Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Тулина, В. В. Чуешев, Дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 3, 457–474

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9126>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 03:13:24

Дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности

М. И. Тулина, В. В. Чуешев

Найдены размерности и построены базисы пространств мероморфных дифференциалов Прима на переменной компактной римановой поверхности, а также в первой голоморфной группе когомологий де Рама дифференциалов Прима для произвольных характеров.

Библиография: 17 названий

DOI: 10.4213/mzm9126

Теория мультипликативных функций и дифференциалов Прима для случая специальных характеров на компактной римановой поверхности нашла многочисленные приложения в теории функций, аналитической теории чисел и в уравнениях математической физики. Как составная часть, сюда входит теория спинорных структур [1]–[9].

В работах [8], [9] начато построение общей теории мультипликативных функций и дифференциалов Прима на компактной римановой поверхности для произвольных характеров. Отметим также недавние работы [10], [11].¹

Цель настоящей работы – получить новые свойства пространств мероморфных дифференциалов Прима на переменной компактной римановой поверхности и для переменных характеров. Будут найдены размерности и построены базисы в указанных пространствах дифференциалов. В частности, определена размерность и найден базис в первой голоморфной группе когомологий де Рама дифференциалов Прима для произвольных характеров.

1. Предварительные сведения. Пусть F – фиксированная гладкая компактная ориентированная поверхность рода $g \geq 2$ с отмечанием $\{a_k, b_k\}_{k=1}^g$, т.е. упорядоченным набором образующих для $\pi_1(F)$, а F_0 – фиксированная комплексно-аналитическая структура на F . В дальнейшем риманову поверхность $(F; F_0)$ для краткости будем обозначать через F_0 . По теореме униформизации существует конечно порожденная фуксова группа Γ первого рода, инвариантно действующая на единичном круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ такая, что U/Γ конформно эквивалентна F_0 ,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 09-01-00255, 14-01-31109 мол а), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-7347.2010.1), а также грантов АБЦП № 2.1.1.3707 и ФЦП № 02.740.11.0457.

¹Ссылки добавлены редактором.

Γ изоморфна $\pi_1(F)$, и эта группа имеет представление

$$\Gamma = \left\langle A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g : \prod_{j=1}^g C_j = I \right\rangle,$$

где $C_j = [A_j, B_j] = A_j B_j A_j^{-1} B_j^{-1}$, $j = 1, \dots, g$, а I – тождественное отображение [12], [13].

Любая другая комплексно-аналитическая структура на F может быть отождествлена с некоторым дифференциалом Бельтрами μ на F_0 , т.е. выражением вида $\mu(z) d\bar{z}/dz$, которое инвариантно относительно выбора локального параметра на F_0 , где $\mu(z)$ – комплекснозначная функция на F_0 и $\|\mu\|_{L_\infty(F_0)} < 1$. Эту структуру на F будем обозначать через F_μ . Ясно, что $\mu = 0$ соответствует F_0 . Пусть $M(F)$ – множество всех комплексно-аналитических структур на F с топологией C^∞ сходимости на F_0 , $\text{Diff}^+(F)$ – группа всех сохраняющих ориентацию гладких диффеоморфизмов поверхности F на себя, а $\text{Diff}_0(F)$ – нормальная подгруппа в $\text{Diff}^+(F)$, состоящая из всех диффеоморфизмов, гомотопных тождественному диффеоморфизму на F_0 . Группа $\text{Diff}^+(F)$ действует на $M(F)$ по правилу $\mu \rightarrow f^*\mu$, где $f \in \text{Diff}^+(F)$, $\mu \in M(F)$. Тогда пространство Тейхмюллера $\mathbf{T}_g(F) = \mathbf{T}_g(F_0)$ есть фактор-пространство $M(F)/\text{Diff}_0(F)$ [12], [13].

Так как отображение $U \rightarrow F_0 = U/\Gamma$ – локальный диффеоморфизм, любой дифференциал Бельтрами μ на F_0 поднимается до Γ -дифференциала Бельтрами μ (его обозначим тем же символом) на U , т.е. $\mu \in L_\infty(U)$, $\|\mu\|_{L_\infty(U)} = \text{ess sup}_{z \in U} |\mu(z)| < 1$, и $\mu(T(z))\overline{T'(z)}/T'(z) = \mu(z)$, $z \in U$, $T \in \Gamma$.

Если Γ -дифференциал μ на U продолжить на $\bar{\mathbb{C}} \setminus U$, положив $\mu = 0$, то существует единственный квазиконформный гомеоморфизм $w^\mu: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ с неподвижными точками $+1, -1, i$, который является решением уравнения Бельтрами $w_{\bar{z}} = \mu(z)w_z$. Отображение $T \rightarrow T_\mu = w^\mu T (w^\mu)^{-1}$ задает изоморфизм группы Γ на квазифуксову группу

$$\Gamma_\mu = w^\mu \Gamma (w^\mu)^{-1} = \left\langle A_1^\mu, \dots, B_g^\mu : \prod_{j=1}^g [A_j^\mu, B_j^\mu] = I \right\rangle.$$

Классические результаты Альфорса, Берса [12] и других авторов утверждают, что:

- 1) $\mathbf{T}_g(F)$ является комплексным многообразием размерности $3g - 3$ при $g \geq 2$;
- 2) $\mathbf{T}_g(F)$ имеет единственную комплексно-аналитическую структуру такую, что естественное отображение $\Phi: M(F) \rightarrow M(F)/\text{Diff}_0(F) = \mathbf{T}_g(F)$ будет голоморфным и, при этом, Φ имеет только локальные голоморфные сечения;
- 3) элементы из Γ_μ голоморфно зависят от $[\mu]$.

Два Γ -дифференциала Бельтрами μ и ν будут конформно эквивалентными, если и только если $w^\mu T (w^\mu)^{-1} = w^\nu T (w^\nu)^{-1}$, $T \in \Gamma$. Естественно, что выбор образующих $\{a_k, b_k\}_{k=1}^g$ в $\pi_1(F)$ эквивалентен выбору системы образующих $\{a_k^\mu, b_k^\mu\}_{k=1}^g$ в $\pi_1(F_\mu)$, и $\{A_j^\mu, B_j^\mu\}_{j=1}^g$ в Γ_μ для любого $[\mu]$ из $\mathbf{T}_g$. Отсюда получим отождествления $M(F)/\text{Diff}_0(F) = \mathbf{T}_g(F) = \mathbf{T}_g(\Gamma)$. При этом имеем взаимно однозначное соответствие между классами дифференциалов Бельтрами $[\mu]$, классами конформно эквивалентных отмеченных римановых поверхностей $[F_\mu; \{a_k^\mu, b_k^\mu\}_{k=1}^g]$ и отмеченными квазифуксовыми группами Γ_μ [13].

Универсальное многообразие Якоби рода g есть расслоенное пространство над $\mathbf{T}_g$, слой которого над $[\mu] \in \mathbf{T}_g$ есть якобиан $J(F_\mu)$ для поверхности F_μ [14].

В работе Берса [12; с. 99] построены голоморфные формы $\zeta_1[\mu] = \zeta_1([\mu], \xi) d\xi, \dots, \zeta_g[\mu] = \zeta_g([\mu], \xi) d\xi$, удовлетворяющие условиям

$$\zeta_j([\mu], \xi) = \zeta_j(T([\mu], \xi)) \frac{\partial T}{\partial \xi}([\mu], \xi), \quad \int_{\xi}^{A_k^\mu(\xi)} \zeta_j([\mu], w) dw = \delta_{jk}$$

для всех $T \in \Gamma$, $[\mu] \in \mathbf{T}_g$, $\xi \in w^\mu(U)$, $j, k = 1, \dots, g$, где интеграл берется по любому пути в $w^\mu(U)$ от ξ до $A_k^\mu(\xi)$. Для любого фиксированного $[\mu] \in \mathbf{T}_g$ эти формы являются поднятиями на $w^\mu(U)$ голоморфных на F_μ абелевых дифференциалов $\zeta_1[\mu], \dots, \zeta_g[\mu]$, которые образуют канонический базис на F_μ , двойственный к каноническому гомотопическому базису $\{a_k^\mu, b_k^\mu\}_{k=1}^g$ на F_μ . Указанный базис голоморфно зависит от модулей $[\mu]$ отмеченной компактной римановой поверхности F_μ . Кроме того, матрица b -периодов $\Omega(\mu) = (\pi_{jk}[\mu])_{j,k=1}^g$ на F_μ состоит из комплексных чисел

$$\pi_{jk}[\mu] = \int_{\xi}^{B_k^\mu(\xi)} \zeta_j([\mu], w) dw, \quad \xi \in w^\mu(U),$$

и голоморфно зависит от $[\mu]$.

Для любых фиксированных $[\mu] \in \mathbf{T}_g$ и $\xi_0 \in w^\mu(U)$ определим классическое отображение Якоби $\varphi: w^\mu(U) \rightarrow \mathbb{C}^g$ по правилу

$$\varphi_j(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \zeta_j([\mu], w) dw, \quad j = 1, \dots, g.$$

Тогда φ индуцирует послойное голоморфное вложение из F_μ в $J(F_\mu)$.

