Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Исмагилов, К. В. Усков, Об асимптотике n -поперечников спирали Винера в комплексном гильбертовом пространстве, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 5, 686–693

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9120>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 15:12:01

Об асимптотике n -поперечников спирали Винера в комплексном гильбертовом пространстве

Р. С. Исмагилов, К. В. Усков

Описаны изометрические вложения спирали Винера в комплексное гильбертово пространство. Найдена асимптотика колмогоровских n -поперечников данных вложений. Отмечено различие с асимптотикой n -поперечников спирали Винера в вещественном гильбертовом пространстве.

Библиография: 5 названий.

1. Постановка задачи, основной результат. Начнем с напомним понятий, указанных в названии статьи.

Рассмотрим гильбертово пространство H (вещественное, либо комплексное) и его подмножество $K \subset H$. Возьмем n -мерное линейное подпространство L_n , вектор $a \in H$ и множество $a + L_n$, называемое n -мерной плоскостью. *Отклонением* множества K от плоскости $a + L_n$ называют величину

$$d(K, a + L_n) = \sup_{x \in K} \min_{y \in L_n} \|x - a - y\|,$$

а величину

$$d_n(K, H) = \inf_{a \in L_n} d(K, a + L_n) \quad (1)$$

называют n -м *колмогоровским поперечником* множества K (см. [1], [2]).

Если K – компакт, то $d_n(K, H) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и порядок стремления данной последовательности к нулю является важной характеристикой компакта. В дальнейшем изложении мы используем также величину $d_n^0(K, H)$: эта величина определяется формулой, аналогичной (1), в которой, однако, берется $a = 0$. Ясно, что $d_{n+1}^0 \leq d_n \leq d_n^0$.

Основной пример компакта, рассматриваемый в данной работе – спираль Винера; она определяется как кривая следующего вида в вещественном пространстве $L_2([0, 1])$:

$$W = \{w_x\}_{x=0}^1, \quad w_x(t) = \begin{cases} 1, & t \leq x, \\ 0, & t > x. \end{cases}$$

Видно, что $\|w_x - w_y\| = \sqrt{|x - y|}$. Это равенство позволяет отождествить множество W с отрезком $[0, 1]$, наделенным следующей (необычной) метрикой: $d(x, y) =$

Работа первого автора поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 08-01-00595).

$\sqrt{|x - y|}$. Отображение $x \mapsto w_x$ – есть изометрическое вложение данного отрезка в $L_2([0, 1])$.

Задача о поперечниках $d_n(W, L_2([0, 1]))$ изучена в нескольких работах, и в [3] и [4] показано, что

$$d_n(W, L_2([0, 1])) \sim \frac{1}{\pi\sqrt{n}}.$$

В этой работе мы рассмотрим изометрические вложения $\varphi: W \rightarrow H$ и величины $d_n(\varphi(W), H)$. Если H – вещественное гильбертово пространство, то эти величины не зависят от H и φ . Это следует из простого общего факта: если $S_1 \subset H$, $S_2 \subset H$ и дано изометрическое отображение $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$, то оно однозначно продолжается до изометрического аффинного отображения $\widehat{\varphi}: \widehat{S}_1 \rightarrow \widehat{S}_2$, где $\widehat{S}_1, \widehat{S}_2$ – минимальные плоскости, содержащие S_1 и S_2 , соответственно. Таким образом, любые два изометрических вложения связаны некоторым движением пространства H , которое, разумеется, сохраняет n -поперечники.

Дело обстоит иначе в случае вложений в комплексное гильбертово пространство H . Движение в H определяется как преобразование вида $x \mapsto Vx + a$, где $a \in H$, а V – есть $\mathbb{C}$ -линейный оператор, сохраняющий скалярное произведение. Далеко не любые два изометрических вложения совмещаются таким преобразованием (хотя их можно совместить преобразованием вида $x \mapsto Vx + a$, где $a \in H$, а V – $\mathbb{R}$ -линейный оператор, сохраняющий вещественную часть скалярного произведения). Таким образом, возникает вопрос о зависимости n -поперечников от способа вложения.

Наш основной результат состоит в том, что можно подобрать такие изометрические вложения спирали Винера в комплексное гильбертово пространство, для которых асимптотика n -поперечников отлична от вещественного случая.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого $c \in [\sqrt{2}, 2]$ существует изометрическое отображение $\varphi: W \rightarrow H$ такое, что*

$$d_n(\varphi(W), H) \sim \frac{c}{2\pi\sqrt{n}}. \quad (2)$$

Для доказательства данной теоремы нам потребуется ряд утверждений об n -поперечниках, корреляционной функции и положительно определенных ядрах. Также мы напомним теорему об интегральных неравенствах для n -поперечников.

