M_t} = P_0^\pm|_{M_t} + \frac{1}{2} V_n^2|_{M_t},$$

$$a = z(\nabla S, \nabla)(U, \nabla S)|_{M_t} + (U_1, \nabla S)|_{M_t}, \quad V_n = (U, \nabla S)|_{M_t}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Функция P не зависит от z ; она имеет смысл давления, индуцированного на поверхности M_t внешним давлением $P_0^\pm$ и движением самой поверхности.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Уравнения (15) похожи на уравнения Прандтля в нестационарной задаче о пограничном слое (см., например, [2], [13], [14]); последние имеют вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v, \nabla)v + a \frac{\partial v}{\partial z} = -\nabla P + \nu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (\nabla, v) + \frac{\partial a}{\partial z} = 0.$$

Здесь z – “растянутая” переменная по нормали к обтекаемой жидкостью твердой плоскости, ∇ – градиент по координатам на этой плоскости, P – давление внешнего потока жидкости в точках плоскости. Уравнения (15) получаются из уравнений Прандтля заменой производных вдоль плоскости на ковариантные производные на поверхности, а частной производной по времени – на производную Ли вдоль поля ∂_t . Кроме того, в давление добавляется слагаемое $V_n^2/2$, индуцированное (по закону Бернулли) движением поверхности. Наконец, в (15) содержится дополнительное слагаемое $2V_n \mathfrak{B}v$, зависящее от кривизн поверхности M_t . Оно описывает влияние искривления поверхности на величину и направление поля v – профиля сглаженного тангенциального разрыва.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Выберем произвольную тривиализацию расслоения ρ . Именно, будем параметризовать точки этого многообразия координатами y, t , где y – (локальные) координаты на начальной поверхности M . Пусть параметрические уравнения поверхности M_t в этих координатах имеют вид $x = R(y, t)$; введем в четырехмерной окрестности пространства расслоения $\rho \subset \mathbb{R}^4$ координаты S, y, τ , они связаны с координатами x, t формулами $x = R(y, \tau) + S n(y, \tau)$, $t = \tau$, где $n(y, \tau) = \nabla S(R(y, \tau), \tau)$ – единичная нормаль к M_t . Разложим вектор $U(z, x, t)$ по базису, порожденному этими координатами: $U = U^j(z, y, S, \tau) \partial/\partial y^j + (U, \nabla S) \partial/\partial S$. Здесь и далее при доказательстве теоремы по повторяющимся индексам предполагается суммирование. Разложим, далее, вектор $\partial/\partial t$ на касательную и нормальную к пространству расслоения ρ компоненты:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \lambda^j \frac{\partial}{\partial y^j} + \frac{\partial S}{\partial t} \frac{\partial}{\partial S} = \partial_t + \frac{\partial S}{\partial t} \frac{\partial}{\partial S},$$

подставим эти разложения в (14) и вычислим входящее туда слагаемое $\Pi(\partial U/\partial t|_{M_t})$. Учитывая равенства (10), получим

$$\begin{aligned} \Pi \left(\frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{M_t} \right) &= \left[\mathfrak{L}_{\partial_t} U^j \frac{\partial}{\partial y^j} + \frac{\partial S}{\partial t} \frac{\partial U^j}{\partial S} \frac{\partial}{\partial y^j} - (U, \nabla S) \frac{\partial \lambda^j}{\partial S} \frac{\partial}{\partial y^j} \right] \Big|_{M_t} \\ &= \mathfrak{L}_{\partial_t} v - V_n \left[\frac{\partial U^j}{\partial S} \Big|_{M_t} + \frac{\partial \lambda^j}{\partial S} \Big|_{M_t} \right] \frac{\partial}{\partial y^j}. \end{aligned} \quad (16)$$

Рассмотрим теперь выражение $\Pi((U, \nabla)U)|_{M_t}$. Разлагая U на касательную и нормальную к M_t компоненты, получаем

$$(U, \nabla)U = \left(U^j \frac{\partial}{\partial y^j}, \nabla\right) U^j \frac{\partial}{\partial y^j} + (U, \nabla S)(n, \nabla)U + U^j \left(\frac{\partial}{\partial y^j}, \nabla\right) ((U, \nabla S)n).$$