Далее, для любого натурального числа $n > 1$ существует расслоенное пространство над $\mathbf{T}_g$, у которого слой над $[\mu] \in \mathbf{T}_g$ есть пространство всех целых дивизоров степени n на компактной римановой поверхности F_μ . Голоморфные сечения этого расслоения определяют на каждой F_μ целый дивизор D^μ степени n , который голоморфно зависит от $[\mu]$. Также существует голоморфное отображение φ_n из этого расслоения на универсальное расслоение Якоби, $n \geq 1$, ограничение которого на слои является продолжением классического отображения Якоби $\varphi: F_\mu \rightarrow J(F_\mu)$. Известно, что для $n = g$ отображение $\varphi: F_g[\mu] \setminus F_g^1[\mu] \rightarrow W_g[\mu] \setminus W_g^1[\mu]$ является аналитическим изоморфизмом, где $F_g[\mu]$ — g -кратное симметрическое произведение поверхности F_μ и $W_g^1[\mu] = \varphi(F_g^1[\mu])$ имеет комплексную размерность, не превышающую $g - 2$ [6], [15]. Локальные голоморфные сечения этих расслоений над окрестностью $U([\mu_0]) \subset \mathbf{T}_g$ можно получить (для любого $n \geq 1$) из локальных голоморфных сечений К. Эрла s для $\Phi: M(F) \rightarrow \mathbf{T}_g$ над $U([\mu_0])$ [14].

Характером ρ для F_μ называется любой гомоморфизм $\rho: (\pi_1(F_\mu), \cdot) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Характер единственным образом задается упорядоченным набором $(\rho(a_1^\mu), \rho(b_1^\mu), \dots, \rho(a_g^\mu), \rho(b_g^\mu)) \in (\mathbb{C}^*)^{2g}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Мультипликативной функцией f на F_μ для характера ρ назовем мероморфную на $w^\mu(U)$ функцию f такую, что $f(Tz) = \rho(T)f(z)$, $z \in w^\mu(U)$, $T \in \Gamma_\mu$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. *m -дифференциалом Прима* относительно фуксовой группы Γ для ρ , или (ρ, m) -дифференциалом, называется дифференциал $\phi = \phi(z) dz^m$ такой, что $\phi(Tz)(T'z)^m = \rho(T)\phi(z)$, $z \in U$, $T \in \Gamma$, $\rho: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^*$. В частности, при $m = 0$ это мультипликативная функция относительно Γ для ρ .

Если f_0 – мультипликативная функция на F_μ для ρ без нулей и полюсов, то

$$\frac{df_0}{f_0} = 2\pi i \sum_{j=1}^g c_j([\mu], \rho) \zeta_j([\mu]),$$

$$f_0([\mu], P) = f_0([\mu], P_0) \exp \int_{P_0[\mu]}^P 2\pi i \sum_{j=1}^g c_j([\mu], \rho) \zeta_j([\mu]),$$

где $P_0[\mu] = f^{s[\mu]}(P_0) \in F_\mu$, $c_j([\mu], \rho) \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, g$, c_j зависят голоморфно от $[\mu]$ и от ρ . При этом, интегрирование от фиксированной $P_0[\mu]$ до текущей P на переменной поверхности F_μ , и $s[\mu]$ – сечение К. Эрла [14] над $U([\mu_0]) \subset \mathbf{T}_g$. Получим, что характер ρ для f_0 имеет вид

$$\rho(a_k^\mu) = \exp 2\pi i c_k([\mu], \rho),$$

$$\rho(b_k^\mu) = \exp \left(2\pi i \sum_{j=1}^g c_j([\mu], \rho) \pi_{jk}([\mu]) \right), \quad k = 1, \dots, g.$$

Будем называть такие характеры ρ *несущественными*, а f_0 (с таким характером) – *единицей*. Характеры, которые не являются несущественными, будем называть *существенными* на $\pi_1(F_\mu)$. Обозначим через $\text{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ группу всех характеров на Γ с естественным умножением. Несущественные характеры образуют подгруппу L_g в группе $\text{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)$.

ЛЕММА 1.1 [8; с. 106]. *Голоморфное главное $\text{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ -расслоение E биголоморфно изоморфно тривиальному расслоению $\mathbf{T}_g(F) \times \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ над $\mathbf{T}_g(F)$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Дифференциал Прима ϕ класса C^1 на $F = U/\Gamma$ для ρ называется *мультипликативно точным*, если $\phi = df(z)$ и $f(Tz) = \rho(T)f(z)$, $T \in \Gamma$, $z \in U$, т.е. f – мультипликативная функция на F класса C^2 для ρ .

Обозначим через $Z^1(\Gamma_\mu, \rho)$ для $\rho \in \text{Hom}(\Gamma_\mu, \mathbb{C}^*)$ множество всех отображений $\phi: \Gamma_\mu \rightarrow \mathbb{C}$ таких, что $\phi(ST) = \phi(S) + \rho(S)\phi(T)$, $S, T \in \Gamma_\mu$ [4].

Каждый элемент $\phi \in Z^1(\Gamma_\mu, \rho)$ будет единственно определяться упорядоченным набором комплексных чисел $\phi(A_1), \dots, \phi(A_g), \phi(B_1), \dots, \phi(B_g)$, удовлетворяющих уравнению

$$\sum_{j=1}^g [\sigma(B_j)\phi(A_j) - \sigma(A_j)\phi(B_j)] = 0,$$

которое получается из соотношения $\prod_{j=1}^g C_j = I$ в Γ_μ , где $\sigma(T) = 1 - \rho(T)$, $T \in \Gamma_\mu$. Тогда $Z^1(\Gamma_\mu, \rho)$ – комплексное векторное $(2g - 1)$ -мерное пространство для $\rho \neq 1$ и $2g$ -мерное пространство для $\rho = 1$. Пусть $B^1(\Gamma_\mu, \rho)$ – одномерное подпространство в $Z^1(\Gamma_\mu, \rho)$, порожденное элементом σ . Тогда $H^1(\Gamma_\mu, \rho) = Z^1(\Gamma_\mu, \rho)/B^1(\Gamma_\mu, \rho)$ – комплексное векторное $(2g - 2)$ -мерное пространство для $\rho \neq 1$. Будем называть

множество $G = \bigcup_{\rho \neq 1, [\mu]} H^1(\Gamma_\mu, \rho)$ коомологическим расслоением Ганнинга над $\mathbf{T}_g \times (\text{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*) \setminus \{1\})$ [4].

Пусть ϕ – замкнутый дифференциал Прима на $F = F_0$ для ρ . Проинтегрировав этот дифференциал от фиксированной точки z_0 до $z \in U$, получим, что

$$f(Tz) - f(Tz_0) = \rho(T)(f(z) - f(z_0)),$$

где $\phi = df(z)$, $z \in U$, $f(z)$ – интеграл Прима на круге U для дифференциала Прима ϕ , определенный с точностью до аддитивного слагаемого. Отсюда для $T \in \Gamma$ верно равенство

$$f(Tz) = \rho(T)f(z) + \phi_{f, z_0}(T),$$

где $\phi_{f, z_0}(T) = f(Tz_0) - \rho(T)f(z_0)$. Таким образом, каждому $T \in \Gamma$ соответствует число $\phi_{f, z_0}(T)$, а значит, определено отображение $\phi_{f, z_0}: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$. Это отображение называется *отображением периодов* для ϕ . Оно зависит от выбора интеграла Прима $f(z)$ на U и базисной точки z_0 . Если $f_1(z) = f(z) + c$ – другой интеграл Прима для того же дифференциала Прима ϕ , то

$$\phi_{f_1, z_0}(T) = f_1(Tz_0) - \rho(T)f_1(z_0) = \phi_{f, z_0}(T) + c\sigma(T), \quad T \in \Gamma.$$

Легко проверить, что оба отображения ϕ_{f, z_0} и ϕ_{f_1, z_0} удовлетворяют коциклическому соотношению $\phi(ST) = \phi(S) + \rho(S)\phi(T)$, $S, T \in \Gamma$. Это означает, что они принадлежат пространству $Z^1(\Gamma, \rho)$ и представляют один и тот же класс периодов $[\phi]$ из $H^1(\Gamma, \rho)$ для дифференциала Прима ϕ на F .

Для замкнутого дифференциала Прима ϕ можно определить так называемые классические периоды. Для $T \in \Gamma$ соответствующий ему классический период $\phi_{z_0}(T) = \int_{z_0}^{Tz_0} \phi$ и верно равенство

$$\phi_{z_0}(T) = \phi_{f, z_0}(T) - f(z_0)\sigma(T).$$

Следовательно, отображения вида $T \rightarrow \phi_{f, z_0}(T)$ (периоды по Ганнингу) и вида $T \rightarrow \phi_{z_0}(T)$ (классические периоды [8]) определяют один и тот же класс периодов $[\phi] \in H^1(\Gamma, \rho)$ для дифференциала Прима ϕ на F для ρ . Поэтому корректно определено $\mathbb{C}$ -линейное отображение $p: \phi \rightarrow [\phi]$ из векторного пространства замкнутых дифференциалов Прима ϕ на F для ρ в векторное пространство $H^1(\Gamma, \rho)$.

