Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. В. Симонов, Смешанные модули гладкости в смешанных метриках, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 5, 747–761

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9128>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 13:24:44

Смешанные модули гладкости в смешанных метриках

Б. В. Симонов

Для смешанного модуля гладкости положительного порядка найдена его взаимосвязь с нормами частичных сумм ряда Фурье в смешанной метрике. Установлено соотношение между смешанными модулями гладкости положительного порядка в разных смешанных метриках.

Библиография: 14 названий.

1. Пусть $L_p([0, 2\pi])$, $1 < p < \infty$, – множество измеримых 2π -периодических функций $f(x)$ таких, что

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty;$$

$f^{(\rho)}(x)$ – производная в смысле Вейля порядка ρ , $\rho > 0$, функции $f(x)$ [1];

$$S_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) D_n(t) dt, \quad \text{где} \quad D_n(t) = \frac{\sin((n+1/2)t)}{2 \sin(t/2)}$$

– частичные суммы ряда Фурье функции $f(x)$; $\omega_\alpha(f; \delta)_p$ – модуль гладкости порядка $\alpha > 0$ функции $f(x) \in L_p([0, 2\pi])$, т.е.

$$\omega_\alpha(f; \delta)_p = \sup_{|h| \leq \delta} \|\Delta_h^\alpha f(x)\|_p, \quad \Delta_h^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x + (\alpha - k)h),$$

где $\binom{\alpha}{k}$ – бином Ньютона (при целых α $\Delta_h^\alpha f(x)$ – α -я разность); $c, c_1, \dots$ – положительные постоянные; $c(\nu, \mu, \dots)$, $c_1(\nu, \mu, \dots)$ – положительные постоянные, зависящие лишь от фиксированных $\nu, \mu, \dots$ и, вообще говоря, разные в разных формулах.

В работах [2]–[4] доказаны следующие теоремы.

ТЕОРЕМА А [2], [3]. Пусть $f(x) \in L_p([0, 2\pi])$, $1 < p < \infty$, $\alpha > 0$. Тогда

$$c_1(p, \alpha) \omega_\alpha \left(f, \frac{1}{n} \right)_p \leq \frac{1}{n^\alpha} \|S_n^{(\alpha)}(f, x)\|_p + \|f(x) - S_n(f, x)\|_p \leq c_2(p, \alpha) \omega_\alpha \left(f, \frac{1}{n} \right)_p.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00175) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-979.2012.1).

ТЕОРЕМА В [4]. Пусть $1 < p < q < \infty$, $\alpha > 0$. Тогда

$$\omega_\alpha(f, \delta)_q \leq c_3(p, \alpha) \left(\int_0^\delta t^{-(1/p-1/q)q} \omega_{\alpha+1/p-1/q}^q(f, t)_p \frac{dt}{t} \right)^{1/q}.$$

В данной работе теоремы А и В распространяются на смешанные модули гладкости положительных порядков функции двух переменных.

2. Пусть $L_{p_1, p_2}([0, 2\pi]^2)$, $1 < p_1 < \infty$, $1 < p_2 < \infty$, – множество измеримых функций двух переменных $f(x, y)$ 2π -периодических по каждому переменному и таких, что

$$\|f\|_{p_1, p_2} = \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |f(x, y)|^{p_1} dx \right)^{p_2/p_1} dy \right)^{1/p_2} < \infty;$$

$f^{(\rho_1, \rho_2)}(x, y)$ – производная в смысле Вейля [5] порядка ρ_1 , $\rho_1 \geq 0$, по переменной x и порядка ρ_2 , $\rho_2 \geq 0$, по переменной y . Обозначим частичные суммы ряда Фурье функции $f(x, y) \in L_{p_1, p_2}([0, 2\pi]^2)$ через

$$\begin{aligned} S_{n, \infty}(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t, y) D_n(t) dt, \\ S_{\infty, m}(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y+t) D_m(t) dt, \\ S_{n, m}(f) &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t_1, y+t_2) D_n(t_1) D_m(t_2) dt_1 dt_2, \end{aligned}$$

$\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f; \delta_1, \delta_2)_{p_1, p_2}$ – смешанный модуль гладкости функции $f(x, y) \in L_{p_1, p_2}([0, 2\pi]^2)$ порядков $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$ по переменным x и y соответственно, т.е.

$$\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f; \delta_1, \delta_2)_{p_1, p_2} = \sup_{|h_1| \leq \delta_1, |h_2| \leq \delta_2} \|\Delta_{h_1}^{\alpha_1}(\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f))\|_{p_1, p_2}.$$

Здесь разность порядка $\alpha_1 > 0$ по переменной x и, соответственно, разность порядка $\alpha_2 > 0$ по переменной y определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta_{h_1}^{\alpha_1}(f) &= \sum_{k_1=0}^{\infty} (-1)^{k_1} \binom{\alpha_1}{k_1} f(x + (\alpha_1 - k_1)h_1, y), \\ \Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f) &= \sum_{k_2=0}^{\infty} (-1)^{k_2} \binom{\alpha_2}{k_2} f(x, y + (\alpha_2 - k_2)h_2). \end{aligned}$$

При целых $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$ $\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f; \delta_1, \delta_2)_{p, p}$ является смешанным модулем гладкости, введенным Никольским [6].