2. Положительно определенные ядра, корреляционная функция, n -поперечники. Пусть X – произвольное непустое множество. Функцию $B(x, y)$ со значениями в поле $\mathbb{C}$ называют *эрмитовым ядром*, если $B(x, y) = \overline{B(y, x)}$, $x, y \in X$. Если, кроме того,

$$\sum_{1 \leq i, j \leq N} B(x_i, x_j) \xi_i \bar{\xi}_j \geq 0 \quad \text{для всех } x_i \in X, \quad \xi_i \in \mathbb{C}, \quad N \in \mathbb{N},$$

то функцию B называют *положительно определенным ядром*; далее будем использовать сокращение – ПОЯ.

Пусть теперь дано любое отображение $\varphi: X \rightarrow H$, где H – гильбертово пространство. Функцию $B(x, y) = (\varphi(x), \varphi(y))$, $x, y \in X$, называют *корреляционной функцией* отображения φ . Ясно, что корреляционная функция произвольного отображения является ПОЯ. Верно и обратное: имея произвольное ПОЯ, всегда можно найти отображение φ , корреляционная функция которого совпадает с данным ядром.

Доказательство этого факта (конструкция гильбертова пространства по заданному ПОЯ.) общеизвестно. Для дальнейшего нам потребуется общий вид ПОЯ, соответствующего изометрическому отображению $\varphi: X \rightarrow H$.

ЛЕММА 1. Пусть (X, d) – метрическое пространство и $B(x, y)$, $x, y \in X$, – ПОЯ. Тогда равносильны два высказывания:

- 1) существует изометрическое отображение $\varphi: X \rightarrow H$ такое, что $B(x, y) = (\varphi(x), \varphi(y))$;
- 2) выполнено

$$B(x, y) = \frac{1}{2}(v(x) + v(y) - d^2(x, y)) + iR(x, y),$$

где $v(x) \geq 0$, $R(x, y) = -R(y, x)$, $x, y \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся очевидным соотношением, верным для любой функции φ :

$$\operatorname{Re}(\varphi(x), \varphi(y)) = \frac{1}{2}(\|\varphi(x)\|^2 + \|\varphi(y)\|^2 - \|\varphi(x) - \varphi(y)\|^2). \quad (3)$$

1. Пусть выполнено условие 1); тогда φ – изометрия. Применяя (3), получаем

$$\operatorname{Re} B(x, y) = \frac{1}{2}(\|\varphi(x)\|^2 + \|\varphi(y)\|^2 - d^2(x, y)),$$

что приводит к условию 2).

2. Пусть теперь выполнено условие 2). Так как функция $B(x, y)$ есть ПОЯ, то существует отображение $\varphi: X \rightarrow H$ такое, что $B(x, y) = (\varphi(x), \varphi(y))$. Докажем, что φ – изометрия. Из (3) и условия 2) имеем

$$\|\varphi(x)\|^2 + \|\varphi(y)\|^2 - \|\varphi(x) - \varphi(y)\|^2 = v(x) + v(y) - d^2(x, y).$$

Полагая $x = y$, получаем $\|\varphi(x)\|^2 = v(x)$, но тогда $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = d(x, y)$, что и требовалось.

Лемма 1 доказана.

Перейдем к n -поперечникам вложений в гильбертово пространство. Имея произвольное ПОЯ $B(x, y)$, можем рассмотреть соответствующее отображение $\varphi: X \rightarrow H$ и поперечники $d_n(\varphi(X), H)$. Эти величины будем обозначать через $\Delta_n(B)$. По аналогии введем величины: $\Delta_n^0(B) = d_n^0(\varphi(X), H)$.

Докажем важное свойство чисел $\Delta_n(B)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть a_k, b_k , $k = 1, \dots, N$, – произвольные отображения из X в $\mathbb{C}$. Функцию

$$B(x, y) = a_1(x)\overline{b_1(y)} + \dots + a_N(x)\overline{b_N(y)}, \quad x, y \in X,$$

называют вырожденным ядром порядка N , если N есть наименьшее число, для которого такое представление возможно.