Обозначим через $\Omega_{2, \rho}(F_\mu)$ пространство дифференциалов Прима второго рода на F_μ для характера ρ [8], [15].

ЛЕММА 1.2. Если $\omega \in \Omega_{2, \rho}(F_\mu)$ имеет класс периодов $[\omega] = 0$ в $H^1(\Gamma_\mu, \rho)$, то ω – мультипликативно точный дифференциал на F_μ для ρ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать это для фиксированных поверхности и характера. Будем рассматривать классические периоды $\omega_{z_0}(\gamma_1), \dots, \omega_{z_0}(\gamma_m)$, которые получаются при обходе по петлям $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ вокруг отдельных полюсов $P_1, \dots, P_m$ для дифференциала ω соответственно. Число этих полюсов конечно ввиду компактности F_μ . Периоды $\omega_{z_0}(\gamma_1), \dots, \omega_{z_0}(\gamma_m)$ все обращаются в нуль, так как эти периоды равны вычетам для ветвей нашего многозначного дифференциала, а эти полюса второго или большего порядков.

Если класс периодов $[\omega] = 0$, то отсюда классический период $\omega_{z_0}(T) = c\sigma(T)$, $c \neq 0$ для любого T , где

$$\omega_{z_0}(T) = f(Tz_0) - f(z_0) = c(1 - \rho(T)),$$

а f – некоторый интеграл Прима для дифференциала ω . Тогда $\tilde{f} = (f - c)$ будет мультипликативной функцией для ρ и $\omega = d\tilde{f} = d(f - c)$. Поэтому периоды $\tilde{\omega}_{z_0}(a_1), \dots, \tilde{\omega}_{z_0}(b_g)$ все равны нулю для некоторого представителя из класса $[\omega]$. Следовательно, ω является мультипликативно точным дифференциалом для ρ на F_μ . Лемма 1.2 доказана.

Дивизором на F_μ назовем формальное произведение $D = P_1^{n_1} \cdots P_k^{n_k}$, $P_j \in F_\mu$, $n_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \dots, k$. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА (Римана–Роха для характеров) [6], [8]. Пусть F – компактная риманова поверхность рода $g \geq 1$. Тогда для любого дивизора D на F и любого характера ρ верно равенство

$$r_\rho(D^{-1}) = \deg D - g + 1 + i_{\rho^{-1}}(D).$$

Одним из важных следствий теоремы Римана–Роха является следующая теорема

ТЕОРЕМА 1.1. Для любого существенного характера ρ на компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$ существуют $g - 1$ различных точек $P_1, \dots, P_{g-1}$, локально голоморфно зависящих от $[\mu]$ и ρ таких, что не существует мультипликативных функций для ρ на F_μ , чьи особенности в этих точках – полюса порядка не выше 1, т.е.

$$r_\rho((P_1 \cdots P_{g-1})^{-1}) = 0, \quad i_{\rho^{-1}}(P_1 \cdots P_{g-1}) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы Римана–Роха имеем

$$0 \leq r_\rho(D^{-1}) = \deg D - g + 1 + i_{\rho^{-1}}(D).$$

Пусть $D = P_1 \cdots P_n$ для попарно различных точек $P_1, \dots, P_n$, $n \geq 1$. Тогда $\deg D = n$ и $i_{\rho^{-1}}(D) \geq g - 1 - n$ для любого целого дивизора D на F_μ , локально голоморфно зависящего от $[\mu]$ и ρ . Содержательно это утверждение только при $g - 1 \geq n \geq 1$.

Для любой точки P_1 , локально голоморфно зависящей от $[\mu]$, имеем

$$g - 1 = i_{\rho^{-1}}(1) \geq i_{\rho^{-1}}(P_1) \geq g - 2,$$

а также $i_{\rho^{-1}}(P_1) \leq g - 2$. Таким образом, $i_{\rho^{-1}}(P_1) = g - 2$. При $g = 2$ теорема доказана. Пусть $g \geq 3$. Возьмем любой дифференциал $\tilde{\omega} \in \Omega_{\rho^{-1}}(P_1)$ такой, что $\tilde{\omega} \neq 0$ на F_{μ_0} , и разложим его по базису. Так как характер существенный, $\tilde{\omega}$ можно представить в виде

$$\tilde{\omega} = C_1 \tilde{\zeta}_1([\mu], \rho) + \cdots + C_{g-1} \tilde{\zeta}_{g-1}([\mu], \rho).$$

Будем считать все коэффициенты C_i постоянными для μ из малой окрестности $U(\mu_0)$ в $\mathbf{T}_g$. Тогда $\tilde{\omega}$ будет голоморфно зависеть от $[\mu]$ и от ρ .

Выберем вторую точку P_2 . У дифференциала $\tilde{\omega}$ есть нули, их будет $2g - 2$, т.е. конечное число. Возьмем любую точку P_2 (рассматриваем ее как локально постоянное голоморфное сечение) так, чтобы она не попадала на эти нули. Тогда дифференциалы $\tilde{\omega}$ в P_2 не равны нулю на F_μ . Таким образом, получим равенство $i_{\rho^{-1}}(P_1 P_2) = g - 3$. За $n = g - 1$ шагов получим $g - 1$ таких точек, для которых выполняется условие $i_{\rho^{-1}}(P_1 \cdots P_{g-1}) = 0$. Теорема 1.1 доказана.

Справедлива также следующая

ТЕОРЕМА 1.2. Для любого несущественного характера $\rho \neq 1$ на компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$ существует g различных точек $P_1, \dots, P_g$, голоморфно зависящих от ρ и от $[\mu]$, таких, что не существует мультипликативных функций для ρ на F_μ , чьи особенности в этих точках – полюса порядка не выше 1, т.е.

$$r_\rho((P_1 \dots P_g)^{-1}) = 1, \quad \text{или} \quad i_{\rho^{-1}}(P_1 \dots P_g) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится аналогично доказательству теоремы 1.1, с учетом того, что $i_{\rho^{-1}}(1) = g$.

В дальнейшем нам потребуется также

ТЕОРЕМА (Абеля для характеров) [6], [8]. Пусть D – дивизор на отмеченной переменной компактной римановой поверхности $[F_\mu, \{a_1^\mu, \dots, a_g^\mu, b_1^\mu, \dots, b_g^\mu\}]$ рода $g \geq 1$ и ρ – характер на $\pi_1(F_\mu)$. Тогда то, что D будет дивизором мультипликативной функции f на F_μ для характера ρ , равносильно тому, что $\deg D = 0$ и

$$\varphi(D) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^g \log \rho(b_j^\mu) e^{(j)}[\mu] - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^g \log \rho(a_j^\mu) \pi^{(j)}[\mu] (= \psi(\rho, [\mu]))$$

в $\mathbb{C}^g$ по модулю целочисленной решетки $L(F_\mu)$, порожденной столбцами $e^{(1)}[\mu], \dots, e^{(g)}[\mu], \pi^{(1)}[\mu], \dots, \pi^{(g)}[\mu]$ матрицы a^μ -периодов и b^μ -периодов на F_μ , где $\varphi[\mu]$ – отображение Якоби из F_μ в многообразие Якоби $J(F_\mu)$.

Отметим, что, по теореме Берса [12; с. 99] отображение ψ зависит локально голоморфно от ρ и $[\mu]$.

Арбарелло [16] доказал, что (классические) точки Вейерштрасса на переменной компактной римановой поверхности F_μ локально голоморфно зависят от модулей $[\mu]$ для поверхности. Установим аналог этого результата для мультипликативных точек Вейерштрасса

ТЕОРЕМА 1.3. Для любого $q \geq 1$, $q \in \mathbb{N}$, мультипликативные q -точки Вейерштрасса для переменной компактной римановой поверхности F_μ рода $g > 1$ локально голоморфно зависят от модулей $[\mu]$ и от характеров ρ , а пробелы в мультипликативных 1-точках Вейерштрасса и веса в мультипликативных q -точках Вейерштрасса являются локально постоянными функциями от $[\mu]$ и от ρ со значениями в $\mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По заданному базису [8; с. 105] голоморфных (ρ, q) -дифференциалов Прима на F_μ составим вронскиан W_q , который также локально голоморфно зависит от $[\mu]$ и от ρ . Его нули есть мультипликативные q -точки Вейерштрасса на F_μ .

Для несущественного характера ρ числа $n_1 - 1, n_2 - 1, \dots, n_g - 1$ являются порядками нулей, а для существенного характера ρ числа $n_1 - 1, n_2 - 1, \dots, n_{g-1} - 1$ являются порядками нулей адаптированного базиса 1-дифференциалов, где числа n_j – мультипликативные пробелы в 1-точках Вейерштрасса на F_μ .

По теореме о неявной функции нули вронскиана, а значит и мультипликативные q -точки Вейерштрасса на F_μ , порядки нулей вронскиана (веса мультипликативных q -точек Вейерштрасса) локально голоморфно зависят от $[\mu]$ и от ρ . В силу целочисленности пробелов и целочисленности весов в 1-точках Вейерштрасса пробелы n_j ,

а также все веса q -точек Вейерштрасса, будут локально постоянными функциями от $[\mu]$ и от ρ . Теорема 1.3 доказана.

