Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, Вещественные четырехмерные M -триквადрики, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 6, 884–892

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9124>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 18:07:50

Вещественные четырехмерные M -триквадрики

В. А. Краснов

В работе рассматриваются неособые максимальные пересечения трех вещественных шестимерных квадрик. Такие многообразия мы для краткости называем вещественными четырехмерными M -триквадриками. В данной статье вычисляются размерности пространств когомологий триквадрик с коэффициентами в поле из двух элементов.

Библиография: 4 названия.

1. Формулировка основного результата. Сначала приведем несколько обозначений и определений. Пусть даны линейно независимые квадратичные формы с вещественными коэффициентами

$$q_1(X_0, \dots, X_7) = q_1(X), \quad q_2(X_0, \dots, X_7) = q_2(X), \quad q_3(X_0, \dots, X_7) = q_3(X). \quad (1.1)$$

Тогда можно рассмотреть связку квадрик в комплексном проективном пространстве $\mathbb{P}^7$

$$\lambda_1 q_1(X) + \lambda_2 q_2(X) + \lambda_3 q_3(X) = 0. \quad (1.2)$$

Пусть M_1, M_2, M_3 – матрицы квадратичных форм (1.1). Тогда рассмотрим уравнение

$$\det(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3) = 0. \quad (1.3)$$

Будем предполагать, что это уравнение задает неособую кривую на комплексной проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ с однородными координатами $(\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3)$. Тогда система уравнений

$$q_1(X_0, \dots, X_7) = 0, \quad q_2(X_0, \dots, X_7) = 0, \quad q_3(X_0, \dots, X_7) = 0$$

определяет неособое четырехмерное комплексное многообразие $V \subset \mathbb{P}^7$, инвариантное относительно инволюции комплексного сопряжения $\tau: \mathbb{P}^7 \rightarrow \mathbb{P}^7$. Такое многообразие будем называть *вещественной триквадрикой*. Связка квадрик (1.2) восстанавливается из триквадрики V . Она состоит из квадрик, проходящих через триквадрику V .

Рассмотрим двумерную сферу $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, заданную уравнением $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$. На этой сфере определена целочисленная функция $I(\lambda) = I_V(\lambda)$, равная отрицательному индексу инерции квадратичной формы

$$q_\lambda(X) = \lambda_1 q_1(X) + \lambda_2 q_2(X) + \lambda_3 q_3(X). \quad (1.4)$$

Эта функция называется *индекс-функцией* триквадрики V . В общем случае индекс-функция $I(\lambda)$ удовлетворяет неравенствам $0 \leq I(\lambda) \leq 8$. Рассмотрим уравнение (1.3), оно определяет кривую $C = C_V$ степени 8 в комплексной плоскости $\mathbb{P}^2$. Эта кривая называется *спектральной кривой* триквадрики V (см. [1]). По нашему предположению кривая C неособая. Спектральная кривая $C \subset \mathbb{P}^2$ также имеет вещественную структуру $\tau: C \rightarrow C$, через $\mathbb{R}C \subset \mathbb{RP}^2$ будем обозначать вещественную часть кривой C . Индекс-функция $I(\lambda)$ имеет точки разрыва на кривой $\Gamma = \Gamma_V \subset S^2$, равной прообразу вещественной части $\mathbb{R}C$ спектральной кривой C при проекции $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$. Функция $I(\lambda)$ также удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) функция $I(\lambda)$ полунепрерывна снизу;
- 2) при переходе через компоненты связности кривой Γ значения функции $I(\lambda)$ изменяются на ± 1 ;
- 3) в точках непрерывности выполняется равенство

$$I(-\lambda) = 8 - I(\lambda);$$

- 4) в точках разрыва выполняется равенство

$$I(-\lambda) = 7 - I(\lambda).$$

Напомним, что вещественное алгебраическое многообразие V называется M -многообразием, если неравенство Гарнака–Смита–Тома

$$\sum_{i \geq 0} \dim H^i(\mathbb{R}V) \leq \sum_{i \geq 0} \dim H^i(V)$$

становится равенством, где когомологии рассматриваются с коэффициентами в поле из двух элементов $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$. Далее все группы когомологий рассматриваются с коэффициентами в поле $\mathbb{F}_2$, причем размерность пространства $H^i(\cdot)$ обозначается через $h^i(\cdot)$.