После ограничения на поверхность M_t и последующего проектирования на касательную плоскость к ней первое слагаемое, очевидно, превратится в $\widehat{\nabla}_v v$. Для вычисления остальных слагаемых удобно воспользоваться разложением вектора U по базису R_1, R_2, n , где $R_j = \partial R / \partial y^j$: $U = \widehat{U}^j R_j + (U, \nabla S)n$. После ограничения на M_t , проектирования и несложных выкладок получим равенство

$$\Pi((U, \nabla)U|_{M_t}) = \widehat{\nabla}_v v + V_n \left(\frac{\partial \widehat{U}^j}{\partial S} \Big|_{M_t} + v^j \frac{\partial n}{\partial y^j} \right). \quad (17)$$

Напомним, что переход от базиса R_1, R_2 к базису $n_1, n_2, n_j = \partial n / \partial y^j$ на касательной плоскости к поверхности осуществляется при помощи оператора второй квадратичной формы; если β_j^i — его матрица в базисе R_1, R_2 , то $\partial n / \partial y^j = -\beta_j^k R_k$. Поэтому для последнего слагаемого в (17) получаем $v^j \partial n / \partial y^j = -\mathfrak{B}v$. Далее, связь между коэффициентами U^j и $\widehat{U}^j$ разложения вектора U имеет вид $\widehat{U}^j = U^j - S \beta_k^j U^k$. Подставляя эти формулы в равенства (17), находим после элементарных преобразований

$$\Pi((U, \nabla)U|_{M_t}) = \widehat{\nabla}_v v + V_n \frac{\partial U^j}{\partial S} \Big|_{M_t} \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{M_t} - 2V_n \mathfrak{B}v. \quad (18)$$

Складывая (18) и (16), получаем

$$\Pi \left(\left[\frac{\partial U}{\partial t} + (U, \nabla)U \right] \Big|_{M_t} \right) = \mathfrak{L}_{\partial_t} v + \widehat{\nabla}_v v - 2V_n \mathfrak{B}v - V_n \frac{\partial \lambda^j}{\partial S} \Big|_{M_t} R_j. \quad (19)$$

Вычислим теперь входящие в последнюю формулу выражения $\partial \lambda^j / \partial S$. Элементарные вычисления дают

$$\Pi \left(\frac{\partial R}{\partial \tau} \right) = \lambda^j|_{S=0} R_j, \quad \frac{\partial n}{\partial \tau} = \frac{\partial \lambda^j}{\partial S} \Big|_{S=0} R_j + \lambda^j|_{S=0} \frac{\partial n}{\partial y^j}. \quad (20)$$

Дифференцируя по τ вектор $n(y, \tau) = \nabla S(R(y, \tau), \tau)$, получим $\partial n / \partial \tau = \nabla(\partial S / \partial t)|_{M_t} + (\partial^2 S / \partial x^2) \partial R / \partial \tau|_{M_t}$, где $\partial^2 S / \partial x^2$ — матрица вторых производных функции $S(x, t)$. Подставляя в последние равенства формулы (20), получаем равенство

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = \Pi \left(\nabla \left(\frac{\partial S}{\partial t} \Big|_{M_t} \right) \right) + \lambda^j(0) \Pi \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} R_j \right).$$

Наконец, отметим, что матрица вторых производных функции S определяет оператор второй квадратичной формы: $\partial^2 S / \partial x^2 R_j = -\beta_j^k R_k$. Подставляя это равенство в предыдущее, а затем результат в (20), находим $\partial \lambda^j / \partial S|_{S=0} R_j = \Pi(\nabla(\partial S / \partial t)|_{M_t})$. Подставляя эту формулу в (19), получаем окончательное выражение для $\Pi(\partial U / \partial t + (U, \nabla)U)|_{M_t}$:

$$\begin{aligned} \Pi \left(\left[\frac{\partial U}{\partial t} + (U, \nabla)U \right] \Big|_{M_t} \right) &= \mathfrak{L}_{\partial_t} v + \widehat{\nabla}_v v - 2V_n \mathfrak{B}v - V_n \Pi \left(\nabla \left(\frac{\partial S}{\partial t} \Big|_{M_t} \right) \right) \\ &= \mathfrak{L}_{\partial_t} v + \widehat{\nabla}_v v - 2V_n \mathfrak{B}v + \widehat{\nabla} \frac{(U, \nabla S)^2}{2} \Big|_{M_t}. \end{aligned}$$