2. Элементарные дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности. Для построения общей теории однозначных и мультипликативных дифференциалов большую роль играют, так называемые, элементарные дифференциалы [6], [15] любого порядка, которые имеют минимальное количество полюсов, т.е. либо один полюс порядка ≥ 2 , либо два простых полюса, и голоморфно зависящие от характеристик ρ и от модулей $[\mu]$ римановых поверхностей.

В этом разделе будет найден общий вид элементарных (ρ, q) -дифференциалов Прима на F_μ .

Сначала найдем общий вид (ρ, q) -дифференциалов $\tau_{\rho, q; Q}^{(m)}$ с единственным полюсом $Q = Q[\mu]$ точно порядка $m \geq 2$ на F_μ , где $q \geq 1$.

При $m \geq 2$ по теореме Римана–Роха для (ρ, q) -дифференциалов на F_μ найдем размерность

$$i_{\rho, q}\left(\frac{1}{Q^m}\right) = \dim_{\mathbb{C}} \Omega_{\rho}^q\left(\frac{1}{Q^m}\right) = (g-1)(2q-1) - \deg D + r\left(\frac{(f[\mu])Z_{\mu}^{q-1}}{D}\right),$$

где $D = 1/Q^m$, Z_{μ}^{q-1} – канонический класс дивизоров абелевых $(q-1)$ -дифференциалов на F_μ , $f[\mu]$ – любая мультипликативная функция для ρ на F_μ , голоморфно зависящая от $[\mu]$ и ρ [8; с. 43]. Отсюда

$$i_{\rho, q}\left(\frac{1}{Q^m}\right) = (g-1)(2q-1) + m \geq 3.$$

Здесь $r((f[\mu])Z_{\mu}^{q-1}/D) = 0$, так как $\deg((f[\mu])Z_{\mu}^{q-1}/D) > 0$ при наших условиях. Действительно,

$$\deg(f[\mu]) = 0, \quad \deg Z_{\mu}^{q-1} = (q-1)(2g-2) \geq 0, \quad \deg\left(\frac{1}{D}\right) = m > 0.$$

Это же можно доказать другим способом. От противного, предположим, что существует функция g на F_μ с условием $(g) \geq Q^m(f[\mu])Z_{\mu}^{q-1}$. Тогда

$$0 = \deg(g) \geq \deg Q^m(f[\mu])Z_{\mu}^{q-1} \geq 3.$$

Противоречие.

Так как

$$\deg(f[\mu])Z_{\mu}^{q-1}Q^m = 0 + (q-1)(2g-2) + m - 1 \geq 1 > 0,$$

то

$$\begin{aligned} i_{\rho, q}\left(\frac{1}{Q^m}\right) &= (g-1)(2q-1) - \deg\left(\frac{1}{Q^m}\right) + r((f[\mu])Z_{\mu}^{q-1}Q^m) \\ &= (g-1)(2q-1) + m, \\ i_{\rho, q}\left(\frac{1}{Q^{m-1}}\right) &= (g-1)(2q-1) + m - 1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$i_{\rho,q}\left(\frac{1}{Q^m}\right) = i_{\rho,q}\left(\frac{1}{Q^{m-1}}\right) + 1.$$

Значит, существует (ρ, q) -дифференциал $\tau_{\rho,q;Q}^{(m)}$ с полюсом точно порядка m в точке Q на F_μ , т.е.

$$(\tau_{\rho,q;Q}^{(m)}) = \frac{R_1 \cdots R_N}{Q^m}$$

на F_μ , $R_j \neq Q$, $j = 1, \dots, N$, где $N = (2g - 2)q + m$.

Из [8; с. 67] получаем уравнение

$$\varphi_{P_0}[\mu](R_1 \cdots R_N) - \varphi_{P_0}[\mu](Q^m) = -2K[\mu]q + \psi(\rho)$$

в многообразии Якоби $J(F_\mu)$, где $K[\mu]$ – вектор констант Римана, голоморфно зависящий от модулей римановых поверхностей и от выбора базисной точки, а также зависящий от выбора канонического базиса a_j^μ , b_j^μ петель на F_μ . Последнее уравнение понимаем как равенство в переменном якобиане $J(F_\mu)$, т.е. в слое из универсального расслоения Якоби, лежащем над отмеченной поверхностью $F_\mu \equiv [\mu]$. Отсюда,

$$\varphi(R_1 \cdots R_N) = -2K[\mu]q + \varphi(Q^m) + \psi(\rho) = a$$

или

$$\varphi(R_1 \cdots R_g) = a - \varphi(R_{g+1} \cdots R_N). \quad (2.1)$$

Таким образом, для определения нулей дифференциала $\tau_{\rho,q;Q}^{(m)}$ имеем

$$N - g = m + (2g - 2)q - g \geq g \ (\geq 2)$$

свободных параметров, которые можно выбирать произвольно на F_μ , и локально голоморфно зависящих от $[\mu]$ и ρ . По теореме Эрла [14] можно выбрать дивизор $R_{g+1} \cdots R_N$ на F_μ как локально голоморфное сечение для расслоения дивизоров степени $N - g$ над пространством Тейхмюллера $\mathbf{T}_g$.

Решая проблему обращения Якоби в универсальном расслоении Якоби над $\mathbf{T}_g$, найдем дивизор $R_1 \cdots R_g$ на F_μ , который будет единственным решением уравнения (2.1), если его правая часть равенства не принадлежит $W_g^1[\mu] \subset J(F_\mu)$ [6]. Размерность этого подмножества не превышает $g - 2$, но $N - g > g - 2$ при наших условиях, и при этом $R_1, \dots, R_g$ голоморфно зависят от наших параметров, так как правая сторона (2.1) была выбрана голоморфно зависящей от $[\mu]$ и ρ . Следовательно, доказана

ТЕОРЕМА 2.1. *Для любого характера ρ на F_μ рода g , $g \geq 2$ и любых натуральных чисел $m > 1$, $q > 0$ существует элементарный (ρ, q) -дифференциал $\tau_{\rho,q;Q}^{(m)}$ с полюсом в любой точке $Q = Q[\mu] \in F_\mu$ точно порядка m , локально голоморфно зависящий от ρ и $[\mu]$, у которого общий вид дивизора*

$$(\tau_{\rho,q;Q}^{(m)}) = \frac{R_1 \cdots R_N}{Q^m},$$

где

$$\varphi(R_1 \cdots R_g) = -2K[\mu]q + \varphi(Q^m) - \varphi(R_{g+1} \cdots R_N) + \psi(\rho).$$

При этом точки $R_{g+1}, \dots, R_N$ выбираются как локально голоморфное сечение дивизоров степени $N - g$ над $\mathbf{T}_g$, $N = (2g - 2)q + m$ и $Q = Q[\mu]$ – локально голоморфное сечение дивизоров степени 1 на F_μ для любого $[\mu]$ из односвязной окрестности $U[\mu_0] \subset \mathbf{T}_g$ и для любого $\rho \in U(\rho_0) \subset \text{Hom}(\Gamma_\mu, \mathbb{C}^*)$.

Рассуждая, как в доказательстве теоремы 2.1, получим

ТЕОРЕМА 2.2. Для любого характера ρ на F_μ рода g , $g \geq 2$, и любого натурального числа $q \geq 1$ существует элементарный (ρ, q) -дифференциал $\tau_{\rho, q; Q_1 Q_2}$ третьего рода точно с простыми полюсами $Q_1 = Q_1[\mu]$, $Q_2 = Q_2[\mu] \in F_\mu$, локально голоморфно зависящий от ρ и $[\mu]$, у которого общий вид дивизора

$$(\tau_{\rho, q; Q_1 Q_2}) = \frac{R_1 \cdots R_N}{Q_1 Q_2},$$

где

$$\varphi(R_1 \cdots R_g) = -2K[\mu]q + \varphi(Q_1 Q_2) - \varphi(R_{g+1} \cdots R_N) + \psi(\rho).$$

При этом точки $R_{g+1}, \dots, R_N$ выбираются как локально голоморфное сечение дивизоров степени $N - g$ над $\mathbf{T}_g$, $N = (2g - 2)q + 2$, и $Q_1 = Q_1[\mu]$, $Q_2 = Q_2[\mu]$ – локально голоморфные сечения дивизоров степени 1 на F_μ для любого $[\mu]$ из односвязной окрестности $U[\mu_0] \subset \mathbf{T}_g$ и для любого $\rho \in U(\rho_0) \subset \text{Hom}(\Gamma_\mu, \mathbb{C}^*)$.

Установим следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. На компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$ для любого переменного существенного характера ρ существуют два набора линейно независимых дифференциалов Прима второго рода, голоморфно зависящих от ρ и $[\mu]$, следующего вида:

$$\tau_{P_1}^{(2)}, \dots, \tau_{P_{g-1}}^{(2)}, \quad \tau_{\widetilde{P}_1}^{(n_1+1)}, \dots, \tau_{\widetilde{P}_1}^{(n_{g-1}+1)},$$

где $r_\rho((P_1 \cdots P_{g-1})^{-1}) = 0$, и числа n_j ($0 < n_1 < \cdots < n_{g-1} < 2g$) являются мультипликативными пробелами Вейерштрасса в точке $\widetilde{P}_1$ для ρ на F_μ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем применять теорему Абеля для характеров [6; с. 134].