На спектральной кривой C определено вещественное линейное расслоение $L = L_V$, называемое *спектральным расслоением* триквадрики V . Если $\lambda \in C$, то слой L_λ равен ядру квадратичной формы (1.4) в пространстве $\mathbb{C}^8$. (Так как мы предполагаем, что спектральная кривая C неособая, то ядро квадратичной формы $q_\lambda(X)$ – одномерное подпространство $\mathbb{C}^8$ (см. [1]).)

Из теорем в работе [2] для триквадрик произвольной четной размерности вытекает теорема для четырехмерных триквадрик.

ТЕОРЕМА 1.1. *Для вещественной четырехмерной триквадрики V справедливы следующие утверждения.*

1) Пусть триквадрика V является M -многообразием. Тогда спектральная кривая C триквадрики V также будет M -многообразием, а для индекс-функции $I(\lambda)$ выполняются неравенства

$$3 \leq I(\lambda) \leq 5, \tag{1.5}$$

а также выполняются равенства

$$h^0(\mathbb{R}V) = 1, \quad h^1(\mathbb{R}V) = n + 1, \quad h^2(\mathbb{R}V) = 2p,$$

где p, n – соответственно число четных и нечетных овалов кривой $\mathbb{R}C \subset \mathbb{RP}^2$.

2) Пусть спектральная кривая C триквადрики V является M -кривой, а для индекс-функции $I(\lambda)$ выполняются неравенства (1.5). Тогда триквадрика V является M -многообразием или $(M - 2)$ -многообразием, причем в случае $(M - 2)$ -многообразия выполняются равенства

$$h^0(\mathbb{R}V) = 1, \quad h^1(\mathbb{R}V) = n, \quad h^2(\mathbb{R}V) = 2p - 2.$$

3) Пусть спектральная кривая C триквадрики V является M -кривой с вещественной схемой

$$\langle 1\langle a_1 \rangle \sqcup \cdots \sqcup 1\langle a_r \rangle \sqcup b \rangle, \quad (1.6)$$

а для индекс-функции $I(\lambda)$ выполняются неравенства (1.5). Тогда триквадрика V будет M -многообразием тогда и только тогда, когда на нечетных овалах кривой $\mathbb{R}C \subset \mathbb{R}P^2$ вещественная часть $\mathbb{R}L$ спектрального расслоения L тривиальна.

Заметим, что для M -кривых степени 8 вещественная схема может иметь вид (1.6) с $r = 1, 2, 3$, но, кроме этого, возможна схема (см., например, таблицу 1 в работе [3])

$$\langle 1\langle a \sqcup 1\langle b \rangle \rangle \sqcup c \rangle. \quad (1.7)$$

Рис. 1

Будем предполагать, что овалы кривой $\mathbb{R}C$ обозначены так, как показано на рис. 1. Здесь мы применяем обозначения: $a + b + 2 = m$, $a + b + c + 2 = s$. Положим $\varepsilon(C_i) = 0$, $i = 1, \dots, s$, если расслоение $\mathbb{R}L$ тривиально на овале C_i , в противном случае $\varepsilon(C_i) = 1$. В настоящей заметке будет доказана

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть спектральная кривая C вещественной четырехмерной триквадрики V является M -кривой и имеет вещественную схему (1.7), причем овалы кривой $\mathbb{R}C$ обозначены так, как показано на рис. 1. Кроме этого, пусть выполняются неравенства (1.5). Тогда триквадрика V будет M -многообразием тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$\varepsilon(C_i) = 0, \quad i = 2, \dots, a + 1, \quad \varepsilon(C_{a+2}) + \cdots + \varepsilon(C_m) = 0. \quad (1.8)$$

Заметим, что условия теоремы 1.2 реализуются (см. [2]).

2. Доказательство основного результата. В этом пункте мы докажем теорему 1.2, но сначала будет доказано несколько лемм.