ТЕОРЕМА 2. Пусть даны два ПОЯ B_1 и B_2 , причем функция $B_2 - B_1$ – есть вырожденное ядро порядка N . Тогда

$$\Delta_{n+N}(B_2) \leq \Delta_n(B_1) \leq \Delta_{n-N}(B_2), \quad n \geq N. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем доказательство на шаги.

1. Пусть, сначала, ядро $B_2 - B_1$ является ПОЯ. Положим $B_0 = B_2 - B_1$ и обозначим через φ_0 и φ_1 отображения в гильбертовы пространства, соответствующие ядрам B_0 и B_1 :

$$\begin{aligned}\varphi_0: X &\rightarrow H_0, & B_0(x, y) &= (\varphi_0(x), \varphi_0(y)), & x, y &\in X, \\ \varphi_1: X &\rightarrow H_1, & B_1(x, y) &= (\varphi_1(x), \varphi_1(y)), & x, y &\in X.\end{aligned}$$

Так как B_0 – вырожденное ядро порядка N , то $\dim H_0 \leq N$. Ясно также, что отображение $\varphi_2: X \rightarrow H_1 \oplus H_0$, $\varphi_2(x) = (\varphi_1(x), \varphi_0(x))$, $x \in X$, соответствует ядру B_2 . Покажем, что выполняются следующие неравенства:

$$\Delta_{n+N}(B_2) \leq \Delta_n(B_1) \leq \Delta_n(B_2). \quad (5)$$

Для доказательства правой части неравенств введем проектор $P_1: H_1 \oplus H_0 \rightarrow H_1$, $P_1((x_1, x_0)) = x_1$. Тогда для любой n -мерной плоскости $a + L_n \subset H_1 \oplus H_0$ имеем

$$\begin{aligned}d(\varphi_2(X), a + L_n) &\geq d(P_1(\varphi_2(X)), P_1(a + L_n)) = d(\varphi_1(X), P_1(a + L_n)) \\ &\geq d_n(\varphi_1(X), H_1) = \Delta_n(B_1).\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались простым фактом, что расстояние между двумя множествами в гильбертовом пространстве не меньше расстояния между проекциями этих множеств на любое подпространство. Итак, $d(\varphi_2(X), a + L_n) \geq \Delta_n(B_1)$. Взяв нижнюю грань по всем возможным плоскостям $a + L_n$, получаем требуемое неравенство.

Для доказательства левой части (5) возьмем произвольную n -мерную плоскость $a + L_n$ из H_1 . Имеем

$$\begin{aligned}d(\varphi_1(X), a + L_n) &= d(\varphi_1(X) \oplus H_0, a + L_n \oplus H_0) \geq d(\varphi_2(X), a + L_n \oplus H_0) \\ &\geq \Delta_{n+N}(\varphi_2(X), H_1 \oplus H_0) = \Delta_{n+N}(B_2).\end{aligned}$$

В данном случае мы учли, что $\varphi_2(X) \subset \varphi_1(X) \oplus H_0$ и, что $\dim(a + L_n \oplus H_0) \leq n + N$. Снова взяв нижнюю грань по a и L_n , получаем необходимое неравенство.

Итак, неравенства (5) доказаны. Для дальнейшего использования удобно записать их в виде

$$\Delta_{n+N}(B_1 + D_N) \leq \Delta_n(B_1) \leq \Delta_n(B_1 + D_N), \quad (6)$$

где D_N – любое вырожденное ПОЯ порядка N .

2. Перейдем к случаю, когда $B_2 - B_1$ – произвольное вырожденное ядро порядка N (т.е., больше не предполагаем, что $B_2 - B_1$ – есть ПОЯ). Покажем, что такое ядро представимо в виде разности $D_N - D_{2N}$, где D_N и D_{2N} – вырожденные ПОЯ порядка N и $2N$, соответственно. Пусть

$$B_0(x, y) = B_2(x, y) - B_1(x, y) = \sum_{k=1}^N a_k(x) \overline{b_k(y)}.$$

Так как B_1, B_2 – эрмитовы ядра, то B_0 – также эрмитово. Следовательно, $B_0(x, y) = 1/2(B_0(x, y) + \overline{B_0(y, x)})$. Отсюда

$$\begin{aligned} B_0(x, y) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (a_k(x) \overline{b_k(y)} + \overline{a_k(y)} b_k(x)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (a_k(x) + b_k(x)) \overline{(a_k(y) + b_k(y))} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (a_k(x) \overline{a_k(y)} + b_k(x) \overline{b_k(y)}) \\ &= D_N(x, y) - D_{2N}(x, y). \end{aligned}$$

Функции вида $a_k(x) \overline{a_k(y)}$, очевидно, являются ПОЯ; следовательно, функции D_N и D_{2N} также ПОЯ.

