Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Назайкинский, Асимптотические решения вырождающегося волнового уравнения с локализованными начальными данными, отвечающие различным самосопряженным расширениям, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 5, 797–800

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9122>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 11:43:22

Асимптотические решения вырождающегося волнового уравнения с локализованными начальными данными, отвечающие различным самосопряженным расширениям

В. Е. Назайкинский

1. Введение. Для волнового уравнения

$$\eta_{tt} - (c^2(x)\eta_x)_x \equiv (\partial_t^2 - \partial_x c^2(x)\partial_x)u = 0, \quad \eta = \eta(x, t), \quad x \in \mathbb{R}_+ = (0, \infty), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

с гладкой скоростью $c(x)$, стабилизирующей на бесконечности к постоянной $c_\infty > 0$, а при $x = 0$ вырождающейся так, что $c(x) = \sqrt{x}\kappa(x)$, где функция $\kappa(x)$ – гладкая и строго положительная вплоть до точки $x = 0$, рассмотрим задачу Коши с сосредоточенными вблизи точки $x = 1$ начальными условиями

$$\eta|_{t=0} = V\left(\frac{x-1}{\mu}\right), \quad \eta_t|_{t=0} = 0. \quad (2)$$

Здесь $V(y)$, $y \in \mathbb{R}$, – гладкая финитная вещественная функция, а μ – малый положительный параметр. Задача (1), (2) возникает при линейаризации одномерных уравнений мелкой воды и хорошо известна в т.н. теории наката (см., например, [1], [2] и цитированную там литературу). С математической точки зрения быстроосциллирующие асимптотические решения уравнения (1) изучались в [3], асимптотика при $\mu \rightarrow 0$ решения задачи (1), (2) была построена в [4], [5], а ее двумерного аналога со скоростью $c(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}$ – в [6]. Пространственная часть волнового оператора в уравнении (1) определялась в [3]–[6] как расширение по Фридрихсу оператора $\ell = -\partial_x c^2(x)\partial_x$, заданного на $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, что отвечает физически естественному условию конечности интеграла энергии [7], [8]. Однако у ℓ имеются и другие самосопряженные расширения, и асимптотики соответствующих решений при $\mu \rightarrow 0$ исследуются в данной заметке. Доказательства и обобщения анонсированных здесь результатов будут опубликованы отдельно.

2. Самосопряженные расширения оператора ℓ и задача Коши. Оператор ℓ с областью определения $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$ симметричен, положителен и имеет индексы дефекта (1, 1). Все его самосопряженные расширения могут быть описаны следующим образом (см., например, [5; теорема 1 и замечание 2]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть D_θ , $\theta \in [0, \pi)$, – линейное многообразие гладких функций $v(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, таких, что $v(x) = 0$ при достаточно больших x и справедливо представление $v(x) = a \ln x + b(x)$, где $b(x)$ – гладкая функция на замкнутой полуоси $\mathbb{R}_+$, причем $a \cos \theta + b(0) \sin \theta = 0$. Тогда оператор, определяемый дифференциальным выражением ℓ на D_θ , существенно самосопряжен в $L^2(\mathbb{R}_+)$, и соответствующие замыкания – самосопряженные операторы L_θ – при различных θ различны и исчерпывают все возможные самосопряженные расширения оператора ℓ с $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$. Все операторы L_θ полуограничены снизу, т.е. $(L_\theta \psi, \psi) \geq -C_\theta \|\psi\|^2$, $\psi \in D(L_\theta)$, с некоторой постоянной C_θ , где $\|\cdot\|$ и $(\cdot, \cdot)$ – соответственно норма и скалярное произведение в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Расширению по Фридрихсу отвечает значение $\theta = 0$.

