Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Колокольцов, Стохастическая монотонность и двойственность одномерных марковских процессов, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 5, 694–704

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9121>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 16:39:25

Стохастическая монотонность и двойственность одномерных марковских процессов

В. Н. Колокольников

В данной работе развивается теория монотонности и двойственности общих одномерных процессов Феллера как обобщение подхода, предложенного в работе [1]. Кроме того, показано, что локальные условия монотонности (условия на ядрах Леви) являются достаточными для доказательства корректности соответствующих марковских полугрупп и процессов, включая процессы с неограниченными коэффициентами и процессы на полупрямой.

Библиография: 22 названия.

1. Введение. Марковский процесс X_t в пространстве $\mathbb{R}$ называется *стохастически монотонным*, если функция $P(X_t^x \geq y)$ (здесь, как обычно, x обозначает начальную точку) не убывает по x для любых $y \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}_+$, или, что эквивалентно (как вытекает из возможности приближения непрерывных функций кусочно постоянными), если соответствующая марковская полугруппа сохраняет множество неубывающих функций. Марковский процесс Y_t в $\mathbb{R}$ называется *двойственным* относительно процесса X_t , если

$$P(Y_t^y \leq x) = P(X_t^x \geq y) \quad (1)$$

при всех $t > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$. Очевидно, если двойственный марковский процесс существует, то он будет единственным.

Стохастическая монотонность марковских цепей хорошо изучена и применяется для анализа во многих практических моделях, см., например, [2]–[5]. Стохастическая монотонность и соответствующая двойственность также хорошо изучены для процессов диффузии (см. [6] и [7]) и марковских процессов скачкообразного типа (см. [8]–[10]). В работе [11] анализируется монотонность устойчивых процессов. В случае общих марковских процессов стохастическая монотонность и соответствующая двойственность впервые анализировались в работе [1] для случая одномерных процессов с полиномиальными коэффициентами (заметим, что в работе [1] есть весьма неприятные опечатки в выражениях для двойственного генератора). Эти результаты возникли из анализа моделей взаимодействующих частиц (см. также [12]) и соответствующих марковских моделей в финансовой математике. В работе [13] теория монотонности обобщается на многомерные процессы

типа Леви–Хинчина, для которых меры Леви имеют конечный первый внутренний момент, т.е. $\int_{|y|<1} \nu(x, dy) < \infty$ (на самом деле, рассматривается немного более общий случай).

В данной работе, следуя подходу, предложенному в работе [1], теория монотонности и двойственности впервые обобщается на случай произвольных одномерных процессов Феллера (пп. 2 и 3). Получен критерий стохастической монотонности, выраженный через генератор марковского процесса X_t , и при дополнительных условиях регулярности получена явная формула для двойственного генератора. Наш подход основан на теории дискретизации и, в конечном счете, на теории стохастической монотонности для марковских цепей.

Во второй части данной работы (пп. 4 и 5) используется альтернативный подход к анализу монотонности, который, в частности, адаптирует метод, применяемый в работе [14] для анализа генераторов, порядок которых не превышает единицы. Кроме того, показано, что локальные условия монотонности (условия на ядра Леви) являются достаточными условиями для доказательства корректности соответствующей марковской полугруппы и процесса, и, таким образом вносится вклад в решение задачи построения процесса по заданному предгенератору (см., например, [15]–[18]). Наконец, строятся стохастически монотонные процессы на полупрямой, включая случай неограниченных коэффициентов.

Некоторые из полученных результатов можно обобщить на случай произвольных размерностей (см., например, [19]), однако изложение одномерной теории в качестве первого шага кажется целесообразным, и особенно в силу того, что она применяется в Option Pricing моделях (см. [20]).

В заключение, я хочу поблагодарить профессора Му Фа Чена, который познакомил меня с недавними работами китайских ученых в данной области.