Построим дифференциал $\tau_{P_1}^{(2)} = f_1 \omega$, где ω – голоморфный абелев дифференциал на F_μ , голоморфно зависящий от $[\mu]$. Здесь

$$(f_1 \omega) = R_1^{(1)} \cdots R_{2g}^{(1)} (Q_1 \cdots Q_{2g-2} P_1^2)^{-1} Q_1 \cdots Q_{2g-2}, \quad (\omega) = Q_1 \cdots Q_{2g-2},$$

причем последний дивизор не содержит в своем носителе точку P_1 . Это возможно по теореме об отсутствии базисных точек для дивизора абелева дифференциала. Найдем функцию f_1 для ρ на F_μ , голоморфно зависящую от $[\mu]$ и ρ , дивизор, которой имеет вид

$$(f_1) = R_1^{(1)} \cdots R_{2g}^{(1)} (Q_1 \cdots Q_{2g-2} P_1^2)^{-1},$$

где $P_1 \neq R_j^{(1)}$, $j = 1, \dots, 2g$. Для нее должно выполняться условие

$$\varphi(R_1^{(1)} \cdots R_{2g}^{(1)}) - \varphi(Q_1 \cdots Q_{2g-2}) - 2\varphi(P_1) = \psi(\rho).$$

Это условие эквивалентно равенству

$$\varphi(R_1^{(1)} \dots R_g^{(1)}) = -2K[\mu] + 2\varphi(P_1) + \psi(\rho) - \varphi(R_{g+1}^{(1)} \dots R_{2g}^{(1)}). \quad (2.2)$$

Здесь $\varphi(Q_1 \dots Q_{2g-2}) = -2K[\mu]$ в многообразии Якоби и по теореме Берса дивизор $Q_1 \dots Q_{2g-2}$ локально голоморфно зависит от $[\mu]$.

Если правая часть равенства (2.2) не принадлежит $W_g^1[\mu]$, то в силу теоремы Якоби об обращении по дивизору $D_1 = R_{g+1}^{(1)} \dots R_{2g}^{(1)}$, который выбран локально голоморфно зависящим от $[\mu]$, единственно определяется дивизор $D'_1 = R_1^{(1)} \dots R_g^{(1)}$, тоже локально голоморфно зависящий от $[\mu]$. Теперь функция f_1 строится явно по дивизору

$$(f_1) = D'_1 D_1 (Q_1 \dots Q_{2g-2} P_1^2)^{-1}$$

[8; с. 39]. Положим $\tau_{P_1}^{(2)} = f_1 \omega$ и получим, что $(\tau_{P_1}^{(2)}) \geq 1/P_1^2$ на F_μ .

Аналогично, для любого $j = 2, \dots, g-1$ строится функция f_j такая, что

$$(f_j) = D'_j D_j (Q_1 \dots Q_{2g-2} P_j^2)^{-1},$$

где $D_j = R_{g+1}^{(j)} \dots R_{2g}^{(j)}$ и $D'_j = R_1^{(j)} \dots R_g^{(j)}$, и дифференциал $\tau_{P_j}^{(2)} = f_j \omega$ такой, что $(\tau_{P_j}^{(2)}) \geq 1/P_j^2$ на F_μ . Причем дивизоры $D_1, \dots, D_{g-1}$ можно выбрать с попарно непесекающимися неэквивалентными носителями и локально голоморфно зависящими от $[\mu]$.

Применяя метод развитый в [8; с. 104], малым изменением дивизоров $D_1, \dots, D_{g-1}$ в пространстве $F_g[\mu]$ можно добиться линейной независимости мультипликативных функций $f_1, \dots, f_{g-1}$ над $\mathbb{C}$ для существенного характера ρ на F_μ при условии $r_\rho(P_1^{-1} \dots P_{g-1}^{-1}) = 0$. Таким образом, построили дифференциалы $\tau_{P_1}^{(2)}, \dots, \tau_{P_{g-1}}^{(2)}$, линейно независимые над $\mathbb{C}$ на F_μ , для ρ локально голоморфно зависящие от всех наших параметров.

Теперь построим дифференциал $\tau_{\tilde{P}_1}^{(n_1+1)}$ для существенного характера ρ на F_μ в виде $\tau_{\tilde{P}_1}^{(n_1+1)} = \tilde{f}_1 \omega$, $n_1 \geq 0$. Здесь

$$(\tilde{f}_1 \omega) = R_1^{(1)} \dots R_{2g-1+n_1}^{(1)} (Q_1 \dots Q_{2g-2} \tilde{P}_1^{n_1+1})^{-1} Q_1 \dots Q_{2g-2},$$

где $\tilde{P}_1$ голоморфно зависит от $[\mu]$ и не входит в носитель дивизора $Q_1 \dots Q_{2g-2}$, а $R_j^{(1)} \neq \tilde{P}_1$, $j = 1, \dots, 2g-1+n_1$. По теореме Абеля для характеров существует $\tilde{f}_1$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\varphi(R_1^{(1)} \dots R_g^{(1)}) = -2K[\mu] + (n_1 + 1)\varphi(\tilde{P}_1) + \psi(\rho) - \varphi(R_{g+1}^{(1)} \dots R_{2g-1+n_1}^{(1)})$$

(не принадлежит $W_g^1[\mu]$). Последнее условие следует из того, что $g-1+n_1 \geq g-1$, а $\dim_{\mathbb{C}} W_g^1[\mu] \leq g-2$ [6; с. 157]. По теореме Якоби для $D_1 = R_{g+1}^{(1)} \dots R_{2g-1+n_1}^{(1)}$, локально голоморфно зависящего от $[\mu]$, существует единственный дивизор $D'_1 = R_1^{(1)} \dots R_g^{(1)}$, тоже локально голоморфно зависящий от $[\mu]$. Отсюда существует функция $\tilde{f}_1$ такая, что

$$(\tilde{f}_1) = D_1 D'_1 (Q_1 \dots Q_{2g-2} \tilde{P}_1^{n_1+1})^{-1}.$$

Аналогично доказывается, что для любого $j = 2, \dots, g-1$ строятся дифференциалы $\tau_{\tilde{P}_1}^{(n_j+1)} = \tilde{f}_j \omega$ такие, что $(\tau_{\tilde{P}_1}^{(n_j+1)}) \geq 1/\tilde{P}_1^{n_j+1}$ на F_μ для ρ , локально голоморфно зависящие от параметров.

Эти дифференциалы имеют единственный полюс в точке $\tilde{P}_1$ на F_μ , но различных порядков. Следовательно, $\tau_{\tilde{P}_1}^{(n_1+1)}, \dots, \tau_{\tilde{P}_1}^{(n_{g-1}+1)}$ – линейно независимы над $\mathbb{C}$ на F_μ для ρ .

С учетом теоремы 2.1 [17; с. 195] из всех построенных выше дифференциалов можно получить дифференциалы второго рода с требуемыми свойствами. Предложение 2.1 доказано.

3. Размерность и базис фактор пространства $\Omega_{2,\rho}(F_\mu)/\Omega_{e,\rho}(F_\mu)$ для произвольного характера. Обозначим через $\Omega_{2,\rho}(F_\mu)$ пространство мероморфных дифференциалов второго рода для характера ρ на F_μ , а через $\Omega_{e,\rho}(F_\mu)$ – подпространство всех мультипликативно точных дифференциалов для ρ . Из теорем 2.1, 2.2 и из [2] следует существование дифференциалов $\omega_{\rho; P_1^2 P_j^2}$ второго рода на F_μ для несущественного характера ρ с полюсами в точках P_1 и P_j точно второго порядка, $j = 2, \dots, g$. Пусть $\tilde{\zeta}_1, \dots, \tilde{\zeta}_{g-1}$ – любой базис пространства голоморфных дифференциалов Прима для существенного характера ρ на F_μ , которые голоморфно зависят от модулей $[\mu]$ и характера ρ [8; с. 105].

Введем наборы дифференциалов, представляющих классы смежности в фактор пространстве $\Omega_{2,\rho}(F_\mu)/\Omega_{e,\rho}(F_\mu)$:

(i) для несущественных характеров

$$f_0 \zeta_1, \dots, f_0 \zeta_g, \omega_{\rho; P_1^2 P_2^2}, \dots, \omega_{\rho; P_1^2 P_g^2}, \quad (3.1)$$

где $r_\rho((P_1 \dots P_g)^{-1}) = 1$;

(ii) для существенных характеров

$$\tilde{\zeta}_1, \dots, \tilde{\zeta}_{g-1}, \quad \tilde{\tau}_{P_1}^{(2)}, \dots, \tilde{\tau}_{P_{g-1}}^{(2)}, \quad (3.2)$$

$$\tilde{\zeta}_1, \dots, \tilde{\zeta}_{g-1}, \quad \tilde{\tau}_{\tilde{P}_1}^{(\tilde{n}_1+1)}, \dots, \tilde{\tau}_{\tilde{P}_1}^{(\tilde{n}_{g-1}+1)}, \quad (3.3)$$

где $\tilde{n}_j$ – мультипликативные пробелы Вейерштрасса на F_μ в точке $\tilde{P}_1$, и $r_\rho((P_1 \dots P_{g-1})^{-1}) = 0$.