Зафиксируем $\theta \in [0, \pi)$. Через (1_θ) обозначим уравнение (1), в котором волновой оператор определен как $\partial_t^2 + L_\theta$, и рассмотрим задачу Коши (1_θ) , (2). Пусть $\mathcal{C}_\theta^2([0, T])$ – пространство функций $v \in C^2([0, T]; L^2(\mathbb{R}_+))$, таких, что $v(t) \in D(L_\theta)$ при каждом $t \in [0, T]$ и $L_\theta v \in C([0, T]; L^2(\mathbb{R}_+))$. Сильным решением задачи Коши (1_θ) , (2) называется функция $\eta \in \mathcal{C}_\theta^2([0, T])$, удовлетворяющая уравнению (1_θ) и начальным условиям (2) (см. [7; п. 8.2]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 08-01-00726-а, 11-01-00973-а).

Для $\psi \in D(L_\theta)$ определим энергетическую норму формулой

$$\|\psi\|_\theta = [(\psi, L_\theta \psi) + (C_\theta + 1)\|\psi\|^2]^{1/2}. \quad (3)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любого $v \in \mathcal{C}_\theta^2([0, T])$ выполнено энергетическое неравенство

$$\|v(t)\|_\theta + \|v_t(t)\| \leq C(t) \left(\|v(0)\|_\theta + \|v_t(0)\| + \max_{\tau \in [0, t]} \|[(\partial_t^2 + L_\theta)v](\tau)\| \right), \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

где $C(t)$ – не зависящая от v непрерывная функция. В частности, задача Коши (1 $_\theta$), (2) корректна в норме (3).

3. Задача об асимптотике и ее редукция к случаю быстроосциллирующих решений. Пусть $\eta = \eta(\cdot, \mu) \in \mathcal{C}_\theta^2([0, T])$ – решение задачи Коши (1 $_\theta$), (2). Мы хотим найти такую функцию $\eta_{as} = \eta_{as}(\cdot, \mu) \in \mathcal{C}_\theta^2([0, T])$, что¹

$$\|\eta(t, \mu) - \eta_{as}(t, \mu)\|_\theta = O(\mu) \quad \text{при } \mu \rightarrow 0 \text{ равномерно по } t \in [0, T]. \quad (5)$$

Следуя [5], [9], сведем построение асимптотики η_{as} решения η при $\mu \rightarrow 0$ к построению некоторых быстроосциллирующих решений уравнения (1 $_\theta$). Пусть $S(x)$ – гладкая вещественная функция такая, что $S(1) = 0$ и $S'(1) = 1$, и пусть $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, $\varphi(x) = 1$ в окрестности точки $x = 1$ и $\varphi(x) = 0$ вне достаточно малой окрестности точки $x = 1$. Далее, пусть $V(y, \mu) = V(y) - \mu y^2 V'(y) S''(1)/2$, и пусть $\tilde{V}(\rho, \mu) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\rho x} V(y, \mu) dy$ – преобразование Фурье функции $V(y, \mu)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Выполнено соотношение

$$V\left(\frac{x-1}{\mu}\right) = 2 \operatorname{Re} \int_{\mu}^{\infty} \tilde{V}(\rho, \mu) e^{(i\rho/\mu)S(x)} \varphi(x) d\rho + R(x, \mu), \quad \text{где } \|R(\cdot, \mu)\|_\theta = O(\mu). \quad (6)$$

Рассмотрим задачу Коши с быстроосциллирующими начальными данными ($h \rightarrow 0$)

$$u_{tt} + L_\theta u = 0, \quad u|_{t=0} = e^{(i/h)S(x)} \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (7)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $u_{as} = u_{as}(\cdot, h) \in \mathcal{C}_\theta^2([0, T])$ – асимптотическое решение задачи (7) с точностью $O(h^2)$, т.е. начальные условия в (7) выполнены для u_{as} в точности, а $\|[(\partial_t^2 + L_\theta)u_{as}](t, h)\| = O(h^2)$ равномерно по $t \in [0, T]$. Тогда функция

$$\eta_{as}(t, \mu) = 2 \operatorname{Re} \int_{\mu}^{\infty} \tilde{V}(\rho, \mu) u_{as}\left(t, \frac{\mu}{\rho}\right) d\rho$$

удовлетворяет оценке (5), т.е. является асимптотикой решения задачи (1 $_\theta$), (2).