Для триквадрики V рассмотрим на сфере S^2 семейство векторных пространств $F_+ = F_+(V)$, которое устроено следующим образом. Если $\lambda \in S^2$, то слой $(F_+)_\lambda$ равен линейной оболочке собственных векторов в пространстве $\mathbb{R}^8$ матрицы

$$M(\lambda) = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3,$$

отвечающих положительным собственным значениям. Пусть $\mathbb{P}(F_+)$ – проективизация семейства векторных пространств F_+ . Тогда всегда существует гомотопическая эквивалентность пространства $\mathbb{P}(F_+)$ с многообразием $\mathbb{RP}^7 \setminus \mathbb{R}V$. Она строится следующим образом. Пусть L_+ – открытое подмножество произведения $S^2 \times \mathbb{RP}^7$, заданное неравенством

$$L_+ = \{(\lambda, x) \in S^2 \times \mathbb{RP}^7 \mid q_\lambda(x) > 0\}.$$

Тогда проекция

$$p: S^2 \times \mathbb{RP}^7 \rightarrow \mathbb{RP}^7$$

индуцирует гомотопическую эквивалентность $p: L_+ \rightarrow \mathbb{RP}^7 \setminus \mathbb{R}V$ (см. [1]). С другой стороны отображение вложения $\mathbb{P}(F_+) \hookrightarrow L_+$ также индуцирует гомотопическую эквивалентность.

Спектральная последовательность Лере проекции $\pi: \mathbb{P}(F_+) \rightarrow S^2$ имеет вид (см. [4], [1])

$$E_2^{i,j} = H^i(\Omega_{7-j}) \implies H^{i+j}(\mathbb{P}(F_+)) = H^{i+j}(L_+) = H^{i+j}(\mathbb{RP}^7 \setminus \mathbb{R}V). \quad (2.1)$$

Из спектральной последовательности (2.1) в случае, когда выполняются неравенства (1.5), вытекает равенство

$$H^5(\mathbb{P}(F_+)) = H^1(\Omega_3).$$

Поэтому если t – базисный элемент одномерного пространства $H^1(\mathbb{RP}^7)$, то элемент $p^*(t^5)$ принадлежит пространству $H^1(\Omega_3)$. Этот элемент будем обозначать через $w_1(F_+)$ и называть *первым характеристическим классом Штифеля–Уитни семейства векторных пространств F_+* .

ЛЕММА 2.1. Пусть для триквадрики V выполняются неравенства (1.5). Тогда справедливо утверждение: гомоморфизм

$$H_2(\mathbb{R}V) \rightarrow H_2(\mathbb{RP}^7) \quad (2.2)$$

не равен нулю тогда и только тогда, когда $w_1(F_+(V)) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из точной гомологической последовательности пары $(\mathbb{RP}^7, \mathbb{R}V)$

$$\dots \rightarrow H_2(\mathbb{R}V) \rightarrow H_2(\mathbb{RP}^7) \rightarrow H_2(\mathbb{RP}^7, \mathbb{R}V) \rightarrow \dots$$

получаем утверждение: гомоморфизм (2.2) не равен нулю тогда и только тогда, когда гомоморфизм

$$H_2(\mathbb{RP}^7) \rightarrow H_2(\mathbb{RP}^7, \mathbb{R}V)$$

равен нулю. Применим двойственность Пуанкаре–Лефшеца, тогда получим утверждение: гомоморфизм (2.2) не равен нулю тогда и только тогда, когда гомоморфизм ограничения

$$H^5(\mathbb{RP}^7) \rightarrow H^5(\mathbb{RP}^7 \setminus \mathbb{R}V) \quad (2.3)$$

равен нулю. Осталось заметить, что из верхних конструкций вытекает, что образ элемента t^5 при гомоморфизме (2.3) равен элементу $p^*(t^5) \in H^5(\mathbb{P}(F_+))$, если использовать равенство $H^5(\mathbb{P}(F_+)) = H^5(\mathbb{RP}^7 \setminus \mathbb{R}V)$. Лемма доказана.

Характеристический класс $w_1(F_+)$ можно вычислять через характеристики расслоения $\mathbb{R}L_V$. Чтобы понять, как это делается, сделаем несколько замечаний. Прежде всего заметим, что ограничение семейства векторных пространств F_+ на замкнутое множество Ω_3 не является векторным расслоением, но ограничение его на внутренность $\mathring{\Omega}_3$ уже является векторным расслоением. Так как $H^1(\Omega_3) = H^1(\mathring{\Omega}_3)$, то можно считать, что $w_1(F_+(V)) \in H^1(\mathring{\Omega}_3)$.