Обозначим через

$$E_1 = \bigcup_{[\mu], \rho} \Omega_{2,\rho}(F_\mu)/\Omega_{e,\rho}(F_\mu)$$

векторное расслоение над $\mathbf{T}_g \times (L_g \setminus 1)$, а

$$E_2 = \bigcup_{[\mu], \rho} \Omega_{2,\rho}(F_\mu)/\Omega_{e,\rho}(F_\mu)$$

– векторное расслоение над $\mathbf{T}_g \times \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*) \setminus L_g$. В силу леммы 1.1 указанные расслоения корректно определены над такими базами.

Для любого характера $\rho \neq 1$ определим отображение из $\Omega_{2,\rho}(F_\mu)$ в $H^1(\Gamma_\mu, \rho)$, сопоставляя дифференциалу ω его класс периодов $[\omega] \in H^1(\Gamma_\mu, \rho)$ [4]. При $\rho \neq 1$ пространство $H^1(\Gamma_\mu, \rho)$ является комплексным векторным пространством размерности $2g-2$.

Поднимем $\omega \in \Omega_{2,\rho}(F_\mu)$ на U , где $F_\mu = U/\Gamma'$. Найдем классические периоды

$$\omega_{z_0}(T) = \int_{z_0}^{Tz_0} \omega + m_1 \int_{\gamma_1} \omega + \dots + m_k \int_{\gamma_k} \omega,$$

где обозначили через γ_j петлю, обходящую только вокруг полюса Q_j и не обходящую вокруг остальных полюсов для ω на F_μ и $m_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \dots, k$. При этом интеграл $\int_{z_0}^{Tz_0} \omega$ берется по некоторому специальному пути в круге U , не проходящему через полюса дифференциала ω .

Так как ω – дифференциал Прима второго рода, все вычеты в полюсах для всех ветвей ω равны нулю. Поэтому существует первообразная мероморфная функция $f(z)$ на U такая, что $\omega = df$ на $F_\mu \setminus \{Q_1, \dots, Q_k\}$ и $\omega_{z_0}(T) = \int_{z_0}^{Tz_0} df(z)$ для любого $T \in \Gamma'$.

Зададим отображение

$$\Omega_{2,\rho}(F_\mu) \ni \omega \rightarrow [\omega] = \{\omega_{z_0}(A_1), \dots, \omega_{z_0}(B_g), \omega_{z_0}(\gamma_1), \dots, \omega_{z_0}(\gamma_k)\} \in H^1(\Gamma'', \rho'),$$

где $\rho'(\gamma_j) = 1$, $j = 1, \dots, k$, $\rho' = \rho$ на $\pi_1(F_\mu) \cong \Gamma'$. Здесь Γ'' – фуксова группа первого рода, унифицирующая поверхность $F_\mu \setminus \{Q_1, \dots, Q_k\}$ в круге U . Так как все $\omega_{z_0}(\gamma_j)$, $j = 1, \dots, k$, равны нулю, класс $[\omega]$ выражается только через $\omega_{z_0}(A_1), \dots, \omega_{z_0}(B_g)$, которые удовлетворяют уравнению

$$0 = \sum_{j=1}^g [\sigma(B_j)\omega_{z_0}(A_j) - \sigma(A_j)\omega_{z_0}(B_j)],$$

и для $\rho \neq 1$ существует такое k , что при $\rho(A_k) \neq 1$ период $\omega_{z_0}(A_k) = 0$ и при $\rho(B_k) \neq 1$ период $\omega_{z_0}(B_k) = 0$ [4].

Значит отображение $\Omega_{2,\rho}(F_\mu) \ni \omega \rightarrow [\omega] \in H^1(\Gamma_\mu, \rho)$ корректно определено, хотя сначала $[\omega] \in H^1(\Gamma'', \rho')$.

По лемме 1.2, если класс периодов $[\omega] = 0$ в $H^1(\Gamma_\mu, \rho)$ для некоторого $\omega \in \Omega_{2,\rho}(F_\mu)$, то дифференциал ω является мультипликативно точным для ρ на F_μ , а значит, $\omega \in \Omega_{e,\rho}(F_\mu)$.

Если $\omega \in \Omega_{e,\rho}(F_\mu)$, то как раньше все $\omega_{z_0}(\gamma_j) = 0$, $j = 1, \dots, k$. По условию $\omega = df$, где f – мультипликативная мероморфная функция на F_μ . Отсюда все периоды по Ганнингу для ω принадлежат пространству $B^1(\Gamma_\mu, \rho)$. Следовательно, $[\omega] = 0$ в $H^1(\Gamma_\mu, \rho)$.

Поэтому для любого $\rho \neq 1$ отображение периодов из $\Omega_{2,\rho}(F_\mu)/\Omega_{e,\rho}(F_\mu)$ в $H^1(\Gamma_\mu, \rho)$, задаваемое по правилу $\omega + \Omega_{e,\rho} \rightarrow [\omega + \Omega_{e,\rho}] = [\omega]$, будет корректно определено, взаимнооднозначно и линейно. Следовательно, $\dim_{\mathbb{C}} \Omega_{2,\rho}(F_\mu)/\Omega_{e,\rho}(F_\mu) \leq 2g - 2$ для любого $\rho \neq 1$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Векторное расслоение E_1 над $\mathbf{T}_g \times (L_g \setminus \{1\})$ будет голоморфным векторным расслоением ранга $2g - 2$, причем сокращенный набор (3.1) из $2g - 2$ классов смежности дифференциалов будет базисом локально голоморфных сечений векторного расслоения E_1 . Кроме того, E_1 аналитически изоморфно тривиальному векторному расслоению над $\mathbf{T}_g \times (L_g \setminus \{1\})$ ранга $2g - 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что верно обратное неравенство для размерностей и построим базис в нашем фактор пространстве.

Рассмотрим набор (3.1). Нужно показать, что один класс из перечисленных будет линейно зависеть от $2g - 2$ остальных классов. Вместо одного из дифференциалов $f_0\zeta_1, \dots, f_0\zeta_g$ можно взять df_0 , который представляет нулевой класс смежности. Действительно, если $\rho_0 \neq 1$ на F_{μ_0} , то существует $A_k \in \Gamma_\mu$ такое, что $\exp 2\pi i c_k = \rho_0(A_k) \neq 1$. Поэтому $c_k \neq 0$ для любого ρ из достаточно малой окрестности $U(\rho_0) \subset L_g \setminus \{1\}$ и для любого $[\mu] \in U[\mu_0]$. Так как $df_0 = 2\pi i c_1 f_0\zeta_1 + \dots + 2\pi i c_g f_0\zeta_g$, то $f_0\zeta_k$ выражается линейно через остальные.

Покажем, что сокращенный набор (3.1) классов смежности для дифференциалов

$$f_0\zeta_1, \dots, \widehat{f_0\zeta_k}, \dots, f_0\zeta_g, \quad \omega_{\rho; P_1^2 P_2^2}, \dots, \omega_{\rho; P_1^2 P_g^2}$$

будет линейно независим над $\mathbb{C}$.

Предположим, что существует линейная комбинация, с коэффициентами, не всеми равными нулю, вида

$$C_1 f_0\zeta_1 + \dots + \widehat{C_k f_0\zeta_k} + \dots + C_g f_0\zeta_g + \widetilde{C}_2 \omega_{\rho; P_1^2 P_2^2} + \dots + \widetilde{C}_g \omega_{\rho; P_1^2 P_g^2} = df,$$

где f – (мероморфная) функция для ρ и $df \in \Omega_{e, \rho}(F_\mu)$, а $\rho(A_k) \neq 1$. Верно неравенство

$$(f) \geq \frac{1}{P_1 \dots P_g},$$

но в силу выбора точек $P_1, \dots, P_g$ не существует таких функций f на F_μ для ρ . Поэтому коэффициенты $\widetilde{C}_2 = \dots = \widetilde{C}_g = 0$.

Оставшееся равенство влечет, что f является мультипликативной единицей и $f = C'_1 f_0$. Если $C'_1 = 0$, то $\zeta_1, \dots, \widehat{\zeta_k}, \dots, \zeta_g$ будут линейно зависимы на F_μ . Противоречие.

Если $C'_1 \neq 0$, то $C'_1 df_0 = df = \sum_{j \neq k} C_j f_0\zeta_j$. Для $\rho_0 \neq 1$, $\rho_0(A_k) \neq 1$, имеем

$$C'_1 df_0 = \left(\sum_{j \neq k} C'_1 2\pi i c_j f_0\zeta_j \right) + C'_1 2\pi i c_k f_0\zeta_k \quad \text{на } F_\mu,$$

где $C'_1 c_k \neq 0$. Отсюда получаем на F_μ равенство вида

$$\left(\sum_{j \neq k} (C'_1 2\pi i c_j - C_j) \zeta_j \right) + C'_1 2\pi i c_k \zeta_k = 0.$$

Противоречие с линейной независимостью абелевых дифференциалов $\zeta_1, \dots, \zeta_g$. Поэтому $C_j = 0$ для всех $j \neq k$.