Пусть $L_{p_1, p_2}^0([0, 2\pi]^2)$ – множество функций $f(x, y)$ из $L_{p_1, p_2}([0, 2\pi]^2)$ таких, что $\int_0^{2\pi} f(x, y) dx = 0$ для почти всех y , а также $\int_0^{2\pi} f(x, y) dy = 0$ для почти всех x . Тогда функцию $f(x, y) \in L_{p_1, p_2}([0, 2\pi]^2)$ можно записать в виде

$$f(x, y) = F(x, y) + \phi(x) + \psi(y) + c,$$

где $F(x, y) \in L_{p_1, p_2}^0([0, 2\pi]^2)$. Это верно, например, если

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) dy, & \psi(y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) dx, \\ c &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) dx dy, & F(x, y) &= f(x, y) - \phi(x) - \psi(y) - c.\end{aligned}$$

Так как $\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f; \delta_1, \delta_2)_{p_1, p_2} = \omega_{\alpha_1, \alpha_2}(F; \delta_1, \delta_2)_{p_1, p_2}$, в дальнейшем будем считать, что $f(x, y) \in L_{p_1, p_2}^0([0, 2\pi]^2)$.

Целью работы является доказательство следующих теорем.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(x, y) \in L_{p_1, p_2}^0([0, 2\pi]^2)$, $1 < p_1 < \infty$, $1 < p_2 < \infty$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_2 \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\begin{aligned}& c_1(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2) \omega_{\alpha_1, \alpha_2} \left(f; \frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2} \right)_{p_1, p_2} \\& \leq \frac{1}{n_1^{\alpha_1}} \frac{1}{n_2^{\alpha_2}} \|S_{n_1, n_2}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(f)\|_{p_1, p_2} + \frac{1}{n_1^{\alpha_1}} \|S_{n_1, \infty}^{(\alpha_1, 0)}(f - S_{\infty, n_2}(f))\|_{p_1, p_2} \\& \quad + \frac{1}{n_2^{\alpha_2}} \|S_{\infty, n_2}^{(0, \alpha_2)}(f - S_{n_1, \infty}(f))\|_{p_1, p_2} \\& \quad + \|f - (S_{n_1, \infty}(f) + S_{\infty, n_2}(f) - S_{n_1, n_2}(f))\|_{p_1, p_2} \\& \leq c_2(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2) \omega_{\alpha_1, \alpha_2} \left(f; \frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2} \right)_{p_1, p_2}.\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f(x, y) \in L_{p_1, p_2}^0([0, 2\pi]^2)$, $1 < p_1 < q_1 < \infty$, $1 < p_2 < q_2 < \infty$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\delta_1 \in (0, 1]$, $\delta_2 \in (0, 1]$. Тогда

$$\begin{aligned}& \omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f; \delta_1, \delta_2)_{q_1, q_2} \\& \leq c(p_1, p_2, q_1, q_2, \alpha_1, \alpha_2) \\& \quad \times \left(\int_0^{\delta_2} \left(\int_0^{\delta_1} (t_1^{-1/p_1+1/q_1} t_2^{-1/p_2+1/q_2} \right. \right. \\& \quad \times \omega_{\alpha_1+1/p_1-1/q_1, \alpha_2+1/p_2-1/q_2}(f; t_1, t_2)_{p_1, p_2})^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \left. \left. \frac{dt_2}{t_2} \right)^{1/q_2} dt_2 \right)^{1/q_2}.\end{aligned}\tag{1}$$

Отметим, что теоремы 1 и 2 в случае $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$ доказаны в работе [7]. Также заметим, что в предельных случаях, если хотя бы одно $p_i = 1$, $i = 1, 2$, или хотя бы одно $q_i = +\infty$, $i = 1, 2$, неравенство (1) несправедливо. Соответствующие примеры функций можно построить, используя одномерные примеры из работы [8].

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорему А нельзя распространить на случай метрики $L_p([0, 2\pi])$, если $p = 1$ или $p = +\infty$; теорему 1 также нельзя распространить на случай метрики $L_{p_1, p_2}([0, 2\pi]^2)$, если хотя бы одно $p_i = 1$ или хотя бы одно $p_i = +\infty$, $i = 1, 2$. Однако для любого $p \in [1, +\infty]$ и $p_i \in [1, +\infty]$ ($i = 1, 2$) справедливы аналоги теорем А и 1, если вместо частичных сумм ряда Фурье использовать суммы Валле–Пуссена ряда Фурье.

3. Вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства теорем 1 и 2.

ЛЕММА 1 [9]. Пусть $f(x) \in L_p([0, 2\pi])$, $g(x) \in L_p([0, 2\pi])$, $1 < p < \infty$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Тогда

$$\Delta_h^\alpha(f+g) = \Delta_h^\alpha(f) + \Delta_h^\alpha(g), \quad \Delta_h^\alpha(\Delta_h^\beta(f)) = \Delta_h^{\alpha+\beta}(f), \quad \|\Delta_h^\alpha(f)\|_p \leq c(\alpha)\|f\|_p,$$

где $c(\alpha) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} < \infty$.