2. Монотонность, выраженная через дискретные приближения. Следуя работе [2], кратко напомним теорию стохастической монотонности для марковских цепей. Сначала напомним, что *матрицей Колмогорова* или *Q-матрицей* называется такая матрица $Q = (Q_{mn})$, где $m, n \in \mathbb{Z}$, что $Q_{nm} \geq 0$ при $m \neq n$ и

$$Q_{nn} = - \sum_{m \neq n} Q_{nm} \quad (2)$$

при всех n . Каждой такой матрице соответствует марковский процесс (обычно, не единственный) с генератором (который будем обозначать той же буквой), задаваемым формулой

$$(Qf)_n = \sum_m Q_{nm} f_m.$$

Принимая во внимание свойства матрицы Q , можно записать для этого генератора два других полезных выражения:

$$(Qf)_n = \sum_{m \neq n} Q_{nm} (f_m - f_n) = \sum_m Q_{nm} (f_m - f_n).$$

Если интенсивность скачков, задаваемая матрицей Q , равномерно ограничена, т.е.

$$\sup_n |Q_{nn}| < \infty,$$

то соответствующий марковский процесс единственный и консервативный; последнее означает, что соответствующая полугруппа сохраняет константы.

Q -матрица называется *стохастически монотонной*, если

$$\sum_{j \geq l} Q_{nj} \leq \sum_{j \geq l} Q_{n+1,j} \quad \text{для всех } l \neq n+1 \quad (3)$$

(для определенности, если нужно, разделяем индексы запятыми, как, например, $Q_{n,m}$). Основной дискретный результат гласит (см. доказательство в работе [2]), что если Q – стохастически монотонная матрица, то соответствующая марковская цепь X_t стохастически монотонна в том смысле, что $P(X_t^n \geq m)$ не убывает по n при всех m, t , и двойственная марковская цепь Y_t (удовлетворяющая условию (1) при целых x, y) имеет Q -матрицу

$$\tilde{Q}_{nj} = \sum_{l=n}^{\infty} (Q_{jl} - Q_{j-1,l}). \quad (4)$$

Оказывается, что условие монотонности становится более прозрачным, если его выразить через матрицу $\omega = (\omega_{nm})$, которая связана с Q -матрицей уравнением $\omega_{nm} = Q_{n,n+m}$. Таким образом, элементы матрицы ω_{nm} определяют вероятности скачков переменной n направо ($m > 0$) и налево ($m < 0$). Условие (3) принимает вид

$$\sum_{m \geq l-n} \omega_{nm} \leq \sum_{m \geq l-n-1} \omega_{n+1,m} \quad \text{для всех } l \neq n+1, \quad (5)$$

и это условие эквивалентно двум отдельным условиям для правых и левых скачков:

$$\sum_{m \geq k} \omega_{nm} \leq \omega_{n+1,k-1} + \sum_{m \geq k} \omega_{n+1,m} \quad \text{для всех } k \geq 2, \quad (6)$$

$$\omega_{n,-k+1} + \sum_{m \geq k} \omega_{n,-m} \geq \sum_{m \geq k} \omega_{n+1,-m} \quad \text{для всех } k \geq 2. \quad (7)$$

Действительно, условие (6) эквивалентно условию (5) при $k = l - n > 2$. С другой стороны, полагая, что $l \leq n$, и принимая во внимание, что $\sum_m \omega_{nm} = 0$ (в силу (2)), условие (5) можно переписать как

$$\sum_{m \leq l-n-1} \omega_{nm} \leq \sum_{m \leq l-n-2} \omega_{n+1,m},$$

откуда заменой m на $-m$ получается неравенство (7) при $k = n + 2 - l$.