ЛЕММА 2.2. *Если для триквадрики V выполняются неравенства (1.5), то выполняется следующее равенство:*

$$w_1(F_+(V)) = w_1(F_+(V)|_{\mathring{\Omega}_3}),$$

где $w_1(F_+(V)|_{\mathring{\Omega}_3})$ – первый характеристический класс Штифеля–Уитни векторного расслоения $F_+(V)|_{\mathring{\Omega}_3}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим гомоморфизм ограничения спектральной последовательности Лере для проекции $\pi: \mathbb{P}(F_+) \rightarrow S^2$ в спектральную последовательность Лере для проекции $\pi: \mathbb{P}(F_+|_{\mathring{\Omega}_3}) \rightarrow \mathring{\Omega}_3$. Тогда получим равенства

$$H^5(\mathbb{P}(F_+)) = H^5(\mathbb{P}(F_+|_{\mathring{\Omega}_3})) = H^1(\mathring{\Omega}_3).$$

Осталось заметить, что класс когомологий

$$p^*(t^5) \in H^5(\mathbb{P}(F_+|_{\mathring{\Omega}_3})) = H^1(\mathring{\Omega}_3)$$

равен обычному первому характеристическому классу Штифеля–Уитни векторного расслоения $F_+|_{\mathring{\Omega}_3}$. Лемма доказана.

Рассмотрим проекцию $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$. Прообраз каждого овала C_i при этой проекции состоит из двух овалов, обозначим эти овалы через O_i, O'_i . Разрежем сферу S^2 на две части S, S' таким образом, чтобы один из овалов O_i, O'_i находился на S , а другой – на S' . Мы можем считать, что овал O_i находится на S , а овал O'_i на S' , в противном случае нужно переобозначить овалы O_i, O'_i . Разность $S \setminus \bigcup_i O_i$ состоит из нескольких областей. Через D_i обозначим область, для которой овал O_i является внешней границей. Эти обозначения отражены на рис. 2.

Мы можем считать, что на области D_1 индекс-функция $I(\lambda)$ принимает значения равные 3. В противном случае нужно переобозначить части S, S' , а также, соответственно, переобозначить овалы O_i, O'_i . Тогда на областях $D_2, \dots, D_{a+2}$ индекс-функция $I(\lambda)$ обязана принимать значения равные 4. Также мы можем считать, что существуют числа $k \in a+3, \dots, m, l \in m+1, \dots, n$ такие, что на областях $D_{a+3}, \dots, D_k, D_{m+1}, \dots, D_l$ индекс-функция $I(\lambda)$ принимает значения равные 3, а на

Рис. 2

областях $D_{k+1}, \dots, D_m, D_{l+1}, \dots, D_s$ индекс-функция $I(\lambda)$ принимает значения равные 5. Заметим, что выполняется равенство $H^1(\Omega_3) = H^1(D_1)$. Векторное пространство $H^1(D_1)$ разлагается в прямую сумму одномерных пространств

$$H^1(D_1) = \mathbb{F}_2 e_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{F}_2 e_{a+2},$$

где базисные элементы $e_2, \dots, e_{a+2}$ определяются равенством

$$e_i([O_j]) = \delta_{ij}, \quad i, j \in 2, \dots, a+2.$$

ЛЕММА 2.3. *Выполняется равенство*

$$w_1(F_+) = \varepsilon(C_2)e_2 + \dots + \varepsilon(C_{a+1})e_{a+1} + (\varepsilon(C_{a+2}) + \dots + \varepsilon(C_m))e_{a+2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Одномерное векторное расслоение $\pi^*(\mathbb{R}L)$ на кривой $\Gamma \subset S^2$ обозначим через E . На замкнутых областях $\overline{D}_1, \overline{D}_{a+3}, \dots, \overline{D}_k$ рассмотрим пятимерное векторное расслоение F , каждый слой которого F_λ равен линейной оболочке собственных векторов в $\mathbb{R}^8$ матрицы $M(\lambda)$, отвечающих неотрицательным собственным значениям. Из леммы 2.2 следует, что выполняется равенство $w_1(F_+) = w_1(F)$. Обозначим характеристический класс $w_1(F)$ через w . На замкнутой области $\overline{D}_{a+2}$ рассмотрим четырехмерное векторное расслоение G , слои которого G_λ устроены следующим образом. Если $\lambda \in D_{a+2} \cup O_{a+2} \cup \dots \cup O_k$, то $G_\lambda = (F_+)_\lambda$. Если $\lambda \in O_{k+1} \cup \dots \cup O_m$, то слой G_λ равен линейной оболочке собственных векторов в $\mathbb{R}^8$ матрицы $M(\lambda)$, отвечающих неотрицательным собственным значениям.