Теперь для доказательства первого равенства в (15) осталось заметить, что $\Pi(\nabla\pi_0|_{M_t}) = \widehat{\nabla}P_0^\pm|_{M_t}$ и $(\nabla S, \nabla)\partial S/\partial t = 0$. Рассмотрим теперь равенство (13). Учитывая, что $(\nabla, U)|_{M_t} = (\widehat{\nabla}, v) + (\nabla S, \nabla)(U, \nabla S)|_{M_t}$, после элементарной выкладки получим из него второе равенство в (15). Теорема доказана.

Дополним уравнения (15) начальными условиями и условиями на бесконечности

$$v|_{t=0} = u_0(z, x)|_M, \quad v(z) \rightarrow \Pi(V^\pm(x, t)|_{M_t}) \quad \text{при } z \rightarrow \pm\infty; \quad (21)$$

отметим, что начальные условия согласованы с условиями на бесконечности. Для того чтобы получающаяся система была замкнута, к этим условиям надо добавить еще одно условие на бесконечности по переменной z на функцию a (см., например, [14]). Из определения этой функции с учетом бездивергентности поля V^- следует, что она должна вести себя следующим образом:

$$a = -z(\widehat{\nabla}, \Pi(V^-|_{M_t})) + (V_1^-, \nabla S)|_{M_t} + o(1) \quad \text{при } z \rightarrow -\infty. \quad (22)$$

Таким образом, задание асимптотики функции a при $z \rightarrow -\infty$ эквивалентно заданию функции $(V_1^-, \nabla S)|_{M_t}$; тем самым, уравнения для векторного поля v , определяющего старший член асимптотического решения (4), оказываются “зацепленными” (через условие (22)) с уравнениями для поправок V_1 .

Оказывается, однако, что это зацепление не влияет на “форму” сглаженного тангенциального разрыва, а сказывается лишь на малой поправке к положению поверхности M_t (ср. с [8]–[11]). Именно, следующее утверждение проверяется непосредственной элементарной выкладкой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (ср. с [8], [9]). *Уравнения (15) инвариантны относительно преобразования $v(z, x, t) = v_0(z + c(x, t), x, t)$, $a = a_0 - v_0(c) - \partial_t(c)$.*

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть $v_0(z, x, t)$, $a_0(z, x, t)$ – решение системы (15), удовлетворяющее условиям (21) и условию*

$$a_0 + z(\widehat{\nabla}, \Pi(V^-|_{M_t})) \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow -\infty. \quad (23)$$

Пусть, кроме того, скалярная функция c на поверхности M_t удовлетворяет уравнению

$$\partial_t(c) + \Pi(V^-|_{M_t})(c) + (V_1^-, \nabla S)|_{M_t} = 0, \quad c|_{t=0} = 0. \quad (24)$$

Тогда векторное поле $v = v_0(z + c)$ и функция $a = a_0 - v_0(c) - \partial_t(c)$ удовлетворяют уравнениям (15) и дополнительным условиям (21), (22).

Отметим, что уравнения (15) вместе с условиями (21), (23) образуют замкнутую систему для определения v_0 , a_0 (см., например, [14]), никак не связанную с уравнениями для младших членов асимптотики (4). Все влияние поправок сказывается, таким образом, на “фазовом сдвиге” $c(x, t)$, который естественно трактовать как малую (порядка ε) поправку к функции $S(x, t)$, учет которой приводит к малому изменению положения фронта M_t тангенциального разрыва.