Таким образом, построили набор классов смежности, локально голоморфно зависящих от $[\mu]$ и ρ , которые являются линейно независимыми над $\mathbb{C}$. Значит, верно обратное неравенство $\dim_{\mathbb{C}} \Omega_{2, \rho}(F_\mu) / \Omega_{e, \rho}(F_\mu) \geq 2g - 2$. Поэтому $\dim_{\mathbb{C}} \Omega_{2, \rho}(F_\mu) / \Omega_{e, \rho}(F_\mu) = 2g - 2$.

По теореме Грауэрта [4], [13] в силу односвязности базы $\mathbf{T}_g \times (L_g \setminus \{1\})$ это расслоение аналитически эквивалентно тривиальному векторному расслоению над $\mathbf{T}_g \times (L_g \setminus \{1\})$ ранга $2g - 2$. Теорема 3.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Из теоремы 3.1 следует, что для расслоения E_1 существуют $2g - 2$ глобальных голоморфных сечений над базой $\mathbf{T}_g \times (L_g \setminus \{1\})$.

ТЕОРЕМА 3.2. *Векторное расслоение E_2 над $\mathbf{T}_g \times (\text{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*) \setminus L_g)$ будет голоморфным векторным расслоением ранга $2g - 2$. При этом, наборы (3.2) и (3.3) классов смежности дифференциалов будут базисами локально голоморфных сечений этого расслоения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно только доказать, что верно обратное неравенство для размерностей и построить базис в нашем фактор пространстве. По теореме 1.1 существует $g - 1$ различных точек $P_1, \dots, P_{g-1}$ на F_μ , голоморфно зависящих от $[\mu]$ и ρ , таких, что $r_\rho((P_1 \cdots P_{g-1})^{-1}) = 0$, или не существует мультипликативных функций f для ρ на F_μ , чьи особенности только полюса порядка не выше 1 в этих точках.

Кроме того, по теореме 1.3 о мультипликативных пробелах Вейерштрасса для существенного характера ρ в точке $\tilde{P}_1$ на F_μ , голоморфно зависящей от $[\mu]$ и ρ , имеется ровно $g - 1$ мультипликативных пробелов $\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_{g-1}$, удовлетворяющих условию $1 \leq \tilde{n}_1 < \tilde{n}_2 < \dots < \tilde{n}_{g-1} < 2g$ [8; с. 76].

Покажем, что классы смежности, задаваемые дифференциалами Прима из набора (3.2) или (3.3) для ρ , будут линейно независимы над $\mathbb{C}$ на F_μ .

Докажем от противного. Если набор (3.2) линейно зависим, то верно равенство

$$C_1 \tilde{\zeta}_1 + \dots + C_{g-1} \tilde{\zeta}_{g-1} + C'_1 \tilde{\tau}_{P_1}^{(2)} + \dots + C'_{g-1} \tilde{\tau}_{P_{g-1}}^{(2)} = df,$$

в котором не все коэффициенты равны нулю, где f – мероморфная функция для ρ на F_μ . Коэффициенты $C'_1 = C'_2 = \dots = C'_{g-1} = 0$, так как не существует функции f для ρ , у которой только точки $P_1, \dots, P_{g-1}$ будут простыми полюсами.

Если числа $C_1, \dots, C_{g-1}$ не все равны нулю, то ввиду голоморфности левой части получим, что f – единица для ρ и характер ρ несущественный. Получили противоречие с условием. Поэтому $C_1 = \dots = C_{g-1} = 0$.

Таким образом, показали, что набор (3.2) дает линейно независимые над $\mathbb{C}$ классы смежности нашего фактор пространства.

Покажем, что набор (3.3) представляет линейно независимые классы смежности. Предположим, что есть линейная зависимость и верно равенство

$$C_1 \tilde{\zeta}_1 + \dots + C_{g-1} \tilde{\zeta}_{g-1} + C'_1 \tilde{\tau}_{\tilde{P}_1}^{(\tilde{n}_1+1)} + \dots + C'_{g-1} \tilde{\tau}_{\tilde{P}_{g-1}}^{(\tilde{n}_{g-1}+1)} = df,$$

где f – мероморфная функция для ρ на F_μ . Если не все коэффициенты $C'_1, \dots, C'_{g-1}$ равны нулю, то существует коэффициент $C'_{j_0} \neq 0$ с максимальным номером, а значит, функция f имеет полюс только в точке $\tilde{P}_1$ точно порядка $\tilde{n}_{j_0}$. Противоречие, так как $\tilde{n}_{j_0}$ – мультипликативный пробел Вейерштрасса в $\tilde{P}_1$ на F_μ для ρ . Равенство нулю коэффициентов $C_1, \dots, C_{g-1}$ доказывается также, как выше. Таким образом, $\dim \Omega_{2,\rho}(F_\mu)/\Omega_{e,\rho}(F_\mu) \geq 2g - 2$ для существенных характеров ρ на F_μ . Теорема 3.2 доказана.

4. Размерность и базис $\Omega_\rho((Q_1 \dots Q_s)^{-1}; F_\mu)/\Omega_{e,\rho}(1; F_\mu)$. Обозначим через $\Omega_\rho((Q_1 \dots Q_s)^{-1}; F_\mu)$ пространство мероморфных дифференциалов Прима для ρ с полюсами не выше первого порядка в точках $Q_1, \dots, Q_s$, $s \geq 2$, а через $\Omega_{e,\rho}(1; F_\mu)$ – подпространство мультипликативно точных голоморфных дифференциалов для ρ , где дивизор $Q_1 \dots Q_s$ на F_μ понимается как глобальное вещественно аналитическое сечение Эрла [14] расслоения целых дивизоров степени s над пространством Тейхмюллера $\mathbf{T}_g$ [8].

Введем набор дифференциалов для несущественных характеров

$$f_0\zeta_1, \dots, \widehat{f_0\zeta_k}, \dots, f_0\zeta_g, \quad f_0\tau_{Q_2Q_1}, \dots, f_0\tau_{Q_sQ_1}. \quad (4.1)$$

Для несущественного $\rho \neq 1$ дифференциал $df_0 \neq 0$ порождает одномерное подпространство в $\Omega_\rho(1; F_\mu)$, т.е. $\Omega_\rho(1; F_\mu) = \langle df_0 \rangle \oplus H$, где H будет $(g-1)$ -мерным подпространством. Так если $\rho_0 \neq 1$, существует a_k такое, что $\exp 2\pi i c_k = \rho_0(a_k) \neq 1$ или $c_k \neq 0 \pmod{\mathbb{Z}}$. Далее $df_0/f_0 = 2\pi i(c_1\zeta_1 + \dots + c_g\zeta_g)$. Отсюда

$$2\pi i c_k f_0 \zeta_k = df_0 - \sum_{j \neq k} 2\pi i c_j f_0 \zeta_j, \quad H = \bigoplus_{j \neq k} \langle f_0 \zeta_j \rangle.$$

В достаточно малых окрестностях $U([\mu_0])$ и $U(\rho_0)$ для такого характера ρ_0 для всех $\rho \in U(\rho_0)$ верно $\rho(a_k) \neq 1$ или $c_k \neq 0$.

Обозначим через

$$E_3 = \bigcup_{[\mu], \rho} \Omega_\rho((Q_1 \dots Q_s)^{-1}; F_\mu) / \Omega_{e, \rho}(1; F_\mu)$$

векторное расслоение над $\mathbf{T}_g \times (L_g \setminus \{1\})$.

Используя формулу Римана–Роха, для любого характера найдем размерность $\Omega_\rho((Q_1 \dots Q_s)^{-1}; F_\mu)$. Имеем

$$r_{\rho^{-1}}(Q_1 \dots Q_s) = -\deg(Q_1 \dots Q_s) - g + 1 + i_\rho((Q_1 \dots Q_s)^{-1}).$$

Предположим, что существует $f \neq 0$, $f \in L_{\rho^{-1}}(Q_1 \dots Q_s)$, т.е. f для ρ^{-1} такая, что $(f) \geq Q_1 \dots Q_s$, $s \geq 1$. Следовательно, $0 = \deg(f) \geq s \geq 1 > 0$. Противоречие. Поэтому $r_{\rho^{-1}}(Q_1 \dots Q_s) = 0$ и $i_\rho((Q_1 \dots Q_s)^{-1}) = g + s - 1$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Векторное расслоение E_3 над $\mathbf{T}_g \times (L_g \setminus \{1\})$ будет голоморфным векторным расслоением ранга $g + s - 2$, причем сокращенный набор (4.1) из $g + s - 2$ классов смежности дифференциалов будет базисом локально голоморфных сечений этого векторного расслоения, где $s \geq 2$. Кроме того, E_3 аналитически изоморфно тривиальному векторному расслоению над $\mathbf{T}_g \times (L_g \setminus \{1\})$ ранга $g + s - 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ρ – несущественный характер и $\rho \neq 1$. Тогда существует f_0 мультипликативная единица, т.е. $(f_0) = 1$, такая, что $0 \neq df_0 \in \Omega_{e, \rho}(1; F_\mu)$. Покажем, что нет других базисных элементов, кроме cdf_0 , $c \neq 0$, в $\Omega_{e, \rho}(1; F_\mu)$. Предположим противное, пусть существует $\omega \neq 0$ и $\omega \neq cdf_0$, принадлежащий $\Omega_{e, \rho}(1; F_\mu)$. Тогда $\omega = df$ – мультипликативно точный голоморфный дифференциал, и существует f – голоморфная функция для ρ и $\deg(f) = 0$. Так как у f нет полюсов, то нет и нулей, и f – мультипликативная единица для ρ на F_μ . Поделив f на f_0 , получим функцию $g = f/f_0$ такую, что $(g) = (f/f_0) = (f) = 1$, где g – однозначная голоморфная функция на F_μ , а значит, g константа, отличная от нуля. Тогда $f = cf_0$, и $\omega = df = cdf_0$, $c \neq 0$. Противоречие. Поэтому $\Omega_{e, \rho}(1; F_\mu) = \langle df_0 \rangle$ и $\dim_{\mathbb{C}} \Omega_{e, \rho}(1; F_\mu) = 1$.

