Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Костромина, Исследование некоторых групп гомоморфизмов абелевых групп, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 6, 942–945

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9125>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 11:34:10

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Исследование некоторых групп гомоморфизмов абелевых групп

Ю. В. Костромина

1. Актуальность исследования. В последние годы значительное внимание в теории абелевых групп уделяется изучению групп гомоморфизмов, расширений, тензорных произведений. Это связано с многочисленными приложениями этих вопросов в смежных областях. Изучению строения групп гомоморфизмов посвящено значительное число работ, в то же время упомянутые задачи еще далеки от своего полного разрешения. Классическим объектом в математике является мультипликативная группа некоторого поля. Поэтому несомненный интерес представляет задача об описании групп гомоморфизмов в такие группы. Эта задача должна иметь приложения в смежных областях. Исследование таких групп началось в статье Себельдина и Силла [1]. В своей статье они описали некоторые группы гомоморфизмов в мультипликативные группы рациональных, действительных, комплексных и конечных полей.

В настоящей работе продолжают исследования Себельдина и Силла. Результаты могут быть использованы при изучении групп гомоморфизмов абелевых групп, могут применяться при решении аналогичных задач в теории групп и модулей.

2. Группа гомоморфизмов из абелевой группы в мультипликативную группу простого алгебраического расширения поля рациональных чисел. В данной работе мы рассматриваем только абелевы группы. В дальнейшем всюду, где мы будем говорить о группах, мы будем без специальных оговорок подразумевать, что речь идет об абелевых группах. Через $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ будем обозначать соответственно множества натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел. Через F^* будем обозначать мультипликативную группу поля F . Все основные обозначения взяты у Фукса [2].

ТЕОРЕМА 1. Пусть F – простое алгебраическое расширение поля рациональных чисел и F является подполем поля действительных чисел $\mathbb{R}$. Тогда

$$\text{Hom}(A, F^*) \cong \text{Hom}(A, \mathbb{Q}^*).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любой элемент конечного порядка расширения F это корень уравнения $x^n = 1$. Корнями этого уравнения могут быть только числа 1 и -1 , так как $F \subset \mathbb{R}$. Числа 1 и -1 принадлежат расширению F для любого F , поэтому периодическая часть $T(F) \cong \mathbb{Z}(2)$. Значит, для действительных полей $F^* \cong \mathbb{Z}(2) \oplus C$, где C – счетная свободная абелева группа [2; т. 2]. В этом случае

$$\text{Hom}(A, F^*) \cong \text{Hom}(A, \mathbb{Q}^*),$$

строение последней описано в [1]:

$$\text{Hom}(A, \mathbb{Q}^*) \cong \text{Hom}(A, \mathbb{Z}(2)) \oplus \text{Hom}(A, C),$$

где

$$\text{Hom}(A, \mathbb{Z}(2)) \cong \prod_{m_0} \mathbb{Z}(2) \bigoplus \prod_{n \in \mathbb{N}} \prod_{m_n} \mathbb{Z}(2),$$

$\{m_0, m_1, \dots, m_n, \dots\}$ – система кардинальных чисел, являющихся инвариантами группы A . Группа $\text{Hom}(A, C)$ – сепарабельная без кручения [2; т. 2].

3. Группа гомоморфизмов из абелевой группы в мультипликативную группу простого алгебраического расширения поля рациональных чисел, являющегося подполем поля комплексных чисел.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathbb{Q}(\zeta)$ – простое алгебраическое расширение поля рациональных чисел и $\mathbb{Q}(\zeta)$ является подполем поля комплексных чисел $\mathbb{C}$. Тогда

$$\text{Hom}(A, \mathbb{Q}(\zeta)^*) \cong \text{Hom}(A, \mathbb{Z}(2^\alpha)) \oplus \text{Hom}(A, \mathbb{Z}(p_1^{k_1})) \oplus \dots \oplus \text{Hom}(A, \mathbb{Z}(p_s^{k_s})) \oplus \text{Hom}(A, C).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если ζ – первообразный корень n -й степени из единицы, то

$$T(\mathbb{Q}(\zeta)^*) \cong \mathbb{Z}(k),$$

где $k = n$, если n – четное число, и $k = 2n$, если n – нечетное число. Таким образом, если ζ – первообразный корень из единицы, то

$$\mathbb{Q}(\zeta)^* \cong \mathbb{Z}(k) \oplus C,$$

где C – счетная свободная абелева группа.

Так как k – четное число, то $k = 2^\alpha p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$ – каноническое разложение числа k . Тогда

$$\mathbb{Z}(k) \cong \mathbb{Z}(2^\alpha) \oplus \mathbb{Z}(p_1^{k_1}) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}(p_s^{k_s}).$$

Отсюда получим

$$\text{Hom}(A, \mathbb{Q}(\zeta)^*) \cong \text{Hom}(A, \mathbb{Z}(2^\alpha)) \oplus \text{Hom}(A, \mathbb{Z}(p_1^{k_1})) \oplus \dots \oplus \text{Hom}(A, \mathbb{Z}(p_s^{k_s})) \oplus \text{Hom}(A, C),$$

где $\text{Hom}(A, C)$ – сепарабельная без кручения [2; т. 2].