Теперь из векторов $V^\pm$, v и функций V_n , P_0 мы склеим старший член асимптотического разложения (4) (с точностью до указанного сдвига фазы c). Именно, в точках поверхности M_t рассмотрим вектор $\widehat{U}(z, x, t) = v_0(z, x, t) + V_n(x, t)\nabla S(x, t)$. Из конструкции вектора v и функции V_n следует, что этот вектор может быть представлен в виде

$\hat{U}(z, x, t) = V^+(x, t)|_{M_t}\chi(z) + V^-(x, t)|_{M_t}(1 - \chi(z)) + \mathbf{v}(z, x, t)$, где $\chi(z) = (1 + \operatorname{th} z)/2$, а вектор $\mathbf{v}$ стремится к нулю при $|z| \rightarrow \infty$, причем, если решение задачи (14), (21), (23) стремится к своим пределам быстрее любой степени $|z|$, то с той же скоростью убывает $\mathbf{v}$. Отметим, что нормальная к M_t компонента последнего вектора равна нулю, так как функция V_n не зависит от z . Продолжим векторные поля $V^\pm(x, t)$ (определенные в областях $\Omega^\pm$ как решение задачи (9)–(11)) в некоторую не зависящую от ε окрестность поверхности M_t так, чтобы они удовлетворяли в этой окрестности уравнениям Эйлера (9); кроме того, продолжим в эту же окрестность вектор $\mathbf{v}(z, x, t)$ так, чтобы он не зависел от расстояния до M_t по нормали. В остальные точки пространства продолжим эти векторы произвольным гладким образом. Рассмотрим теперь вектор $U_0(z, x, t)$, определенный для всех $(z, x, t) \in \mathbb{R}^4 \times [0, T]$ по формулам

$$U_0(z, x, t) = V^+(x, t)\chi(z) + V^-(x, t)(1 - \chi(z)) + \mathbf{v}(z, x, t), \quad (25)$$

и положим $U(z, x, t) = U_0(z + c(x, t), x, t)$ (здесь функция c продолжена с поверхности M_t в ее окрестность так, что она не зависит от расстояния до M_t по нормали). Аналогичным способом продолжим во все пространство функцию π_0 :

$$\pi_0(z, x, t) = P_0^+(x, t)\chi(z) + P_0^-(x, t)(1 - \chi(z)). \quad (26)$$

Последние формулы (по модулю не определенной пока функции c) задают главный член асимптотического решения системы Навье–Стокса, описывающего сглаженный тангенциальный разрыв.

4. Определение “фазового сдвига” c и построение поправок. Перейдем к построению младших членов асимптотического разложения и определению сдвига $c(x, t)$ поверхности M_t . Для этого вернемся к равенству (12) и спроектируем его на нормаль ∇S к поверхности M_t . Получим

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \pi_1}{\partial z} \right|_{M_t} = & - \left(\nabla S, \left[\frac{\partial U}{\partial t} + (U, \nabla)U + \nabla \pi_0 \right. \right. \\ & \left. \left. + z(\nabla S, \nabla) \left(\left[\frac{\partial S}{\partial t} + (U, \nabla S) \right] \frac{\partial U}{\partial z} + \nabla S \frac{\partial \pi_0}{\partial z} \right) \right] \right) \Big|_{M_t}. \end{aligned} \quad (27)$$

Аналогично, из (13) находим

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} (U_1, \nabla S) \right|_{M_t} = - \left[(\nabla, U) + z(\nabla S, \nabla) \left(\frac{\partial U}{\partial z}, \nabla S \right) \right] \Big|_{M_t}. \quad (28)$$

Проинтегрировав (27) и (28) по переменной z от $-\infty$ до $+\infty$, получим после элементарных выкладок

$$\begin{aligned} P_1^+|_{M_t} - P_1^-|_{M_t} = & - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\nabla S, \left[\frac{\partial U_0}{\partial t} + (U_0, \nabla)U_0 + \nabla \pi_0 \right. \right. \\ & \left. \left. + z(\nabla S, \nabla) \left(\left[\frac{\partial S}{\partial t} + (U_0, \nabla S) \right] \frac{\partial U_0}{\partial z} + \nabla S \frac{\partial \pi_0}{\partial z} \right) \right] \right) \Big|_{M_t} dz, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} (V_1^+, \nabla S)|_{M_t} - (V_1^-, \nabla S)|_{M_t} = & - \Pi[(V^+ - V^-)|_{M_t}](c) \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} \left[(\nabla, U_0) + z(\nabla S, \nabla) \left(\frac{\partial U_0}{\partial z}, \nabla S \right) \right] \Big|_{M_t} dz. \end{aligned} \quad (30)$$