ЛЕММА 2 [10]. Пусть числа α , β и a_k , $k = 1, 2, \dots$, таковы, что $a_k \geq 0$, $0 < \alpha < \beta < \infty$. Тогда справедливо неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^\beta \right)^{1/\beta} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^\alpha \right)^{1/\alpha}.$$

ЛЕММА 3. Пусть $T_{n_1, \infty}(x, y) \in L_{p_1, p_2}([0, 2\pi]^2)$ и является тригонометрическим полиномом порядка n_1 по переменной x ; пусть $T_{\infty, n_2}(x, y) \in L_{p_1, p_2}([0, 2\pi]^2)$ и является тригонометрическим полиномом порядка n_2 по переменной y ; $1 < p_1 < \infty$, $1 < p_2 < \infty$; $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$; $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_2 \in \mathbb{N}$; $0 < |h_1| \leq \pi/n_1$, $0 < |h_2| \leq \pi/n_2$. Тогда

$$c_1(\alpha_1) \|\Delta_{h_1}^{\alpha_1} T_{n_1, \infty}\|_{p_1, p_2} \leq \frac{1}{n_1^{\alpha_1}} \|T_{n_1, \infty}^{(\alpha_1, 0)}\|_{p_1, p_2} \leq \|\Delta_{\pi/n_1}^{\alpha_1} T_{n_1, \infty}\|_{p_1, p_2}, \quad (2)$$

$$c_2(\alpha_2) \|\Delta_{h_2}^{\alpha_2} T_{\infty, n_2}\|_{p_1, p_2} \leq \frac{1}{n_2^{\alpha_2}} \|T_{\infty, n_2}^{(0, \alpha_2)}\|_{p_1, p_2} \leq \|\Delta_{\pi/n_2}^{\alpha_2} T_{\infty, n_2}\|_{p_1, p_2}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем справедливость неравенства (2).

Для тригонометрических полиномов, имеющих производную порядка α , применим представление из [9]:

$$T_{n_1, \infty}^{(\alpha_1, 0)}(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k \Delta_{\pi/n_1}^{\alpha_1} T_{n_1, \infty} \left(x + \frac{k\pi}{n_1} - \frac{\alpha_1 \pi}{2n_1}, y \right)$$

для почти всех y , где $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |b_k| \leq n_1^{\alpha_1}$.

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \|T_{n_1, \infty}^{(\alpha_1, 0)}(x, y)\|_{p_1, p_2} &\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |b_k| \left\| \Delta_{\pi/n_1}^{\alpha_1} T_{n_1, \infty} \left(x + \frac{k\pi}{n_1} - \frac{\alpha_1 \pi}{2n_1}, y \right) \right\|_{p_1, p_2} \\ &\leq n_1^{\alpha_1} \|\Delta_{\pi/n_1}^{\alpha_1} T_{n_1, \infty}\|_{p_1, p_2}. \end{aligned}$$

Правая часть неравенства (2) доказана. Докажем справедливость левой части неравенства (2).

Пусть $0 < h_1 \leq \pi/n_1$. Рассмотрим сначала случай, когда $0 < \alpha_1 \leq 1$. Для разности положительного порядка от тригонометрического полинома применим представление из [9]:

$$\Delta_{h_1}^{\alpha_1} T_{n_1, \infty} \left(x - \frac{\alpha_1}{2} h_1, y \right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k T_{n_1, \infty}^{(\alpha_1, 0)} \left(x + \frac{k\pi}{n_1}, y \right)$$

для почти всех y , где $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |d_k| \leq 2(\pi/n_1)^{\alpha_1}$.

Отсюда имеем

$$\|\Delta_{h_1}^{\alpha_1} T_{n_1, \infty}\|_{p_1, p_2} \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |d_k| \|T_{n_1, \infty}^{(\alpha_1, 0)}\|_{p_1, p_2} \leq 2 \left(\frac{\pi}{n_1} \right)^{\alpha_1} \|T_{n_1, \infty}^{(\alpha_1, 0)}\|_{p_1, p_2}. \quad (4)$$

Пусть теперь $\alpha_1 > 1$ и $\alpha_1 = m + \beta$, где $m = 1, 2, \dots$, $0 < \beta \leq 1$. Для разности положительного порядка от тригонометрического полинома применим представление из [9]:

$$\Delta_{h_1}^{\alpha_1} T_{n_1, \infty} \left(x - \frac{\alpha_1}{2} h_1, y \right) \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k \Delta_{h_1}^m T_{n_1, \infty}^{(\beta, 0)} \left(x + \frac{k\pi}{n_1}, y \right)$$

для почти всех y , где $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |d_k| \leq 2(\pi/n_1)^\beta$. Отсюда следует, что

$$\|\Delta_{h_1}^{\alpha_1} T_{n_1, \infty}\|_{p_1, p_2} \leq 2 \left(\frac{\pi}{n_1} \right)^\beta \|\Delta_{h_1}^m T_{n_1, \infty}^{(\beta, 0)}\|_{p_1, p_2}.$$

Применяя m раз неравенство (4), получим

$$\|\Delta_{h_1}^{\alpha_1} T_{n_1, \infty}\|_{p_1, p_2} \leq 2^{m+1} \left(\frac{\pi}{n_1} \right)^{\alpha_1} \|T_{n_1, \infty}^{(\alpha_1, 0)}\|_{p_1, p_2}. \quad (5)$$

Неравенства (4) и (5) будут верны, если в них h_1 заменить на $-h_1$. Из этого следует справедливость левой части неравенства (2).

Неравенство (3) доказывается аналогично.

Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 4 [11]. Пусть $f(x, y) \in L_{p_1, p_2}^0([0, 2\pi]^2)$, $1 < p_1 < \infty$, $1 < p_2 < \infty$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} & \|f - (S_{n_1, \infty}(f) + S_{\infty, n_2}(f) - S_{n_1, n_2}(f))\|_{p_1, p_2} \\ & \leq c(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2) \omega_{\alpha_1, \alpha_2} \left(f; \frac{1}{n_1 + 1}, \frac{1}{n_2 + 1} \right)_{p_1, p_2}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 5 (неравенство Никольского) [10], [12]. Пусть $T_{n_1, \infty}(x, y) \in L_{p_1, p_2}([0, 2\pi]^2)$ и является тригонометрическим полиномом порядка n_1 по переменной x ; пусть $T_{\infty, n_2}(x, y) \in L_{p_1, p_2}([0, 2\pi]^2)$ и является тригонометрическим полиномом порядка n_2 по переменной y ; $T_{n_1, n_2}(x, y)$ – тригонометрический полином порядка n_1 по переменной x и порядка n_2 по переменной y , $1 \leq p_i \leq q_i \leq \infty$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\begin{aligned} \|T_{n_1, n_2}(x, y)\|_{q_1, q_2} & \leq c_1 (n_1 + 1)^{1/p_1 - 1/q_1} (n_2 + 1)^{1/p_2 - 1/q_2} \|T_{n_1, n_2}(x, y)\|_{p_1, p_2}, \\ \|T_{n_1, \infty}(x, y)\|_{q_1, p_2} & \leq c_2 (n_1 + 1)^{1/p_1 - 1/q_1} \|T_{n_1, \infty}(x, y)\|_{p_1, p_2}, \\ \|T_{\infty, n_2}(x, y)\|_{p_1, q_2} & \leq c_3 (n_2 + 1)^{1/p_2 - 1/q_2} \|T_{\infty, n_2}(x, y)\|_{p_1, p_2}, \end{aligned}$$

где положительные постоянные c_1, c_2, c_3 не зависят от n_i , $i = 1, 2$.

ЛЕММА 6 [5]. Пусть $1 < p_i \leq q_i < \infty$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\|f\|_{q_1, q_2} \leq c(p_1, p_2, q_1, q_2) \|f^{(1/p_1 - 1/q_1, 1/p_2 - 1/q_2)}\|_{p_1, p_2}$$

для всех функций $f(x, y)$ таких, что $\int_0^{2\pi} f(x, y) dx = 0$ для почти всех y , и что $\int_0^{2\pi} f(x, y) dy = 0$ для почти всех x .

ЛЕММА 7 [5]. Пусть $f(x, y) \in L_{p_1, p_2}([0, 2\pi]^2)$, $1 < p_1 < \infty$, $1 < p_2 < \infty$. Тогда

$$\|S_{n_1, \infty}(f)\|_{p_1, p_2} \leq c_1(p_1, p_2)\|f\|_{p_1, p_2}, \quad \|S_{\infty, n_2}(f)\|_{p_1, p_2} \leq c_2(p_1, p_2)\|f\|_{p_1, p_2}.$$

4. Докажем теорему 1. Применяя леммы 1 и 3, имеем для $0 < |h_1| \leq \pi/n_1$, $0 < |h_2| \leq \pi/n_2$

$$\begin{aligned} & \|\Delta_{h_1}^{\alpha_1}(\Delta_{h_2}^{\alpha_2}f)\|_{p_1, p_2} \\ & \leq c_1(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2) \\ & \quad \times (\|f - (S_{n_1, \infty}(f) + S_{\infty, n_2}(f) - S_{n_1, n_2}(f))\|_{p_1, p_2} \\ & \quad + \|\Delta_{h_1}^{\alpha_1}S_{n_1, \infty}(f - S_{\infty, n_2}(f))\|_{p_1, p_2} + \|\Delta_{h_2}^{\alpha_2}S_{\infty, n_2}(f - S_{n_1, \infty}(f))\|_{p_1, p_2} \\ & \quad + \|\Delta_{h_1}^{\alpha_1}(\Delta_{h_2}^{\alpha_2}S_{n_1, n_2}(f))\|_{p_1, p_2}) \\ & \leq c_2(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2) \\ & \quad \times \left(\|f - (S_{n_1, \infty}(f) + S_{\infty, n_2}(f) - S_{n_1, n_2}(f))\|_{p_1, p_2} \right. \\ & \quad + \frac{1}{n_1^{\alpha_1}}\|S_{n_1, \infty}^{(\alpha_1, 0)}(f - S_{\infty, n_2}(f))\|_{p_1, p_2} + \frac{1}{n_2^{\alpha_2}}\|S_{\infty, n_2}^{(0, \alpha_2)}(f - S_{n_1, \infty}(f))\|_{p_1, p_2} \\ & \quad \left. + \frac{1}{n_1^{\alpha_1}}\frac{1}{n_2^{\alpha_2}}\|S_{n_1, n_2}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(f)\|_{p_1, p_2} \right). \end{aligned}$$

Тем самым оценка сверху в теореме 1 доказана.

Рассмотрим

$$\begin{aligned} J & = \|f - (S_{n_1, \infty}(f) + S_{\infty, n_2}(f) - S_{n_1, n_2}(f))\|_{p_1, p_2} + \frac{1}{n_1^{\alpha_1}}\|S_{n_1, \infty}^{(\alpha_1, 0)}(f - S_{\infty, n_2}(f))\|_{p_1, p_2} \\ & \quad + \frac{1}{n_2^{\alpha_2}}\|S_{\infty, n_2}^{(0, \alpha_2)}(f - S_{n_1, \infty}(f))\|_{p_1, p_2} + \frac{1}{n_1^{\alpha_1}}\frac{1}{n_2^{\alpha_2}}\|S_{n_1, n_2}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(f)\|_{p_1, p_2} \\ & = J_1 + J_2 + J_3 + J_4. \end{aligned}$$