Строение групп, фигурирующих в правой части описано в [1], а именно, пусть

$$B = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

– p -базисная подгруппа группы A , где

$$B_0 = \bigoplus_{m_{0,p}} \mathbb{Z}, \quad B_n = \bigoplus_{m_{n,p}} \mathbb{Z}(p^n);$$

тогда

$$\text{Hom}(A, \mathbb{Z}(p^k)) \cong \prod_{m_{0,p}} \mathbb{Z}(p^k) \bigoplus \prod_{s=1}^{k-1} \prod_{m_{s,p}} \mathbb{Z}(p^s) \bigoplus \prod_{t=k}^{\infty} \prod_{m_{t,p}} \mathbb{Z}(p^k),$$

где $\{m_{0,p}, m_{1,p}, \dots, m_{n,p}, \dots\}$ – система кардинальных чисел, являющихся инвариантами группы A .

4. Группа гомоморфизмов из абелевой группы в мультипликативную группу алгебраически замкнутого поля.

ТЕОРЕМА 3. Пусть K – алгебраически замкнутое поле с нулевой характеристикой. Тогда

$$\text{Hom}(A, K^*) \cong \text{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus \text{Hom}\left(A, \bigoplus_n \mathbb{Q}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как K – алгебраически замкнутое поле и имеет нулевую характеристику, то $K^* \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \oplus (\bigoplus_n \mathbb{Q})$, где n – любое бесконечное кардинальное число [2; т. 2, теорема 127.3]. Тогда

$$\text{Hom}(A, K^*) \cong \text{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus \text{Hom}\left(A, \bigoplus_n \mathbb{Q}\right).$$

Известно, что $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong \bigoplus_p \mathbb{Z}(p^\infty)$.

Факторгруппа $\prod_p \mathbb{Z}(p^\infty) / \bigoplus_p \mathbb{Z}(p^\infty)$ является делимой группой без кручения мощности континуум, поэтому

$$\prod_p \mathbb{Z}(p^\infty) / \bigoplus_p \mathbb{Z}(p^\infty) \cong \bigoplus_{2^{\aleph_0}} \mathbb{Q}.$$

Из точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow \prod_p \mathbb{Z}(p^\infty) \rightarrow \prod_p \mathbb{Z}(p^\infty) / \bigoplus_p \mathbb{Z}(p^\infty) \rightarrow 0$$

получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}\left(A, \prod_p \mathbb{Z}(p^\infty)\right) \rightarrow \text{Hom}\left(A, \bigoplus_{2^{\aleph_0}} \mathbb{Q}\right). \quad (1)$$

Если A – периодическая группа, то группу $\text{Hom}(A, K^*)$ удастся исследовать полностью, так как в этом случае группа $\text{Hom}(A, \bigoplus_{2^{\aleph_0}} \mathbb{Q}) = 0$. Тогда из точности последовательности (1) следует гомоморфизм

$$\text{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \text{Hom}\left(A, \prod_p \mathbb{Z}(p^\infty)\right).$$

Так как $A \cong \bigoplus_p \mathbf{T}_p(A)$, где $\mathbf{T}_p(A)$ – p -компонента группы A , по свойствам групп гомоморфизмов получим

$$\text{Hom}\left(A, \prod_p \mathbb{Z}(p^\infty)\right) \cong \text{Hom}\left(\bigoplus_p \mathbf{T}_p(A), \prod_p \mathbb{Z}(p^\infty)\right) \cong \prod_p \text{Hom}(\mathbf{T}_p(A), \mathbb{Z}(p^\infty)).$$

При $p \neq q$ группа $\text{Hom}(\mathbf{T}_q(A), \mathbb{Z}(p^\infty)) = 0$. Строение групп вида $\text{Hom}(\mathbf{T}_p(A), \mathbb{Z}(p^\infty))$ описано в [2; т. 1].

Группа $\text{Hom}(A, \bigoplus_n \mathbb{Q}) \cong \prod_m [\bigoplus_n \mathbb{Q}]$, где $m = r_0(A)$ [2; т. 1, § 43].

5. Группа гомоморфизмов из абелевой группы в мультипликативную группу вещественно замкнутого поля.

ТЕОРЕМА 4. Пусть B – вещественно замкнутое поле. Тогда

$$\text{Hom}(A, B^*) \cong \text{Hom}(A, \mathbb{Z}(2)) \oplus \text{Hom}\left(A, \bigoplus_n \mathbb{Q}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как B – вещественно замкнутое поле, то $B^* \cong \mathbb{Z}(2) \oplus (\bigoplus_n \mathbb{Q})$, где n – любое бесконечное кардинальное число [2; т. 2, теорема 127.4]. Тогда

$$\text{Hom}(A, B^*) \cong \text{Hom}(A, \mathbb{Z}(2)) \oplus \text{Hom}\left(A, \bigoplus_n \mathbb{Q}\right),$$

где

$$\text{Hom}(A, \mathbb{Z}(2)) \cong \prod_{m_0} \mathbb{Z}(2) \bigoplus_{n=1}^{\infty} \prod_{m_n} \mathbb{Z}(2),$$

$\{m_0, m_1, \dots, m_n, \dots\}$ – система кардинальных чисел, являющихся инвариантами группы A (подробнее см. [1; предложение 2]).

Группа $\text{Hom}(A, \bigoplus_n \mathbb{Q}) \cong \prod_m [\bigoplus_n \mathbb{Q}]$, где $m = r_0(A)$ ([2; т. 1, § 43]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Себельдин, А. Л. Силла, *Фундамент. и прикл. матем.*, **13**:3 (2007), 185–191.
 [2] Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, Т. 1, Мир, М., 1974; Т. 2, Мир, М., 1977.

Ю. В. Костромина

Московский педагогический государственный университет

E-mail: jykos@mail.ru

Поступило

13.01.2011

Исправленный вариант

19.07.2011