Итак, $B_2 - B_1 = D_N - D_{2N}$, или, что то же самое, $B_2 + D_{2N} = B_1 + D_N$. Применяя уже доказанные неравенства (6), получаем

$$\Delta_n(B_1) \geq \Delta_{n+N}(B_1 + D_N) = \Delta_{n+N}(B_2 + D_{2N}) \geq \Delta_{n+N}(B_2).$$

Далее, переставив B_1 и B_2 , имеем $\Delta_n(B_2) \geq \Delta_{n+N}(B_1)$; значит, $\Delta_n(B_1) \leq \Delta_{n-N}(B_2)$.

Теорема 2 доказана.

3. Интегральные неравенства для n -поперечников. В этом пункте мы напомним предложенный в [4] метод оценки n -поперечников компакта в гильбертовом пространстве.

Пусть K – компакт, H – гильбертово пространство, φ – непрерывное отображение K в H . Возьмем на K положительную меру $d\sigma$, нормированную условием $\sigma(K) = 1$, и рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_K (\varphi(x), \varphi(y)) f(y) d\sigma(y) = \lambda f(x), \quad x \in K.$$

Пусть $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ – положительные собственные значения этого уравнения, а $f_1(x), f_2(x), \dots$ – соответствующие собственные функции, ортонормированные в $L_2(K, d\sigma)$. Тогда согласно [4]

$$\sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k} \leq d_n^0(\varphi(K), H) \leq \max_{x \in K} \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k |f_k(x)|^2}. \quad (7)$$

Отметим, что здесь использована величина d_n^0 , описанная в разделе 1.

Метод исследования n -поперечников при помощи неравенств (7) состоит в подборе такой меры $d\sigma$, которая обеспечивает либо точное, либо асимптотическое равенство правой и левой частей (7) (подробнее см. в [4], [5]). Отсюда получаем также информацию о величинах d_n , используя неравенства $d_{n+1}^0 \leq d_n \leq d_n^0$.

Следующий пример иллюстрирует применение указанного метода; результат примера потребуется нам для доказательства основной теоремы.

ПРИМЕР 1. Пусть $K = [0, 1]$ и $(\varphi(x), \varphi(y)) = \psi(x - y)$, где ψ – периодическая функция с периодом 1, $\psi \in L_2([0, 1])$ и коэффициенты Фурье функции ψ неотрицательны:

$$\psi(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k e^{2\pi i k x}, \quad \psi_k \geq 0.$$

Видно, что если положить $d\sigma(x) = dx$, то величины ψ_k будут собственными значениями интегрального уравнения, а $e^{2\pi i k x}$ – собственными функциями. Так как $|e^{2\pi i k x}| \equiv 1$, из неравенств (7) получаем

$$d_n^0(\varphi(K), H) = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k}, \quad (8)$$

где $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ – перестановка в убывающем порядке коэффициентов ψ_k .

4. Доказательство теоремы 1. Перейдем к доказательству основной теоремы.

1. Рассмотрим метрическое пространство (X, d) , где $X = [0, 1]$, $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$, и фиксируем $c \in [\sqrt{2}, 2]$. В разделе 1 отмечалось, что $(W, \|\cdot\|_{L_2}) \sim (X, d)$, поэтому достаточно построить изометрическое вложение $\varphi: X \rightarrow H$, для которого будет выполнено (2). Согласно лемме 1 искомое вложение задается ПОЯ вида

$$B(x, y) = \frac{1}{2}(v(x) + v(y) - |x - y|) + \imath R(x, y). \quad (9)$$

Подберем функции v и R так, чтобы функция (9) была суммой ядра того типа, который описан в предыдущем разделе в примере 1, и вырожденного ядра. С этой целью возьмем вещественную 1-периодическую функцию, заданную на отрезке $[0, 1]$ формулой $D(x) = 1/6 + x^2 - x$. Легко проверить справедливость следующих соотношений:

$$|x| = \frac{1}{6} + x^2 - D(x), \quad x \in [-1, 1], \quad (10)$$

$$D(x) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2} e^{2\pi i k x}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Возьмем, далее, 1-периодическую функцию

$$x \mapsto R(x) = \frac{\imath \gamma}{4\pi^2} \sum_{k \neq 0} r_k e^{2\pi i k x}, \quad r_k = -r_{-k} = \frac{1}{k^2}, \quad \gamma \in [0, 1],$$