Перейдем теперь к рассмотрению следующего приближения, т.е. приравняем к нулю коэффициент при ε^1 , возникающий при подстановке разложения (4) в уравнения (1). Рассматривая полученные равенства при $z \rightarrow \pm\infty$, приходим к линеаризованным уравнениям Эйлера для поправок $V_1^\pm$ к полю скоростей жидкости в областях $\Omega^\pm$:

$$\frac{\partial V_1^\pm}{\partial t} + (V^\pm, \nabla)V_1^\pm + (V_1^\pm, \nabla)V^\pm + \nabla P_1^\pm = 0, \quad (\nabla, V_1^\pm) = 0, \quad V_1^\pm|_{t=0} = 0. \quad (31)$$

Эти уравнения вместе с условиями (29), (30) и (24) образуют замкнутую систему для определения векторных полей $V_1^\pm$ и функций $P_1^\pm$ в областях $\Omega^\pm$, а также “фазового сдвига” $c(x, t)$ (на поверхности M_t).

Следующие слагаемые асимптотического ряда (4) последовательно определяются по той же схеме. Именно, векторные поля $V_{k+1}^\pm(x, t)$, функции $P_{k+1}^\pm(x, t)$ и $c_k(x, t)$ (последняя задана на поверхности M_t) находятся из системы уравнений, начальных и краевых условий вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{k+1}^\pm}{\partial t} + (V^\pm, \nabla)V_{k+1}^\pm + (V_{k+1}^\pm, \nabla)V^\pm + \nabla P_{k+1}^\pm &= \Phi_{k+1}^\pm, \quad (\nabla, V_{k+1}^\pm) = \Psi_{k+1}^\pm, \\ \partial_t(c_k) + \Pi(V^-|_{M_t})(c_k) + c_k(\widehat{\nabla}, \Pi(V^-|_{M_t})) + (V_{k+1}^-, \nabla S)|_{M_t} &= 0, \\ V_{k+1}^\pm|_{t=0} &= 0, \quad c_k|_{t=0} = 0, \\ (V_{k+1}^+, \nabla S)|_{M_t} - (V_{k+1}^-, \nabla S)|_{M_t} &= [\Pi(V^+ - V^-)]_{M_t}(c_k) + R_{k+1}(x, t), \\ P_{k+1}^+|_{M_t} - P_{k+1}^-|_{M_t} &= c_k(\nabla S, \nabla)[P_0^+ - P_0^-]|_{M_t} + Q_{k+1}(x, t), \end{aligned} \quad (32)$$

где правые части $\Psi_{k+1}^\pm, \Phi_{k+1}^\pm$ и определенные на M_t гладкие функции R_{k+1}, Q_{k+1} выражаются через найденные ранее функции $U, \dots, U_{k-1}, U_k^0, \pi_0, \dots, \pi_k$ и их производные (векторное поле $U_k^0(z, x, t)$ – это поправка к полю скоростей, определенная с точностью до функции $c_k(x, t)$ на поверхности M_t ; см. ниже). Затем по явным формулам находятся функции $\pi_{k+1}|_{M_t}, (U_{k+1}, \nabla S)|_{M_t}$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \pi_{k+1}}{\partial z} \right|_{M_t} &= q_{k+1}(z, x, t) - c_k \frac{\partial}{\partial z} \left(\nabla S, \frac{\partial U}{\partial t} + (U, \nabla)U \right), \\ \frac{\partial}{\partial z} (U_{k+1}, \nabla S)|_{M_t} &= r_{k+1}(z, x, t) - \frac{\partial}{\partial z} [c_k(\nabla, U) + (U_\parallel, c_1)], \end{aligned}$$