Применяя леммы 3 и 4, получим оценки

$$\begin{aligned} J_1 & \leq c_3(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2)\omega_{\alpha_1, \alpha_2}\left(f; \frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}\right)_{p_1, p_2}, \\ J_4 & \leq c_4(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2)\omega_{\alpha_1, \alpha_2}\left(f; \frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}\right)_{p_1, p_2}. \end{aligned}$$

Оценим J_2 :

$$\begin{aligned} J_2 & = \frac{1}{n_1^{\alpha_1}}\|S_{n_1, \infty}^{(\alpha_1, 0)}(f - S_{\infty, n_2}(f))\|_{p_1, p_2} = \frac{1}{n_1^{\alpha_1}}\|S_{n_1, \infty}^{(\alpha_1, 0)}(f) - S_{\infty, n_2}(S_{n_1, \infty}^{(\alpha_1, 0)}(f))\|_{p_1, p_2} \\ & = \frac{1}{n_1^{\alpha_1}}\|S_{n_1, \infty}^{(\alpha_1, 0)}(f) - (S_{0, \infty}(S_{n_1, \infty}^{(\alpha_1, 0)}(f)) + S_{\infty, n_2}(S_{n_1, \infty}^{(\alpha_1, 0)}(f)) - S_{0, n_2}(S_{n_1, \infty}^{(\alpha_1, 0)}(f)))\|_{p_1, p_2}. \end{aligned}$$

Применяя леммы 4 и 7, получим

$$J_2 \leq c_5(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2)\frac{1}{n_1^{\alpha_1}}\omega_{\alpha_1, \alpha_2}\left(S_{n_1, \infty}^{(\alpha_1, 0)}(f); 1, \frac{1}{n_2}\right)_{p_1, p_2}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c_6(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2) \frac{1}{n_1^{\alpha_1}} \sup_{|h_2| \leq 1/n_2} \|S_{n_1, \infty}^{(\alpha_1, 0)}(\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f))\|_{p_1, p_2} \\
&\leq c_7(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2) \sup_{|h_2| \leq 1/n_2} \|S_{n_1, \infty}(\Delta_{\pi/n_1}^{\alpha_1}(\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f)))\|_{p_1, p_2} \\
&\leq c_8(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2) \sup_{|h_2| \leq 1/n_2} \|\Delta_{\pi/n_1}^{\alpha_1}(\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f))\|_{p_1, p_2} \\
&\leq c_9(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2) \omega_{\alpha_1, \alpha_2}\left(f; \frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}\right)_{p_1, p_2}.
\end{aligned}$$

Аналогично показывается, что

$$J_3 \leq c_{10}(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2) \omega_{\alpha_1, \alpha_2}\left(f; \frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}\right)_{p_1, p_2}.$$

Объединяя оценки для J_1 , J_2 , J_3 и J_4 , будем иметь

$$J \leq c_{11}(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2) \omega_{\alpha_1, \alpha_2}\left(f; \frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}\right)_{p_1, p_2}.$$

Теорема 1 доказана.

5. Докажем лемму 8, имеющую вспомогательное значение. Из нее, как следствие, вытекает теорема 3, имеющая самостоятельное значение.

ЛЕММА 8. Пусть $T_{2^{m_1}, \infty}(x, y) \in L_{p_1, p_2}([0, 2\pi]^2)$ ($m_1 = M_1, \dots, M_2$) и являются тригонометрическими полиномами порядка 2^{m_1} по переменной x ; $T_{\infty, 2^{n_2}}(x, y) \in L_{p_1, p_2}([0, 2\pi]^2)$, $n_2 = N_1, \dots, N_2$, и являются тригонометрическими полиномами порядка 2^{n_2} по переменной y ; $1 < p_1 < q_1 < \infty$, $1 < p_2 < q_2 < \infty$; $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$; $M_1, M_2, N_1, N_2 = 0, 1, \dots$. Тогда

$$\left\| \sum_{m_1=M_1}^{M_2} T_{2^{m_1}, \infty} \right\|_{q_1, q_2} \leq c_1(p_1, q_1, q_2) \left(\sum_{m_1=M_1}^{M_2} 2^{m_1 q_1 (1/p_1 - 1/q_1)} \|T_{2^{m_1}, \infty}\|_{p_1, q_2}^{q_1} \right)^{1/q_1}, \quad (6)$$

$$\left\| \sum_{n_2=N_1}^{N_2} T_{\infty, 2^{n_2}} \right\|_{q_1, q_2} \leq c_2(q_1, p_2, q_2) \left(\sum_{n_2=N_1}^{N_2} 2^{n_2 q_2 (1/p_2 - 1/q_2)} \|T_{\infty, 2^{n_2}}\|_{q_1, p_2}^{q_2} \right)^{1/q_2}. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем неравенство (7). Обозначим $[q_2] + 1 = m$. Тогда

$$\begin{aligned}
J_1 &= \left\| \sum_{n_2=N_1}^{N_2} T_{\infty, 2^{n_2}} \right\|_{q_1, q_2}^{q_2} = \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\int_0^{2\pi} \left| \sum_{n_2=N_1}^{N_2} T_{\infty, 2^{n_2}}(x, y) \right|^{q_1} dx \right)^{1/q_1} \right\}^{q_2} dy \\
&\leq \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{n_2=N_1}^{N_2} \left(\int_0^{2\pi} |T_{\infty, 2^{n_2}}(x, y)|^{q_1} dx \right)^{1/q_1} \right\}^{q_2} dy.
\end{aligned}$$