и запишем следующее равенство, вытекающее из (10):

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} + x^2 + y^2 - |x - y| \right) + \imath R(x - y) = xy + \frac{1}{2} D(x - y) + \imath R(x - y).$$

С учетом (11) и определения функции R это равенство можно переписать в виде

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} + x^2 + y^2 - |x - y| \right) + \imath R(x - y) = xy + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k \neq 0} \psi_k e^{2\pi i k(x-y)}, \quad (12)$$

где

$$\psi_k = \frac{1-\gamma}{k^2}, \quad \psi_{-k} = \frac{1+\gamma}{k^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Левая часть этого равенства имеет вид (9), а правая часть является ПОЯ (ибо xu есть ПОЯ, а все ψ_k неотрицательны). Следовательно, обозначив функцию (12) через $B(x, y)$, приходим к следующим выводам: $B(x, y)$ – корреляционная функция изометрического вложения $\varphi: X \rightarrow H$, и $d_n(\varphi(X), H) = \Delta_n(B)$.

2. Чтобы оценить $\Delta_n(B)$ рассмотрим ПОЯ

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k \neq 0} \psi_k e^{2\pi i k(x-y)}.$$

Согласно теореме 2

$$\Delta_{n+1}(\Psi) \leq \Delta_n(B) \leq \Delta_{n-1}(\Psi),$$

и нам остается показать, что при соответствующем выборе параметра γ выполняется соотношение $\Delta_n(\Psi) \sim c/2\pi\sqrt{n}$. Очевидно, что это равносильно выводу такого же соотношения для $\Delta_n^0(\Psi)$.

Воспользуемся результатом примера 1; согласно (8):

$$\Delta_n^0(\Psi) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k}, \quad (13)$$

где $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ – упорядоченная перестановка чисел $\{\psi_k\}$. Введем считающую функцию последовательности $\{\lambda_k\}$: $N(\lambda) = \sum_{\lambda_k \geq \lambda} 1$. С учетом возможной кратности чисел λ_k имеем

$$N(\lambda_k) = k + \omega_1, \quad \omega_1 \in \{0, 1\}. \quad (14)$$

С другой стороны, используя явный вид чисел ψ_k , легко подсчитать, что

$$N(\lambda) = \frac{\sqrt{1-\gamma} + \sqrt{1+\gamma}}{\sqrt{\lambda}} + \omega_2, \quad \omega_2 \in [0, 2]. \quad (15)$$

Пусть теперь γ определяется соотношением: $\sqrt{1-\gamma} + \sqrt{1+\gamma} = c$; не сложно проверить, что это соотношение однозначно задает значение $\gamma \in [0, 1]$. Тогда (15) можем переписать в виде $N(\lambda) = c/\sqrt{\lambda} + \omega_2$. Полагая в этом равенстве $\lambda = \lambda_k$ и применяя (14), получаем

$$\frac{c^2}{(k+1)^2} \leq \lambda_k \leq \frac{c^2}{(k-2)^2}.$$

Отсюда, суммируя, находим

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k = \frac{c^2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Из этого равенства и (13) следует искомая асимптотика $\Delta_n^0(\Psi)$ и $\Delta_n(\Psi)$.

Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Kolmogoroff, “Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse”, *Ann. of Math.* (2), **37**:1 (1936), 107–110.
- [2] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1976.
- [3] А. Н. Колмогоров, А. А. Петров, Ю. М. Смирнов, “Одна формула Гаусса из теории метода наименьших квадратов”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **11**:6 (1947), 561–566.
- [4] “Об n -мерных поперечниках компактов в гильбертовом пространстве”, *Функци. анализ и его прил.*, **2**:2 (1968), 32–39.
- [5] К. В. Усков, “О нахождении точного значения колмогоровских поперечников компакта в гильбертовом пространстве”, *Матем. заметки*, **72**:4 (2002), 570–586.

Р. С. Исмагилов

Московский государственный технический университет

им. Н. Э. Баумана

E-mail: ismagil@mx.bmstu.ru

Поступило

18.11.2010

К. В. Усков

ОАО “Газпромбанк”

E-mail: uskov.kirill@rambler.ru