где правые части q_{k+1}, r_{k+1} – полиномы от $U, \dots, U_{k-1}, U_k^0, \pi_0, \dots, \pi_k$ и их производных, $U_\parallel = U - (U, \nabla S)\nabla S$. Векторное поле U_k имеет вид $U_k = U_k^0 + c_k \partial U_\parallel / \partial z$. Следующий шаг состоит в нахождении векторного поля $v_{k+1}(z, x, t)$ на поверхности M_t из уравнений

$$\begin{cases} \mathfrak{L}_{\partial_t} v_{k+1} - 2V_n \mathfrak{B} v_{k+1} + \widehat{\nabla}_v v_{k+1} + \widehat{\nabla}_{v_{k+1}} v + a \frac{\partial v_{k+1}}{\partial z} + a_{k+1} \frac{\partial v}{\partial z} = \nu_0 \frac{\partial^2 v_{k+1}}{\partial z^2} + f_{k+1}, \\ \frac{\partial a_{k+1}}{\partial z} + (\widehat{\nabla}, v_{k+1}) = g_{k+1}, \end{cases} \quad (33)$$

где $v_{k+1} = \Pi(U_{k+1}|_{M_t})$, $a_{k+1} = (\nabla S, U_{k+2})|_{M_t}$ и правые части f_{k+1}, g_{k+1} выражаются через $U, \dots, U_k, (U_{k+1}, \nabla S), \pi, \dots, \pi_{k+1}$ и их производные. Непосредственно проверяется

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Уравнения (33) инвариантны относительно преобразования $v_{k+1} = v_{k+1}^0 + c_{k+1}(x, t) \partial v / \partial z$, $a_{k+1} = a_{k+1}^0 - v(c_{k+1}) - c_{k+1}(\widehat{\nabla}, v) - \partial_t(c_{k+1})$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть v_{k+1}^0, a_{k+1}^0 – решение (33), удовлетворяющее начальным условиям и условиям на бесконечности

$$v_{k+1}^0|_{t=0} = \dot{v}_{k+1}, \quad v_{k+1}^0(z) \rightarrow \Pi(V_{k+1}^\pm(x, t)|_{M_t}) \quad \text{при } z \rightarrow \pm\infty, \quad (34)$$

$$a_{k+1}^0 \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow -\infty \quad (35)$$

(здесь $\dot{v}_{k+1}$ – коэффициент при ε^{k+1} в разложении (3) начального поля (2)), а функция c_{k+1} на поверхности M_t удовлетворяет уравнению

$$\partial_t(c_{k+1}) + \Pi(V^-|_{M_t})(c_{k+1}) + c_{k+1}(\widehat{\nabla}, \Pi(V^-|_{M_t})) + (V_{k+2}^-, \nabla S)|_{M_t} = 0,$$

$c_{k+1}|_{t=0} = 0$. Тогда v_{k+1}, a_{k+1} – решение тех же уравнений, удовлетворяющее (34) и условию $a_{k+1} \rightarrow (V_{k+2}^-, \nabla S)|_{M_t}$ при $z \rightarrow -\infty$.

Продолжая теперь по формулам, аналогичным (25), (26), векторное поле $v_{k+1}^0 + \nabla S(U_{k+1}, \nabla S)$ с поверхности M_t во все пространство, находим поправку к полю скоростей в виде $U_{k+1} = U_{k+1}^0 + c_{k+1} \partial U / \partial z$. Функция c_{k+1} (постоянная вдоль нормалей к M_t), аналогично c_k находится вместе с $V_{k+2}^\pm, P_{k+2}^\pm$ при анализе следующего приближения.

Таким образом, доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть при $t \in [0, T]$ задачи (9), (10); (15), (21), (23); (29)–(31); (32); (33)–(35) допускают при всех k гладкое решение, стабилизирующееся при $|z| \rightarrow \pm\infty$ быстрее любой степени $|z|$. Тогда определенный по ним формальный ряд (4) является формальным асимптотическим решением задачи Коши (1), (2).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Функции c_k естественно трактовать как поправки порядка ε^{k+1} к функции $S(x, t)$ (т.е. к положению фронта M_t тангенциального разрыва). Такая интерпретация этих функций становится еще более очевидной, если искать асимптотическое решение задачи (1), (2) в виде $U'([S(x, t) + \varepsilon c(x, t) + \varepsilon^2 c_1(x, t) + \dots] / \varepsilon, x, t) + \varepsilon U'_1 + \dots$. Ясно, что переход от такого представления решения к представлению (4) осуществляется очевидными переразложениями; “поправки к фазе” c_j при этом определяются, аналогично тому, как это было сделано выше, из условия “расщепления” условий при $z \rightarrow -\infty$ в задачах для функций U'_j при разных j .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Из уравнений (15) можно исключить функцию a . Именно, выражая из последнего уравнения этой системы с учетом краевого условия (22) функцию a и подставляя эту формулу в первое уравнение (15), после несложных выкладок получим