Следует заметить, что условия (6), (7) выполняются, если $\omega_{n,1}, \omega_{n,-1}$ произвольны (неотрицательны) и другие коэффициенты удовлетворяют более простым неравенствам

$$\sum_{m \geq k} \omega_{nm} \leq \sum_{m \geq k} \omega_{n+1,m}, \quad \sum_{m \geq k} \omega_{n,-m} \geq \sum_{m \geq k} \omega_{n+1,-m} \quad \text{для всех } k \geq 2. \quad (8)$$

Наконец, уравнение (4) принимает вид

$$\tilde{Q}_{n,n+i} = \sum_{l=-i}^{\infty} (Q_{n+i,n+i+l} - Q_{n+i-1,n+i+l})$$

и, следовательно, в терминах $\tilde{\omega}_{nm} = \tilde{Q}_{n,n+m}$ получим

$$\tilde{\omega}_{ni} = \sum_{l=-i}^{\infty} (\omega_{n+i,l} - \omega_{n+i-1,l+1}). \quad (9)$$

В частности, если ω_{nm} не обращается в нуль только при $|m| \leq 1$, то такое же уравнение выполняется для $\tilde{\omega}$ и

$$\tilde{\omega}_{n1} = \omega_{n,-1}, \quad \tilde{\omega}_{n,-1} = \omega_{n-1,1}. \quad (10)$$

Кроме того, в силу двойственности правые скачки становятся левыми скачками и наоборот, т.е. если $\omega_{n,-i} = 0$ при всех $i > 0$, то $\tilde{\omega}_{ni} = 0$ при $i > 0$ и

$$\tilde{\omega}_{n,-i} = \omega_{n-i,i} + \sum_{l=i+1}^{\infty} (\omega_{n-i,l} - \omega_{n-i-1,l}), \quad i > 0, \quad (11)$$

а если $\omega_{n,i} = 0$ при всех $i > 0$, то $\tilde{\omega}_{n,-i} = 0$ при $i > 0$ и

$$\tilde{\omega}_{n,i} = \omega_{n+i-1,-i} + \sum_{l=i+1}^{\infty} (\omega_{n+i-1,-l} - \omega_{n+i,-l}), \quad i > 0. \quad (12)$$

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть X_t – процесс Феллера в $\mathbb{R}$ с генератором обычного вида Леви–Хинчина

$$Lf(x) = \frac{1}{2} G(x)f''(x) + b(x)f'(x) + \int (f(x+y) - f(x) - f'(x)y\mathbf{1}_{B_1}(y))\nu(x, dy) \quad (13)$$

и с непрерывными G , b , ν , и пусть пространство $C_c^2(\mathbb{R})$ является существенной областью определения оператора L . Для простоты также предположим (хотя это условие не является существенным, см. последний пункт), что коэффициенты ограничены, т.е.

$$\sup_x \left(G(x) + |b(x)| + \int (1 \wedge y^2)\nu(x, dy) \right) < \infty.$$

Если меры Леви ν такие, что, при любых $a > 0$, функции

$$\int_a^{\infty} \nu(x, dy), \quad \int_{-\infty}^{-a} \nu(x, dy) \quad (14)$$

являются, соответственно, неубывающей и невозрастающей, как функции от x , то процесс X_t будет стохастически монотонным. Кроме того, двойственный марковский процесс существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h > 0$ и пусть

$$\begin{aligned} L_h f(x) &= G(x) \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{2h^2} + |b(x)| \frac{f(x+h \operatorname{sgn}(b(x))) - f(x)}{h} \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \left[f(x+mh) - f(x) + \frac{f(x-h) - f(x)}{h} mh \mathbf{1}_{B_1}(mh) \right] \nu(x, [mh, mh+h)) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \left[f(x-mh) - f(x) + \frac{f(x+h) - f(x)}{h} mh \mathbf{1}_{B_1}(mh) \right] \nu(x, (mh-h, mh]). \end{aligned} \quad (15)$$

Эти операторы аппроксимируют L на $C_c^2(\mathbb{R})$ при $h \rightarrow 0$. Так как это пространство является существенной областью определения для L , соответствующие полугруппы сходятся. Из вышеупомянутого результата для марковских цепей следует, что процессы $X_{t,h}$, порожденные генераторами L_h , являются стохастически монотонными. Следовательно, то же самое выполняется для процесса X_t , порожденного генератором L . Опять-таки, из свойств марковских цепей следует, что процессы $Y_{t,h}$, двойственные к $X_{t,h}$ корректно определены. Их вероятности перехода сходятся, поскольку их можно выразить через сходящиеся вероятности перехода процессов $X_{t,h}$. Предельный марковский процесс Y_t будет двойственным к X_t .