Выполняются следующие равенства:

$$F|_{O_i} = (F_+)|_{O_i} \oplus E|_{O_i}, \quad i \in 2, \dots, a+1, \quad (2.4)$$

$$F|_{O_i} = G|_{O_i} \oplus E|_{O_i}, \quad i \in a+2, \dots, k, \quad (2.5)$$

$$G|_{O_i} = (F_+)|_{O_i} \oplus E|_{O_i}, \quad i \in k+1, \dots, m. \quad (2.6)$$

При $i \in 2, \dots, a+1$ семейство векторных пространств F_+ на замкнутой области $\overline{D}_i$ является тривиальным четырехмерным векторным расслоением, поэтому имеем $w_1((F_+)|_{O_i}) = 0$. Следовательно, из равенства (2.4) получаем следующее равенство:

$$w([O_i]) = \varepsilon(C_i), \quad i \in 2, \dots, a+1. \quad (2.7)$$

Аналогично, из равенства (2.6) вытекает равенство

$$w_1(G)([O_i]) = \varepsilon(C_i), \quad i \in k+1, \dots, m. \quad (2.8)$$

Из равенства (2.5) при $i = a+2$ получаем равенство

$$w([O_{a+2}]) = w_1(G)([O_{a+2}]) + \varepsilon(C_{a+2}). \quad (2.9)$$

С другой стороны, выполняется равенство

$$w_1(G)([O_{a+2}]) = w_1(G)([O_{a+3}]) + \dots + w_1(G)([O_m]).$$

Поэтому равенство (2.9) можно записать следующим образом:

$$w([O_{a+2}]) = w_1(G)([O_{a+3}]) + \dots + w_1(G)([O_m]) + \varepsilon(C_{a+2}). \quad (2.10)$$

Так как расслоение F тривиально на замкнутой области $\bar{D}_i$ при $i \in a+3, \dots, k$, то из равенства (2.5) получаем равенство, аналогичное равенству (2.8):

$$w_1(G)([O_i]) = \varepsilon(C_i), \quad i \in a+3, \dots, k.$$

Следовательно, равенство (2.10) можно записать следующим образом:

$$w([O_{a+2}]) = \varepsilon(C_{a+2}) + \dots + \varepsilon(C_m).$$

Осталось заметить, что из этого равенства и равенств (2.7) получаем равенства в утверждении леммы. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.4. Если индекс-функция $I(\lambda)$ триквადрики V принимает значение равное 3, то гомоморфизм

$$H_3(\mathbb{R}V) \rightarrow H_3(\mathbb{R}\mathbb{P}^7)$$

равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая так же, как при доказательстве леммы 2.1, получим, что достаточно проверить неравенство

$$p^*(t^4) \neq 0, \quad \text{где } p^*(t^4) \in H^4(\mathbb{P}(F_+)).$$

Если $I(\hat{\lambda}) = 3$, то слой $\pi^{-1}(\hat{\lambda})$ для проекции $\pi: \mathbb{P}(F_+) \rightarrow S^2$ равен четырехмерному проективному подпространству $\mathbb{P}((F_+)_{\hat{\lambda}}) \subset \mathbb{P}(\mathbb{R}^8)$. Поэтому ограничение элемента $p^*(t^4)$ на этот слой не равно нулю. Лемма доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 1.2. Из равенств

$$h^0(\Omega_1) = h^1(\Omega_2) = h^2(\Omega_3) = h^0(\Omega_2) = h^2(\Omega_4) = 0, \quad h^1(\Omega_3) = n$$

и спектральной последовательности (2.1) получаем равенства

$$h^6(\mathbb{R}\mathbb{P}^7 \setminus \mathbb{R}V) = 0, \quad h^5(\mathbb{R}\mathbb{P}^7 \setminus \mathbb{R}V) = n.$$

Применим двойственность Пуанкаре–Лефшеца; тогда получим равенства

$$h^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^7, \mathbb{R}V) = 0, \quad h^2(\mathbb{R}\mathbb{P}^7, \mathbb{R}V) = n. \quad (2.11)$$

Из равенств

$$h^0(\Omega_3) = p, \quad h^1(\Omega_4) = p - 1, \quad h^2(\Omega_5) = 1$$

и спектральной последовательности (2.1) следует, что если дифференциал

$$d_2^{0,3}: E_2^{0,3} = H^0(\Omega_4) \rightarrow E_2^{2,2} = H^2(\Omega_5) \quad (2.12)$$