Отсюда получаем, что

$$\dim_{\mathbb{C}} \Omega_\rho((Q_1 \dots Q_s)^{-1}; F_\mu) / \Omega_{e, \rho}(1; F_\mu) = g + s - 2.$$

Для несущественного характера ρ построим базис в этом фактор пространстве. Возьмем для $\rho_0 \neq 1$, $\rho_0(a_k) = \exp 2\pi i c_k \neq 1$ для некоторого k следующие дифференциалы:

$$f_0\zeta_1, \dots, \widehat{f_0\zeta_k}, \dots, f_0\zeta_g, \quad f_0\tau_{Q_2Q_1}, \dots, f_0\tau_{Q_sQ_1},$$

где $2\pi i c_k f_0\zeta_k = df_0 - 2\pi i \sum_{j \neq k} c_j f_0\zeta_j$, $c_k \neq 0$. Пусть существует линейная комбинация, у которой не все нулевые коэффициенты, такая, что

$$C_1 f_0\zeta_1 + \dots + \widehat{C_k f_0\zeta_k} + \dots + C_g f_0\zeta_g + \tilde{C}_2 f_0\tau_{Q_2Q_1} + \dots + \tilde{C}_s f_0\tau_{Q_sQ_1} = df \quad \text{на } F_\mu,$$

где f – голоморфная мультипликативная функция на F_μ . Тогда коэффициенты $\tilde{C}_2 = 0, \dots, \tilde{C}_s = 0$, так как дифференциалы в правой и левой частях имеют разные особые точки.

Теперь, как в доказательстве теоремы 3.1, получим, что $C_j = 0$ для всех $j \neq k$.

Таким образом, набор классов смежности

$$[f_0\zeta_1], \dots, \widehat{[f_0\zeta_k]}, \dots, [f_0\zeta_g], \quad [f_0\tau_{Q_2Q_1}], \dots, [f_0\tau_{Q_sQ_1}]$$

будет базисом в нашем фактор пространстве для несущественного характера $\rho \neq 1$, который голоморфно зависит от $[\mu] \in U[\mu_0]$ и от $\rho \in U(\rho_0)$. Теорема 4.1 доказана.

Заметим, что для $\rho \equiv 1$, $s > 1$, дифференциалы $\zeta_1, \dots, \zeta_g$, $\tau_{Q_2Q_1}, \dots, \tau_{Q_sQ_1}$ образуют базис в пространстве $\Omega(Q_1 \cdots Q_s)^{-1}; F_\mu$ и $\Omega_e(1; F_\mu) = \{0\}$, так как по классической теореме Римана–Роха

$$i((Q_1 \cdots Q_s)^{-1}) = s + g - 1 + r(Q_1 \cdots Q_s) = s + g - 1.$$

ТЕОРЕМА 4.2. На компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$ для первой голоморфной группы когомологий де Рама $H_{\text{hol}, \rho}^1(F_\mu) = \Omega_\rho(1; F_\mu) / \Omega_{e, \rho}(1; F_\mu)$ для характеров верно, что $\dim_{\mathbb{C}} H_{\text{hol}, \rho}^1(F_\mu) = g - 1$, если $\rho \neq 1$. В этих фактор-пространствах на F_μ :

- (i) для несущественного характера $\rho_0 \neq 1$, $\rho_0(a_k) \neq 1$, классы смежности

$$[f_0\zeta_1], \dots, \widehat{[f_0\zeta_k]}, \dots, [f_0\zeta_g]$$

дифференциалов образуют базис, который локально голоморфно зависит от $[\mu]$ и ρ ;

- (ii) для существенного характера ρ классы смежности $[\tilde{\zeta}_1], \dots, [\tilde{\zeta}_{g-1}]$ дифференциалов образуют базис, где $\tilde{\zeta}_1, \dots, \tilde{\zeta}_{g-1}$ – любой базис голоморфных дифференциалов в пространстве $\Omega_\rho(1; F_\mu)$, который локально голоморфно зависит от $[\mu]$ и от ρ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ρ_0 – несущественный характер и $\rho_0 \neq 1$, $\rho_0(a_k) \neq 1$. Рассмотрим пространство $\Omega_{e, \rho}(1; F_\mu)$. Оно, по теореме 4.1, в данном случае одномерно. В [8; с. 24] доказано, что $i_\rho(1) = g$. Отсюда $\dim_{\mathbb{C}} H_{\text{hol}, \rho}^1(F_\mu) = g - 1$.

Пусть ρ – существенный характер. Пространство $\Omega_{e, \rho}(1; F_\mu)$ состоит из нуля. Поэтому $\dim_{\mathbb{C}} H_{\text{hol}, \rho}^1(F_\mu) = i_\rho(1) = g - 1$ [8; с. 24]. Теорема 4.2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. В случае $\rho \equiv 1$ в [6] доказано: $H_{\text{hol}}^1(F_\mu) = \Omega(1; F_\mu)$ и верно равенство $\dim_{\mathbb{C}} H_{\text{hol}}^1(F_\mu) = g$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. На гиперэллиптической римановой поверхности для несущественного характера в теоремах 3.1 и 4.1 можно построить базис, который локально голоморфно зависит от точек ветвления этой поверхности и характеров [8; с. 195].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] F. Prym, G. Rost, *Theorie der Prymschen Funktionen erster Ordnung im Anschluß an die Schöpfungen Riemanns*, B. G. Teubner, Leipzig, 1911.
- [2] P. Appell, “Sur les intégrales de fonctions à multiplicateurs et leur application au développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques”, *Acta Math.*, **13**:3/4 (1890), 1–174.
- [3] H. Petersson, “Über eine Metrisierung der automorphen Formen und die Theorie der Poincaréschen Reihen”, *Math. Ann.*, **117**:4 (1940), 453–537.
- [4] R. C. Gunning, “On the period classes of Prym differentials. I”, *J. Reine Angew. Math.*, **319** (1980), 153–171.
- [5] J. Fay, “Analytic torsion and Prym differentials”, *Riemann Surfaces and Related Topics*, Ann. of Math. Stud., **97**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1980, 107–122.
- [6] H. M. Farkas, I. Kra, *Riemann Surfaces*, Grad. Texts in Math., **71**, Springer-Verlag, New-York, 1992.
- [7] Б. А. Дубровин, *Римановы поверхности и нелинейные уравнения*, Ч. 1, Изд-во Моск. ун-та, М., 1986.
- [8] В. В. Чуешев, *Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности*, Ч. 2, КемГУ, Кемерово, 2003.
- [9] В. В. Чуешев, “Мультипликативные точки Вейерштрасса и многообразие Якоби компактной римановой поверхности”, *Матем. заметки*, **74**:4 (2003), 629–636.
- [10] А. А. Казанцева, В. В. Чуешев, “Пространства мероморфных дифференциалов Прима на конечной римановой поверхности”, *Сиб. матем. журн.*, **53**:1 (2012), 89–106.
- [11] М. И. Тулина, “Однозначные дифференциалы и специальные дивизоры дифференциалов Прима”, *Сиб. матем. журн.*, **54**:4 (2013), 914–931.
- [12] Л. В. Альфорс, Л. Берс, *Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения*, ИЛ, М., 1961.
- [13] В. В. Чуешев, *Геометрическая теория функций на компактной римановой поверхности*, КемГУ, Кемерово, 2005.
- [14] C. J. Earle, “Families of Riemann surfaces and Jacobi varieties”, *Ann. of Math. (2)*, **107**:2 (1978), 255–286.
- [15] Дж. Спрингер, *Введение в теорию римановых поверхностей*, ИЛ, М., 1960.
- [16] E. Arbarello, “Weierstrass points and moduli of curves”, *Compositio Math.*, **29** (1974), 325–342.
- [17] М. И. Головина, “Дивизоры дифференциалов Прима на римановой поверхности”, *Вестн. КемГУ*, 2011, № 3/1, 193–199.

М. И. Тулина

Горно-Алтайский государственный университет

E-mail: aniram.ru@googlemail.com

Поступило

01.02.2011

Исправленный вариант

21.01.2013

В. В. Чуешев

Кемеровский государственный университет

E-mail: vvchueshev@ngs.ru