Обозначим $\left(\int_0^{2\pi} |T_{\infty, 2^{n_2}}(x, y)|^{q_1} dx \right)^{1/q_1} = A_{n_2}$. Тогда

$$J_1 \leq \int_0^{2\pi} \left[\left(\sum_{n_2=N_1}^{N_2} A_{n_2} \right)^{q_2/m} \right]^m dy.$$

Применяя лемму 2, находим, что

$$J_1 \leq \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n_2=N_1}^{N_2} A_{n_2}^{q_2/m} \right]^m dy = \sum_{\mu_1=N_1}^{N_2} \cdots \sum_{\mu_m=N_1}^{N_2} \int_0^{2\pi} \prod_{i=1}^m A_{\mu_i}^{q_2/m} dy.$$

Оценим теперь

$$D = \int_0^{2\pi} \prod_{i=1}^m A_{\mu_i}^{q_2/m} dy = \int_0^{2\pi} \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=i+1}^m (A_{\mu_i} A_{\mu_j})^{q_2/(m(m-1))} dy$$

(здесь и далее принята условная форма записи: $\prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=i+1}^m \alpha_i \beta_j = \prod_{i=1}^{m-1} \gamma_i$, $\gamma_i = (\alpha_i \beta_{i+1})(\alpha_i \beta_{i+2}) \cdots (\alpha_i \beta_m)$).

Применяя сначала неравенство Гёльдера с показателем $\tau = m(m-1)/2$, а затем неравенство Гёльдера с показателями $\alpha = (q_2 + p_2)/p_2$, $\alpha_1 = (q_2 + p_2)/q_2$, имеем

$$\begin{aligned} D &\leq \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=i+1}^m \left[\int_0^{2\pi} (A_{\mu_i} A_{\mu_j})^{q_2/2} dy \right]^{1/\tau} \\ &\leq \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=i+1}^m \left[\int_0^{2\pi} A_{\mu_i}^{\alpha q_2/2} dy \right]^{1/(\alpha\tau)} \left[\int_0^{2\pi} A_{\mu_j}^{\alpha_1 q_2/2} dy \right]^{1/(\alpha_1\tau)} = \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=i+1}^m \beta_i \hat{\beta}_j. \end{aligned}$$

Рассмотрим

$$\beta_i = \left[\int_0^{2\pi} (A_{\mu_i})^{\alpha q_2/2} dy \right]^{1/(\alpha\tau)} = \{ \|T_{\infty, 2^{\mu_i}}\|_{q_1, \alpha q_2/2} \}^{q_2/(2\tau)}.$$

Применяя лемму 5 (неравенство Никольского), имеем

$$\beta_i \leq c_1 \{ \|T_{\infty, 2^{\mu_i}}\|_{q_1, p_2} \}^{q_2/(2\tau)} 2^{\mu_i(1/p_2 - 2/(\alpha q_2))(q_2/(2\tau))},$$

где константа c_1 не зависит от μ_i . Аналогично оценивается $\hat{\beta}_j$:

$$\hat{\beta}_j \leq c_2 \{ \|T_{\infty, 2^{\mu_j}}\|_{q_1, p_2} \}^{q_2/(2\tau)} 2^{\mu_j(1/p_2 - 2/(\alpha_1 q_2)) * (q_2/(2\tau))}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} D &\leq c_3 \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=i+1}^m \{ \|T_{\infty, 2^{\mu_i}}\|_{q_1, p_2} \}^{q_2/(2\tau)} 2^{\mu_i(1/p_2 - 1/q_2)} \}^{q_2/(2\tau)} \\ &\quad \times \{ \|T_{\infty, 2^{\mu_j}}\|_{q_1, p_2} \}^{q_2/(2\tau)} 2^{\mu_j(1/p_2 - 1/q_2)} \}^{q_2/(2\tau)} 2^{(\mu_i - \mu_j)(1/2 - 1/\alpha)(1/\tau)}. \end{aligned}$$

Поскольку можно провести аналогичные рассуждения, меняя роли β_i и $\hat{\beta}_j$, приходим к неравенству

$$D \leq c_4 \prod_{i=1}^m \left\{ \|T_{\infty, 2^{\mu_i}}\|_{q_1, p_2} \}^{q_2/(2\tau)} 2^{\mu_i(1/p_2 - 1/q_2)} \prod_{j=1}^m 2^{-|\mu_i - \mu_j|(1/2 - 1/\alpha)(1/((m-1)q_2))} \right\}^{q_2/m},$$

где константа c_4 не зависит от μ_i и μ_j . Но тогда

$$J_1 \leq c_4 \sum_{\mu_1=N_1}^{N_2} \cdots \sum_{\mu_m=N_1}^{N_2} \prod_{i=1}^m \left\{ \left[\|T_{\infty, 2^{\mu_i}}\|_{q_1, p_2} 2^{\mu_i(1/p_2 - 1/q_2)} \right]^{q_2} \times \prod_{j=1}^m 2^{-|\mu_i - \mu_j|(1/2 - 1/\alpha)(1/(m-1))} \right\}^{1/m}.$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателем m , имеем