3. Двойственные генераторы. При некоторых предположениях регулярности генератор двойственного процесса может быть записан в явном виде. Чтобы упростить формулы, сделаем это только для мер Леви с носителями на $\mathbb{R}_+$ (случай мер с носителями на $\mathbb{R}_-$ симметричен и его можно получить, применяя уравнение (12) вместо уравнения (11), которое используется ниже).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Дополнительно к условиям вышедоказанной теоремы предположим, что меры Леви имеют носители на $\mathbb{R}_+$ и выполняется $\nu(x, dy) = \nu(x, y)M(dy)$, где $\nu(x, y)$ – функция, дифференцируемая по x , и M – некоторая мера Бореля. Тогда генератор двойственного марковского процесса действует следующим образом:*

$$Lf(x) = \frac{1}{2}G(x)f''(x) - \left[\frac{1}{2}G'(x) + b(x) \right] f'(x) + \int_0^\infty [f(x-y) - f(x) + f'(x)\mathbf{1}_{B_1}(y)]\tilde{\nu}(x, dy) + f'(x) \int_0^1 y(\nu - \tilde{\nu})(x, dy) \quad (16)$$

на $C_c^2(\mathbb{R})$, где

$$\tilde{\nu}(x, dy) = \nu(x-y, y)M(dy) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_y^\infty \nu(x-y, z)M(dz) \right) dy.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу линейности можно вычислить двойственный генератор отдельно для диффузии, сноса и интегральной частей генератора L . В силу (10) двойственный генератор, соответствующий первому члену в (15), имеет вид

$$(2h^2)^{-1}[G(x)f(x+h) + G(x-h)f(x-h) - (G(x) + G(x-h))f(x)]$$

и сходится к

$$\frac{1}{2}[G(x)f''(x) - G'(x)f'(x)]$$

при $h \rightarrow 0$. Аналогично анализируя дрейфовую часть, получим первые два члена в (16).

Далее, из уравнения (11) следует, что оператор, двойственный первой сумме в (15), имеет вид

$$\sum_{m=1}^{\infty} (f(x-mh) - f(x))[\nu(x-mh, [mh, mh+h))]$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{l=m+1}^{\infty} \nu(x - mh, [lh, lh + h)) - \nu(x - mh - h, [lh, lh + h)) \\
& + \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \sum_{m=1}^{\infty} mh \mathbf{1}_{B_1}(mh) \nu(x, [mh, mh + h)).
\end{aligned}$$

Записывая его в виде

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} (f(x - mh) - f(x)) & \left[\int_{mh}^{mh+h} \nu(x - mh, y) M(dy) \right. \\
& \left. + \sum_{l=m+1}^{\infty} \int_{lh}^{lh+h} (\nu(x - mh, z) - \nu(x - mh - h, z)) M(dz) \right] \\
& + \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \sum_{m=1}^{\infty} mh \mathbf{1}_{B_1}(mh) \int_{mh}^{mh+h} \nu(x, y) M(dy),
\end{aligned}$$

получим (16).

4. Вывод корректности из монотонности. Весь остальной материал, кроме определения монотонности, не зависит от предыдущих результатов. Сначала опишем наш подход в простейшей ситуации.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть

$$Lf(x) = \int (f(x + y) - f(x) - f'(x)y) \nu(x, dy), \quad (17)$$

где ν – непрерывное ядро Леви такое, что

$$\sup_x \int (|y| \wedge |y|^2) \nu(x, dy) < \infty,$$

и первые две производные $\nu'(x, dy)$ и $\nu''(x, dy)$ ядра ν относительно x существуют в слабом смысле и определяют обобщенные непрерывные ядра Леви такие, что

$$\sup_x \int (|y| \wedge |y|^2) |\nu'(x, dy)| < \infty, \quad \sup_x \int (|y| \wedge |y|^2) |\nu''(x, dy)| < \infty.$$

Если, при любых $a > 0$ функции (14) являются, соответственно, неубывающей и невозрастающей, то L порождает единственную полугруппу Феллера с генератором, задаваемым выражением (17) на подпространстве $C_{\infty}(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$. Соответствующий процесс является стохастически монотонным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам понадобятся следующие формулы Тейлора:

$$f(x + y) - f(x) - f'(x)y = \int_0^y (f'(x + z) - f'(x)) dz = \int_0^y (y - z) f''(x + z) dz,$$

где $\int_0^y = -\int_y^0$ при $y < 0$.