Действительно, $\|\eta(0, \mu) - \eta_{as}(0, \mu)\|_\theta + \|\eta_t(0, \mu) - (\eta_{as})_t(0, \mu)\| = O(\mu)$ в силу (2), (6) и (7),

$$\|[(\partial_t^2 + L_\theta)(\eta - \eta_{as})](t, \mu)\| \leq 2 \int_{\mu}^{\infty} |\tilde{V}(\rho, \mu)| \left\| [(\partial_t^2 + L_\theta)u_{as}]\left(t, \frac{\mu}{\rho}\right) \right\| d\rho \leq C \int_{\mu}^{\infty} \frac{\mu^2 d\rho}{\rho^2} = C\mu,$$

и остается применить предложение 2.

4. Канонический оператор для задачи (7). Асимптотическое решение u_{as} задачи (7) при малых t выражается через канонический оператор Маслова [10], [11] на лагранжевых многообразиях, получаемых сдвигом начального многообразия $\{p = S'(x)\}$ на время $\pm t$ вдоль траекторий системы Гамильтона $\dot{x} = c(x) \operatorname{sign} p$, $\dot{p} = -c'(x)|p|$, отвечающей

¹Из (5), в частности, следует, что $|\eta(x, t, \mu) - \eta_{as}(x, t, \mu)| \leq C_K \mu$, $x \in K$, для любого компактного подмножества $K \subset \mathbb{R}_+$. Более тонкие поточечные оценки будут даны в подробной публикации.

гамильтониану $H(x, p) = c(x)|p|$. (Проще всего, пользуясь свободой в выборе функции $S(x)$, взять начальное многообразие, инвариантное относительно системы Гамильтона. Тогда решение при разных t выражается через канонический оператор на одном и том же лагранжевом многообразии.) Однако при больших t конструкция канонического оператора из [10], [11] в данной задаче не применима, поскольку траектории этой системы уходят на бесконечность по импульсу p за конечное время (одновременно заходя по координате x в точку вырождения $x = 0$), и как только волна доходит до точки $x = 0$, носитель функции, к которой следовало бы применить канонический оператор, становится некомпактным. Таким образом, определение канонического оператора необходимо расширить, причем так, что получающиеся в результате его применения функции будут принадлежать области определения $D(L_\theta)$ оператора L_θ . Для $\theta = 0$ соответствующее определение канонического оператора было дано в [3]–[5], здесь же мы рассмотрим случай $\theta \neq 0$. Для упрощения формул всюду далее считаем, что $c(1) = \kappa(0) = 1$.

Пусть $\Lambda_\pm = \{(x, p) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, p = \pm c^{-1}(x)\}$ и $\Lambda = \Lambda_+ \cup \Lambda_-$. Лагранжево многообразие Λ является линией уровня гамильтониана ($\Lambda = \{(x, p) : H(x, p) = 1\}$), а каждая из его компонент $\Lambda_\pm$ – траекторией гамильтонова векторного поля. В качестве глобальной координаты на Λ возьмем время τ вдоль траектории, считая, что момент времени $\tau = 0$ соответствует уходу траектории в бесконечно удаленную точку $(x, p) = (0, \pm\infty)$; тогда $\tau = \pm \int_0^x c(\xi)^{-1} d\xi$ (верхний знак соответствует Λ_+ , а нижний – Λ_-), и координата τ изменяется на полуоси $(0, \infty)$ для Λ_+ и полуоси $(-\infty, 0)$ для Λ_- . Через $\hat{C}_0^\infty(\Lambda)$ обозначим пространство кусочно гладких функций $\varphi(\tau)$ с компактным носителем, гладких при $\tau \neq 0$. Таким образом, сужения функции $\varphi \in \hat{C}_0^\infty(\Lambda)$ на $\Lambda_\pm$ суть финитные гладкие функции на $[0, \infty)$ и $(-\infty, 0]$ соответственно.