равен нулю, то выполняется равенство

$$h^4(\mathbb{RP}^7 \setminus \mathbb{R}V) = 2p,$$

в противном случае

$$h^4(\mathbb{RP}^7 \setminus \mathbb{R}V) = 2p - 1.$$

Применим двойственность Пуанкаре–Лефшеца, тогда получим, что если дифференциал (2.12) равен нулю, то выполняется равенство

$$h^3(\mathbb{RP}^7, \mathbb{R}V) = 2p, \quad (2.13)$$

в противном случае

$$h^3(\mathbb{RP}^7, \mathbb{R}V) = 2p - 1. \quad (2.14)$$

Из леммы 2.4 следует, что гомоморфизм ограничения

$$H^3(\mathbb{RP}^7) \rightarrow H^3(\mathbb{R}V)$$

равен нулю. Применим равенство $h^1(\mathbb{RP}^7, \mathbb{R}V) = 0$, тогда из длинной точной последовательности когомологий пары $(\mathbb{RP}^7, \mathbb{R}V)$ получаем точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(\mathbb{RP}^7) \rightarrow H^1(\mathbb{R}V) \rightarrow H^2(\mathbb{RP}^7, \mathbb{R}V) \\ \rightarrow H^2(\mathbb{RP}^7) \rightarrow H^2(\mathbb{R}V) \rightarrow H^3(\mathbb{RP}^7, \mathbb{R}V) \rightarrow H^3(\mathbb{RP}^7) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Рассмотрим гомоморфизм ограничения

$$H^2(\mathbb{RP}^7) \rightarrow H^2(\mathbb{R}V). \quad (2.16)$$

Из равенств (2.11), (2.13), (2.14) и точной последовательности (2.15) вытекает, что формально могут реализоваться следующие случаи:

- 1) гомоморфизм (2.16) ненулевой, а дифференциал (2.12) равен нулю; тогда выполняются равенства

$$h^1(\mathbb{R}V) = n + 1, \quad h^2(\mathbb{R}V) = 2p;$$

- 2) гомоморфизм (2.16) ненулевой и дифференциал (2.12) не равен нулю; тогда выполняются равенства

$$h^1(\mathbb{R}V) = n + 1, \quad h^2(\mathbb{R}V) = 2p - 1;$$

- 3) гомоморфизм (2.16) нулевой и дифференциал (2.12) равен нулю; тогда выполняются равенства

$$h^1(\mathbb{R}V) = n, \quad h^2(\mathbb{R}V) = 2p - 1;$$

- 4) гомоморфизм (2.16) нулевой, а дифференциал (2.12) не равен нулю; тогда выполняются равенства

$$h^1(\mathbb{R}V) = n, \quad h^2(\mathbb{R}V) = 2p - 2.$$

Так как выполняются равенства

$$p + n = 22, \quad h^0(\mathbb{R}V) = 1, \quad \sum_{i \geq 0} h^i(V) = 48$$

и сравнение

$$\sum_{i \geq 0} h^i(\mathbb{R}V) \equiv \sum_{i \geq 0} h^i(V) \pmod{2},$$

то второй и третий случаи не реализуются. Заметим, что в первом случае триквадрика V будет M -многообразием, а в четвертом случае триквадрика V будет $(M - 2)$ -многообразием.

Для окончания доказательства теоремы 1.2 остается применить леммы 2.1, 2.3.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Degtyarev, I. Itenberg, V. Kharlamov, “On the number of components of a complete intersection of real quadrics”, *Perspectives in Analysis, Geometry, and Topology*, Progr. Math., **296**, Birkhäuser-Verlag, New York, 2012, 81–107, arXiv: 0806.4077v2.
- [2] В. А. Краснов, “Максимальные пересечения трех вещественных квадрик”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:3 (2011), 127–146.
- [3] S. Yu. Orevkov, “723–755”, *Geom. Funct. Anal.*, **12**:4 (2002).
- [4] А. А. Аграчев, “Гомологии пересечений вещественных квадрик”, *ДАН СССР*, **299**:5 (1988), 1033–1036.

В. А. Краснов

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

E-mail: krasnov@uniyar.ac.ru

Поступило

21.01.2011