Дифференцируя уравнение $\dot{f} = Lf$ относительно пространственной переменной x , получим следующее уравнение для $g(x) = f'(x)$:

$$\frac{d}{dt}g(x) = (L + K)g(x),$$

где

$$\begin{aligned} Kg(x) &= \int (f(x+y) - f(x) - f'(x)y)\nu'(x, dy) \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^y (g(x+z) - g(x)) dz \right) \nu'(x, dy) \\ &\quad - \int_{-\infty}^0 \left(\int_y^0 (g(x+z) - g(x)) dz \right) \nu'(x, dy) \\ &= \int_0^\infty dz(g(x+z) - g(x)) \int_z^\infty \nu'(x, dy) \\ &\quad - \int_0^\infty dz(g(x-z) - g(x)) \int_{-\infty}^{-z} \nu'(x, dy). \end{aligned}$$

Видно, что по условиям теоремы оба члена представляют собой условно положительные операторы типа Леви–Хинчина. Дифференцируя еще раз, получим для $v = g' = f''$ уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v(x) &= (L + 2K)v(x) + \int (f(x+y) - f(x) - f'(x)y)\nu''(x, dy), \\ &= (L + 2K)v(x) + \int_{-\infty}^\infty \left[\mathbf{1}_{|y| \leq 1} \int_0^y (y-z)v(x+z) dz \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{1}_{|y| > 1} \int_0^y (g(x+z) - g(x)) dz \right] \nu''(x, dy), \quad (18) \end{aligned}$$

где последний член является суммой ограниченного оператора, примененного к v , и ограниченной кривой при условии, что функция g ограничена.

Чтобы провести строгий анализ, введем аппроксимирующий оператор L_h , $h > 0$:

$$L_h f(x) = \int_{|y| > h} (f(x+y) - f(x) - f'(x)y)\nu(x, dy).$$

Тогда L_h – сумма оператора первого порядка и ограниченного оператора в $C_\infty(\mathbb{R})$ (последнее следует из наших предположений относительно момента меры ν). Следовательно, он порождает консервативную полугруппу Феллера T_t^h при любых $h > 0$. Из вида уравнения для f' , т.е. $\dot{g} = (L_h + K_h)g$ с ограниченным (в $C(\mathbb{R})$) и условно положительным K_h , и уравнения для f'' следует, что эта полугруппа действует как оператор положительных сжатий на производных $g = f'$ и как ограниченные операторы на $v = f''$ равномерно по h . Следовательно, оба пространства $C_\infty(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$ и $C_\infty(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$ инвариантны относительно T_h^t . Кроме того, при любых $f \in C_\infty(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$, функции $T_h^t f$ принадлежат пространству $C_\infty(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$ и равномерно ограничены по $h \in (0, 1]$ и $t \in [0, t_0]$ при любых t_0 .

Следовательно, учитывая, что

$$(T_t^{h_1} - T_t^{h_2})f = \int_0^t T_{t-s}^{h_2} (L_{h_1} - L_{h_2}) T_s^{h_1} ds$$

для произвольных $h_1 > h_2$ и используя оценку

$$|(L_{h_1} - L_{h_2})T_s^{h_1} f(x)| \leq \int_{B_{h_1}} \|T_s^{h_1} f\|_{C_2(\mathbb{R})} |y|^2 \nu(x, dy) = o(1) \|f\|_{C^2(\mathbb{R})}, \quad h_1 \rightarrow 0,$$

получим

$$\|(T_t^{h_1} - T_t^{h_2})f\| = o(1)t \|f\|_{C^2(\mathbb{R})}, \quad h_1 \rightarrow 0. \quad (19)$$

Поэтому семейство $T_t^h f$ сходится к семейству $T_t f$ при $h \rightarrow 0$. Ясно, что предельное семейство T_t определяет сильно непрерывную полугруппу в $C_\infty(\mathbb{R})$.