Определим на Λ канонический оператор. Для этого покроем Λ каноническими картами $U_+ = \{\tau > \tau_0\}$, $U_- = \{\tau < -\tau_0\}$ с канонической координатой x (“неособые” карты) и $\tilde{U}_+ = \{0 < \tau < 2\tau_0\}$, $\tilde{U}_- = \{0 > \tau > -2\tau_0\}$ с канонической координатой p (“особые” карты). Здесь $\tau_0 > 0$ – достаточно малое число. Фазы (действия) и якобианы в канонических картах задаются формулами (в правых частях которых τ, p, x понимаются как функции на Λ , выраженные через каноническую координату в соответствующей карте)

$$S_\pm(x) = \tau - \int_0^1 \frac{d\xi}{c(\xi)}, \quad J_\pm(x) = \pm c(x) \quad \text{в } U_\pm,$$

$$\tilde{S}_\pm(p) = S_\pm(x) - px, \quad \tilde{J}_\pm(p) = -c'(x)|p| \quad \text{в } \tilde{U}_\pm.$$

При этом $S_+(1) = 0$, $S'_+(1) = 1$, $S_+(0) = S_-(0)$. Аргументы якобианов выберем по правилу $\arg J_+(x) = 0$, $\arg \tilde{J}_+(p) = \pi$, $\arg J_-(x) = \arg \tilde{J}_-(p) = -\pi$. Через $\hat{C}_0^\infty(U_\pm)$ ($= C_0^\infty(U_\pm)$) и $\hat{C}_0^\infty(\tilde{U}_\pm)$ обозначим пространства функций из $\hat{C}_0^\infty(\Lambda)$ с носителями в соответствующих канонических картах. Определим локальные канонические операторы

$$K_\pm^h : \hat{C}_0^\infty(U_\pm) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+), \quad [K_\pm^h \varphi](x) = e^{(i/h)S_\pm(x)} J_\pm^{-1/2}(x) \varphi(x),$$

$$\tilde{K}_\pm^h : \hat{C}_0^\infty(\tilde{U}_\pm) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+), \quad [\tilde{K}_\pm^h \varphi](x) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi h}} \int_0^\infty e^{(i/h)(\tilde{S}_\pm(\pm p) \pm px)} \tilde{J}_\pm^{-1/2}(\pm p) \varphi(\pm p) dp,$$

где ветви квадратных корней из якобианов выбираются в соответствии с зафиксированными выше значениями аргумента, а несобственные интегралы во второй строке понимаются как осцилляторные интегралы [12; § 7.8], и канонический оператор

$$K^h : \hat{C}_0^\infty(\Lambda) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+), \quad K^h \varphi = K_+^h(e_+ \varphi) + K_-^h(e_- \varphi) + \tilde{K}_+^h(\tilde{e}_+ \varphi) + \tilde{K}_-^h(\tilde{e}_- \varphi), \quad (8)$$

где $1 = e_+ + e_- + \tilde{e}_+ + \tilde{e}_-$ – разбиение единицы в $\hat{C}_0^\infty(\Lambda)$, подчиненное покрытию многообразия Λ картами $U_\pm, \tilde{U}_\pm$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\varphi \in \widehat{C}_0^\infty(\Lambda)$. Тогда $K^h \varphi = a(h) \ln x + b(x, h)$, где функция $b(x, h)$ непрерывна при $x = 0$ и выполнены соотношения

$$a(h) = \frac{e^{-i\pi/4 + (i/h)S_+(0)}}{\sqrt{2\pi h}} (\varphi_- - \varphi_+),$$

$$b(0, h) = \frac{e^{-i\pi/4 + (i/h)S_+(0)}}{\sqrt{2\pi h}} \left\{ A(h)\varphi_+ - \bar{A}(h)\varphi_- + \sum_{j=1}^{n-1} h^j [(D_j^+ \varphi)_+ + (D_j^- \varphi)_-] \right\} + O(h^n),$$

где $A(h) = \pi i - 2\gamma + 2 \ln h$, γ – постоянная Эйлера, $D_j^\pm$ – дифференциальные операторы порядка не выше j , а нижние индексы $\pm$ у φ и $D_j^\pm \varphi$ обозначают предельные значения справа и слева при $\tau = 0$.