$$\mathcal{L}_{\partial_t} v - 2V_n \mathfrak{B} v + \widehat{\nabla}_v v + \left[(V_1^-, \nabla S)|_{M_t} - z(\widehat{\nabla}, v) + \int_{-\infty}^z \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} (\widehat{\nabla}, v(\zeta)) d\zeta \right] \frac{\partial v}{\partial z} = \nu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \widehat{\nabla} P. \quad (36)$$

Это уравнение (которое, конечно, должно быть дополнено начальными условиями и условиями на бесконечности (21)) содержит поправку к полю скоростей V_1^- . Зависимость от этой поправки, как показано выше, влияет только на “фазовый сдвиг” (см. предложение 2). Это обстоятельство легко проверить и непосредственно для системы (36). Именно, прямая выкладка приводит к следующему утверждению.

УТВЕРЖДЕНИЕ. При преобразовании $v(z, x, t) = v_0(z + c(x, t), x, t)$, где $c(x, t)$ – функция на поверхности M_t , удовлетворяющая уравнению (24), система (36) переходит в уравнения

$$\mathcal{L}_{\partial t} v_0 - 2V_n \mathfrak{B} v_0 + \widehat{\nabla}_{v_0} v_0 + \frac{\partial v_0}{\partial z} \left[\int_{-\infty}^z \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} (\widehat{\nabla}, v(\zeta)) d\zeta - z(\widehat{\nabla}, v) \right] = v_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} - \widehat{\nabla} P.$$

Последнее уравнение уже не содержит никаких дополнительных (кроме v) неизвестных функций. Аналогично, функции a_{k+1} можно исключить из уравнений (33).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Куликовский А. Г. Сильные разрывы в течениях сплошных сред и их структура // Тр. МИАН. 1988. Т. 182. С. 261–291.
- [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1984.
- [3] Маслов В. П. Распространение ударных волн в изоэнтропическом невязком газе // Современные проблемы математики. Т. 8. М.: ВИНТИ, 1976. С. 199–271.
- [4] Маслов В. П., Омелянов Г. А. Асимптотические солитонобразные решения уравнений с малой дисперсией // УМН. 1981. Т. 36. № 3. С. 63–126.
- [5] Маслов В. П., Цупин В. А. Распространение ударной волны в изоэнтропическом газе с малой вязкостью // Современные проблемы математики. Т. 8. М.: ВИНТИ, 1976. С. 273–308.
- [6] Молотков И. А., Вакуленко С. А. Сосредоточенные нелинейные волны. Л.: Изд. ЛГУ, 1988.
- [7] Данилов В. Г., Омелянов Г. А., Радкевич В. Е. Асимптотическое решение системы фазового поля и модифицированная задача Стефана // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 1. С. 483–491.
- [8] Маслов В. П. Когерентные структуры, резонансы и асимптотическая неединственность для уравнений Навье–Стокса при больших числах Рейнольдса // УМН. 1986. Т. 41. № 6. С. 19–35.
- [9] Маслов В. П. Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1987.
- [10] Маслов В. П., Омелянов Г. А. Быстроосциллирующие асимптотические решения уравнений МГД в приближении Токамака // Теоретич. и матем. физика. 1992. Т. 92. № 2. С. 879–895.
- [11] Maslov V. P., Omel'yanov G. A. Fluctuation-generated tokamak pinch instabilities // Russian J. Math. Phys. 1994. V. 2. № 4. P. 463–485.
- [12] Налимов В. И., Пухначев В. В. Неустановившиеся движения идеальной жидкости со свободными границами. Новосибирск: Изд. НГУ, 1975.
- [13] Прандтль Л. Гидроаэромеханика. М.: ИЛ., 1951.
- [14] Олейник О. А., Самохин В. Н. Математические методы в теории пограничного слоя. М.: Наука, 1997.