Применяя к T_t ту же процедуру, что применялась выше к T_t^h (дифференцируя уравнение эволюции относительно x), получим, что семейство T_t также определяет полугруппу сжатий в $C_\infty(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$, сохраняя положительность производных (и, следовательно, являясь стохастически монотонным), и ограниченную полугруппу в $C_\infty(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$.

Полагая

$$\frac{T_t f - f}{t} = \frac{(T_t - T_t^h)f}{t} + \frac{T_t^h f - f}{t}$$

и замечая, что в силу (19) первый член имеет порядок $o(1)\|f\|_{C^2}$ при $h \rightarrow 0$, приходим к заключению, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_t f - f}{t} = Lf$$

при любых $f \in C_\infty(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$. Следовательно, при таких f , полугруппа $T_t f$ дает классические решения задачи Коши $\dot{f} = Lf$. Из стандартных соображений двойственности следует единственность, что и требовалось доказать.

Теперь обсудим более общую ситуацию, включающую случай неограниченных коэффициентов. Через $C_{\infty, |\cdot|}(\mathbb{R})$ обозначим Банахово пространство непрерывных функций g на $\mathbb{R}$ таких, что $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)/|x| = 0$; в этом пространстве введена норма $\|g\|_{C_{\infty, |\cdot|}} = \sup_x (|g(x)|/(1 + |x|))$.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть для оператора

$$\begin{aligned} Lf(x) = & \frac{1}{2} G(x)f''(x) + b(x)f'(x) + \int (f(x+y) - f(x) - f'(x)y)\nu(x, dy) \\ & + \int (f(x+y) - f(x))\mu(x, dy) \end{aligned} \quad (20)$$

выполняются следующие условия:

- (i) функции $G(x)$ и $b(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы, G неотрицательна, и первые две производные от ν и μ относительно x существуют в слабом смысле как обобщенные меры Бореля и непрерывны в том смысле, что интеграл

$$\int f(y)(\nu(x, dy) + |\nu'(x, dy)| + |\nu''(x, dy)|)$$

ограничен и непрерывно зависит от x для любой непрерывной $f(y) \leq |y| \wedge |y|^2$, и интеграл

$$\int f(y)(\mu(x, dy) + |\mu'(x, dy)| + |\mu''(x, dy)|)$$

ограничен и непрерывно зависит от x для любой непрерывной $f(y) \leq |y|$;

- (ii) при любом $a > 0$ функции (14) являются, соответственно, неубывающей и невозрастающей;
- (iii) константа $c > 0$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} b(x) + \int |y|(\mu(x, dy) + \int_{-\infty}^{-x} |y+x|\nu(dy) &\leq c(1+x), & x > 1, \\ -b(x) + \int |y|(\mu(x, dy) + \int_{-x}^{\infty} |y+x|\nu(dy) &\leq c(1+|x|), & x < -1. \end{aligned} \quad (21)$$

Тогда мартингальная проблема для L в $C_c^2(\mathbb{R})$ поставлена корректно, и ее решение X_t^x является марковским процессом в сильном смысле, причем выполняется неравенство

$$\mathbb{E}|X_t^x| \leq e^{ct}(|x| + c) \quad (22)$$

и его марковская полугруппа сохраняет $C(\mathbb{R})$ и продолжаема с $C(\mathbb{R})$ до некоторой сильно непрерывной полугруппы в $C_{\infty, |\cdot|}(\mathbb{R})$, область определения которой содержит $C_c^2(\mathbb{R})$. Если, кроме того, при любых $a > 0$ функции