$$\begin{aligned} J_1 &\leq c_4 \prod_{i=1}^m \left\{ \sum_{\mu_1=N_1}^{N_2} \cdots \sum_{\mu_m=N_1}^{N_2} \|T_{\infty, 2^{\mu_i}}\|_{q_1, p_2}^{q_2} 2^{\mu_i q_2(1/p_2 - 1/q_2)} \right. \\ &\quad \left. \times \prod_{j=1}^m 2^{-|\mu_i - \mu_j|(1/2 - 1/\alpha)(m/(2\tau))} \right\}^{1/m} \\ &= c_4 \prod_{i=1}^m M_i^{1/m}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} M_i &= \sum_{\mu_i=N_1}^{N_2} \|T_{\infty, 2^{\mu_i}}\|_{q_1, p_2}^{q_2} 2^{\mu_i q_2(1/p_2 - 1/q_2)} \\ &\quad \times \left\{ \sum_{\mu_1=N_1}^{N_2} \cdots \sum_{\mu_{i-1}=N_1}^{N_2} \sum_{\mu_{i+1}=N_1}^{N_2} \cdots \sum_{\mu_m=N_1}^{N_2} \prod_{j=1}^m 2^{-|\mu_i - \mu_j|(1/2 - 1/\alpha)(1/(m-1))} \right\}^{1/m} \\ &= \sum_{\mu_i=N_1}^{N_2} \|T_{\infty, 2^{\mu_i}}\|_{q_1, p_2}^{q_2} 2^{\mu_i q_2(1/p_2 - 1/q_2)} \left\{ \sum_{\mu=N_1}^{N_2} 2^{-|\mu_i - \mu|(1/2 - 1/\alpha)(1/(m-1))} \right\}^{m-1} \\ &\leq \sum_{\mu_i=N_1}^{N_2} \|T_{\infty, 2^{\mu_i}}\|_{q_1, p_2}^{q_2} 2^{\mu_i q_2(1/p_2 - 1/q_2)} \left\{ \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} 2^{-|\lambda|(1/2 - 1/\alpha)(1/(m-1))} \right\}^{m-1} \\ &\leq c_5 \sum_{\mu_i=N_1}^{N_2} \|T_{\infty, 2^{\mu_i}}\|_{q_1, p_2}^{q_2} 2^{\mu_i q_2(1/p_2 - 1/q_2)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$J_1 \leq c_6 \sum_{\mu=N_1}^{N_2} \|T_{\infty, 2^{\mu}}\|_{q_1, p_2}^{q_2} 2^{\mu(1/p_2 - 1/q_2)q_2},$$

где константа c_6 не зависит от N_1, N_2 . Таким образом, доказана справедливость неравенства (7).

Докажем неравенство (6). Обозначим $[q_1] + 1 = m$, $\sum_{\nu=M_1}^{M_2} |T_{2^\nu, \infty}| = A_{M_1}$. Тогда

$$\begin{aligned} J_1 &= \left\| \sum_{\nu=M_1}^{M_2} T_{2^\nu, \infty} \right\|_{q_1, q_2}^{q_2} \leq \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=M_1}^{M_2} |T_{2^\nu, \infty}| \right)^{q_1} dx \right)^{q_2/q_1} dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} A_{M_1}^{q_1} dx \right)^{q_2/q_1} dy = \int_0^{2\pi} (B_{M_1})^{q_2/q_1} dy. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь

$$B_{M_1} = \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\sum_{\nu=N_1+1}^{N_2} |T_{2^\nu, \infty}| \right)^{q_1/m} \right\}^m dx.$$

Применяя лемму 2, имеем

$$\begin{aligned} B_{M_1} &\leq \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{\nu=M_1}^{M_2} |T_{2^\nu, \infty}|^{q_1/m} \right\}^m dx = \int_0^{2\pi} \sum_{\nu_1=M_1}^{M_2} \cdots \sum_{\nu_m=M_1}^{M_2} \prod_{k=1}^m |T_{2^{\nu_k}, \infty}|^{q_1/m} dx \\ &= \sum_{\nu_1=M_1}^{M_2} \cdots \sum_{\nu_m=M_1}^{M_2} \int_0^{2\pi} \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m |T_{2^{\nu_k}, \infty} T_{2^{\nu_l}, \infty}|^{q_1/(m(m-1))} dx. \end{aligned}$$

Применяя сначала неравенство Гёльдера с показателем $\tau = m(m-1)/2$, а затем неравенство Гёльдера с показателями $\alpha = (q_1 + p_1)/p_1$ и $\alpha_1 = (q_1 + p_1)/q_1$, находим, что

$$\begin{aligned} B_{M_1} &\leq \sum_{\nu_1=M_1}^{M_2} \cdots \sum_{\nu_m=M_1}^{M_2} \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m \left(\int_0^{2\pi} |T_{2^{\nu_k}, \infty} T_{2^{\nu_l}, \infty}|^{q_1/2} dx \right)^{1/\tau} \\ &\leq \sum_{\nu_1=M_1}^{M_2} \cdots \sum_{\nu_m=M_1}^{M_2} \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m \left(\int_0^{2\pi} |T_{2^{\nu_k}, \infty}|^{(q_1\alpha)/2} dx \right)^{1/(\alpha\tau)} \\ &\quad \times \left(\int_0^{2\pi} |T_{2^{\nu_l}, \infty}|^{(q_1\alpha_1)/2} dx \right)^{1/(\alpha_1\tau)} \\ &= \sum_{\nu_1=M_1}^{M_2} \cdots \sum_{\nu_m=M_1}^{M_2} \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m a_k \hat{a}_l = \sum_{\nu_1=M_1}^{M_2} \cdots \sum_{\nu_m=M_1}^{M_2} \prod_{k=1}^m a_k^{m-k} \hat{a}_k^{k-1} \\ &= \prod_{k=1}^m \sum_{\nu_k=M_1}^{M_2} a_k^{m-k} \hat{a}_k^{k-1}. \end{aligned}$$