Для $\varphi \in \widehat{C}_0^\infty(\Lambda)$ обозначим $T(\varphi) = a(h) \cos \theta + b(0, h) \sin \theta$. Пусть $\widehat{C}_\theta^\infty(\Lambda)$ – пространство функций $\varphi \in \widehat{C}_0^\infty(\Lambda)$, зависящих от h так, что они равномерно по h ограничены вместе со всеми производными и $T(\varphi) = O(h^\infty)$. Пусть $\psi_0(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, $\psi_0(0) = 1$. Положим

$$K_\theta^h \varphi = K^h \varphi - T(\varphi) \psi_0 \operatorname{cosec} \theta, \quad \varphi \in \widehat{C}_\theta^\infty(\Lambda).$$

Тогда $K_\theta^h \varphi \in D(L_\theta)$ в силу теоремы 1 и определения оператора L_θ . Далее, из теоремы 1 вытекает, что функция $\varphi(x, h)$, имеющая асимптотическое разложение $\varphi \sim \sum_{k=0}^\infty h^k \varphi_k$, где функции $\varphi_k \in \widehat{C}_0^\infty(\Lambda)$ сами зависят от h , но равномерно по h ограничены вместе с производными, принадлежит пространству $\widehat{C}_\theta^\infty(\Lambda)$, если скачки функций φ_k при $\tau = 0$ удовлетворяют рекурсивной цепочке условий сопряжения

$$\varphi_{0+} = \frac{\cos \theta - \bar{A}(h) \sin \theta}{\cos \theta - A(h) \sin \theta} \varphi_{0-}, \quad \varphi_{k+} = \frac{(\cos \theta - \bar{A}(h) \sin \theta) \varphi_{k-} + F_k(h)}{\cos \theta - A(h) \sin \theta}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $F_k(h)$ зависит только от значений функций $\varphi_0, \dots, \varphi_{k-1}$ и их производных порядка не выше k при $\tau = 0$ и равномерно ограничено по h . Дальнейшее построение асимптотических решений следует [5], и мы опускаем его за недостатком места.

Автор признателен профессору С. Ю. Доброхотову за поддержку и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. J. Stoker, *Water Waves. The Mathematical Theory with Applications*, Pure Appl. Math., 4, Interscience Publ., New York, 1957. [2] Е. Н. Пелиновский, *Гидродинамика волн цунами*, ИПФ РАН, Нижний Новгород, 1996. [3] Т. Vukašinac, P. Zhevandrov, *Russ. J. Math. Phys.*, **9**:3 (2002), 371–381. [4] С. Ю. Доброхотов, Б. Тироцци, *УМН*, **65**:1 (2010), 185–186. [5] S. Yu. Dobrokhoto, V. E. Nazaikinskii, B. Tirozzi, *Russ. J. Math. Phys.*, **17**:4 (2010), 434–447. [6] С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский, Б. Тироцци, *Алгебра и анализ*, **22**:6 (2010), 67–90. [7] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, ЛГУ, Л., 1980. [8] В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1981. [9] S. Yu. Dobrokhoto, S. O. Sinitsyn, B. Tirozzi, *Russ. J. Math. Phys.*, **14**:1 (2007), 28–56. [10] В. П. Маслов, М. В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*, Наука, М., 1976. [11] А. С. Мищенко, Б. Ю. Стернин, В. Е. Шаталов, *Лагранжесвы многообразия и метод канонического оператора*, Наука, М., 1978. [12] Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, т. 1: *Теория распределений и анализ Фурье*, Мир, М., 1986.

В. Е. Назайкинский

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,

Московский физико-технический институт

(государственный университет)

E-mail: nazaikinskii@yandex.ru

Поступило

18.11.2010

исправленный вариант

07.12.2010