$$\int_a^{\infty} \mu(x, dy), \quad \int_{-\infty}^{-a} \mu(x, dy)$$

будут, соответственно, неубывающей и невозрастающей, то процесс X_t^x будет стохастически монотонным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия (21) и метода функций Ляпунова (см., например, раздел 5.2 в [14]), где функция Ляпунова f_L является регуляризованной абсолютной величиной, т.е. $f_L(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая положительная выпуклая функция, совпадающая с $|x|$ при $|x| > 1$, теорема сводится к случаю ограниченных коэффициентов, и тогда ее доказательство непосредственно следует из теоремы 4.1, где теперь аппроксимирующим оператором будет

$$\begin{aligned} L_h f(x) = & \frac{1}{2} G(x) f''(x) + b(x) f'(x) + \int_{|y|>h} (f(x+y) - f(x) - f'(x)y) \nu(x, dy) \\ & + \int_{|y|>h} (f(x+y) - f(x)) \mu(x, dy), \end{aligned}$$

и окончание доказательства будет таким же, если также принять во внимание, что диффузионная часть этого оператора L порождает полугруппу Феллера, что следует из хорошо известного факта о диффузиях с Липшицевыми коэффициентами.

5. Процессы на полупрямой.

ТЕОРЕМА 5.1. Предположим, что оператор L задан соотношением (20) при $x > 0$ и выполняются следующие условия:

- (i) носители мер $\nu(x, \cdot)$ и $\mu(x, \cdot)$ принадлежат $\mathbb{R}_+ = \{x > 0\}$,

$$\sup_{x \in (0,1]} \left[|b(x)| + G(x) + \int |y| \mu(x, dy) + \int (y \wedge y^2) \nu(x, dy) \right] < \infty,$$

и условие (i) теоремы 4.2 выполняется при $x > 0$;

(ii) для любого $a > 0$ функции

$$\int_a^\infty \nu(x, dy), \quad \int_a^\infty \mu(x, dy)$$

не убывают по x ;

(iii) константа $c > 0$ удовлетворяет условию

$$b(x) + \int y\mu(x, dy) \leq c(1+x), \quad x > 1.$$

Тогда остановленная мартингальная проблема для L в $C_c^2(\mathbb{R})$ корректно поставлена и ее решение – это стохастически монотонный марковский процесс X_t^x в $\mathbb{R}_+ = \{x \geq 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство следует из теоремы 4.2 и хорошо известной процедуры локализации (см., например, [21]) для решений мартингальных проблем.

Применяя результаты, полученные в [17], к граничным точкам скачкообразных процессов, можно непосредственно получить из теоремы 5.1 различные свойства регулярности остановленных процессов и их полугрупп (обобщая результаты, полученные в [1] при некоторых ограничивающих технических предположениях). Например, можно получить следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия теоремы 5.1.

(i) Если

$$G(x) = O(x^2), \quad \int_0^1 z^2 \nu(x, dz) = O(x^2), \quad |b(x) \wedge 0| = O(x)$$

при $x \rightarrow 0$, то точка 0 недостижима для X_t^x , а его полугруппа сохраняет пространство $C(\mathbb{R}_+)$ ограниченных непрерывных функций на $\mathbb{R}_+$.

(ii) Предположим, что существует предел $\lim_{x \rightarrow 0} b(x)$ и $G(x) = \alpha x(1 + o(1))$ при $x \rightarrow 0$ с константой $\alpha > 0$. Если $\alpha < b(0)$, то точка 0 опять-таки недостижима для X_t^x и его полугруппа сохраняет пространство $C(\mathbb{R}_+)$. Если $\alpha > b(0)$, то граничная точка 0 будет t -регулярной для X_t^x и его полугруппа сохраняет пространство $C(\mathbb{R}_+)$ ограниченных непрерывных функций на $\mathbb{R}_+$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. N. Kolokoltsov, “Measure-valued limits of interacting particle systems with k -nary interactions. I. One-dimensional limits”, *Probab. Theory Related Fields*, **126**:3 (2003), 364–394.
- [2] W. J. Anderson, *Continuous-Time Markov Chains. An Applications-Oriented Approach*, Springer Ser. Statist. Probab. Appl., Springer-Verlag, New York, 1991.
- [3] J. Conlisk, “Monotone Mobility Matrices”, *J. Math. Sociol.*, **15**:3-4 (1990), 173–191.
- [4] V. Dardoni, “Monotone Mobility Matrices and Income Distribution”, *Social Choice and Welfare*, **12** (1995), 181–192.
- [5] E. Maasoumi, “On Mobility”, *Handbook of Applied Economic Statistics*, ред. A. Ullah, D. E. A. Giles, Marcel Dekker, New York, 1998, 119–175.
- [6] O. Kallenberg, *Foundations of Modern Probability*, Probab. Appl. (N. Y.), Springer-Verlag, New York, 2002.

- [7] M.-F. Chen, F.-Y. Wang, “On order-preservation and positive correlations for multidimensional diffusion processes”, *Probab. Theory Related Fields*, **95**:3 (1993), 421–428.
- [8] A. Chen, H. Zhang, “Stochastic monotonicity and duality for continuous time Markov chains with general Q -matrix”, *Southeast Asian Bull. Math.*, **23**:3 (1999), 383–408.
- [9] M.-F. Chen, *From Markov Chains to Non-Equilibrium Particle Systems*, World Scientific Publ., River Edge, NJ, 2004.
- [10] Y. Zhang, “Sufficient and necessary conditions for stochastic comparability of jump processes”, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, **16**:1 (2000), 99–102.
- [11] G. Samorodnitsky, M. S. Taqqu, “Stochastic monotonicity and Slepian-type inequalities for infinitely divisible and stable random vectors”, *Ann. Probab.*, **21**:1 (1993), 143–160.
- [12] G. Q. Lan, “Stochastic monotonicity and positive correlations of a type of particle systems on Polish spaces”, *Acta Math. Sinica (Chin. Ser.)*, **52**:2 (2009), 309–314.
- [13] J. M. Wang, “Stochastic comparison and preservation of positive correlations for Lévy-type processes”, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, **25**:5 (2009), 741–758.
- [14] V. N. Kolokoltsov, *Nonlinear Markov Processes and Kinetic Equations*, Cambridge Tracts in Math., **182**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.
- [15] R. F. Bass, “Uniqueness in law for pure jump Markov processes”, *Probab. Theory Related Fields*, **79**:2 (1988), 271–287.
- [16] N. Jacob, *Pseudo-differential Operators and Markov Processes*, т. I: *Fourier Analysis and Semigroups*, Imperial College Press, London, 2001; v. II: *Generators and their Potential Theory*, Imperial College Press, London, 2002; v. III: *Markov Processes and Applications*, Imperial College Press, London, 2005.
- [17] V. N. Kolokoltsov, “On Markov processes with decomposable pseudo-differential generators”, *Stoch. Stoch. Rep.*, **76**:1 (2004), 1–44.
- [18] V. N. Kolokoltsov, “The Lévy–Khintchine type operators with variable Lipschitz continuous coefficients generate linear or nonlinear Markov processes and semigroups”, *Probab. Theory Related Fields*, 2009, Online First, arXiv:math.PR/0911.5688.
- [19] V. N. Kolokoltsov, *Markov Processes, Semigroups and Generators*, Monograph, De Gruyter, Berlin, 2011 (to appear).
- [20] A. Mijatovic, M. Pistorius, *Continuously monitored barrier options under Markov processes*, arXiv:q-fin.PR/0908.4028.
- [21] S. N. Ethier, Th. G. Kurtz, *Markov Processes. Characterization and Convergence*, Wiley Ser. Probab. Math. Statist. Probab. Math. Statist., John Wiley & Sons, New York, 1986.
- [22] V. N. Kolokoltsov, “Nonlinear Markov semigroups and interacting Lévy type processes”, *J. Stat. Phys.*, **126**:3 (2007), 585–642.

В. Н. Колокольцов

University of Warwick, United Kingdom,

Московский экономический институт

E-mail: v.kolokoltsov@warwick.ac.uk

Поступило

17.05.2010

Исправленный вариант

11.12.2010