Но тогда

$$J_1 \leq \int_0^{2\pi} \left(\prod_{k=1}^m \sum_{\nu_k=M_1}^{M_2} a_k^{m-k} \hat{a}_k^{k-1} \right)^{q_2/q_1} dy.$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателем m , имеем

$$J_1 \leq \prod_{k=1}^m \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\sum_{\nu_k=M_1}^{M_2} a_k^{m-k} \hat{a}_k^{k-1} \right]^{q_2 m/q_1} dy \right\}^{1/m}.$$

Применяя теперь неравенство Минковского, находим, что

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \prod_{k=1}^m \left\{ \sum_{\nu_k=M_1}^{M_2} \left[\int_0^{2\pi} (a_k^{m-k} \hat{a}_k^{k-1})^{q_2 m/q_1} dy \right]^{q_1/(q_2 m)} \right\}^{q_2/q_1} \\ &= \left\{ \sum_{\nu_1=M_1}^{M_2} \cdots \sum_{\nu_m=M_1}^{M_2} \prod_{k=1}^m \left[\int_0^{2\pi} (a_k^{m-k} \hat{a}_k^{k-1})^{(q_2 m)/q_1} dy \right]^{q_1/(q_2 m)} \right\}^{q_2/q_1} \\ &= \left\{ \sum_{\nu_1=M_1}^{M_2} \cdots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} A_{\nu_1 \dots \nu_m} \right\}^{q_2/q_1}. \end{aligned}$$

Теперь, применяя неравенство Гёльдера с показателем $(m-1)/(m-k)$, получаем, что

$$\begin{aligned} A_{\nu_1 \dots \nu_m} &\leq \prod_{k=1}^m \left(\int_0^{2\pi} a_k^{(q_2 m(m-1))/q_1} dy \right)^{(q_1(m-k))/(q_2 m(m-1))} \\ &\quad \times \left(\int_0^{2\pi} \hat{a}_k^{(q_2 m(m-1))/q_1} dy \right)^{(q_1(k-1))/(q_2 m(m-1))} \\ &= \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m \left[\left(\int_0^{2\pi} a_k^{(q_2 m(m-1))/q_1} dy \right) \left(\int_0^{2\pi} \hat{a}_l^{(q_2 m(m-1))/q_1} dy \right) \right]^{q_1/(q_2 m(m-1))} \\ &= \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m \gamma_k \hat{\gamma}_l. \end{aligned}$$

Оценим теперь γ_k и $\hat{\gamma}_l$. Применяя лемму 5 (неравенство Никольского), имеем

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \left[\int_0^{2\pi} \left(\left(\int_0^{2\pi} |T_{2^{\nu_k}, \infty}|^{(q_1 \alpha)/2} dx \right)^{2q_2/(\alpha q_1)} dy \right)^{q_1/(2q_2 \tau)} \\ &= \|T_{2^{\nu_k}, \infty}\|_{(\alpha q_1)/2, q_2}^{q_1/(2\tau)} \leq c_7 \{ \|T_{2^{\nu}, \infty}\|_{p_1, q_2} 2^{\nu_k(1/p_1 - 2/(\alpha q_1))} \}^{q_1/(2\tau)}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\hat{\gamma}_l \leq c_8 \{ \|T_{2^{\nu_l}, \infty}\|_{p_1, q_2} 2^{\nu_l(1/p_1 - 2/(\alpha q_1))} \}^{q_1/(2\tau)},$$

где константы c_7 и c_8 не зависят от ν_l , ν_k . Но тогда

$$\begin{aligned} A_{\nu_1 \dots \nu_m} &\leq c_9 \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m \left[\|T_{2^{\nu_k}, \infty}\|_{p_1, q_2} 2^{\nu_k(1/p_1 - 1/q_1)} \|T_{2^{\nu_l}, \infty}\|_{p_1, q_2} 2^{\nu_l(1/p_1 - 1/q_1)} \right]^{q_1/(2\tau)} \\ &\quad \times 2^{(\nu_k - \nu_l)(1/2 - 1/\alpha)/\tau}. \end{aligned}$$

Поскольку можно провести аналогичные рассуждения, меняя роли γ_k и $\hat{\gamma}_l$, то приходим к неравенству

$$A_{\nu_1 \dots \nu_m} \leq c_9 \prod_{k=1}^m \left\{ \left[\|T_{2^{\nu_k}, \infty}\|_{p_1, q_2} 2^{\nu_k(1/p_1 - 1/q_1)} \right]^{q_1/m} \prod_{l=1}^m 2^{-|\nu_k - \nu_l|(1/2 - 1/\alpha)/(2\tau)} \right\},$$

где константа c_9 не зависит от ν_l , ν_k . Теперь получаем, что

$$\begin{aligned} J_1^{q_1/q_2} &\leq c_9 \sum_{\nu_1=M_1}^{M_2} \dots \sum_{\nu_m=M_1}^{M_2} \prod_{k=1}^m \left\{ \left[\|T_{2^{\nu_k}, \infty}\|_{p_1, q_2} 2^{\nu_k(1/p_1 - 1/q_1)} \right]^{q_1/m} \right. \\ &\quad \left. \times \prod_{l=1}^m 2^{-|\nu_k - \nu_l|(1/2 - 1/\alpha)/(2\tau)} \right\}. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателем m , имеем

$$\begin{aligned} J_1^{q_1/q_2} &\leq c_9 \prod_{k=1}^m \left\{ \sum_{\nu_1=M_1}^{M_2} \dots \sum_{\nu_m=M_1}^{M_2} \|T_{2^{\nu_k}, \infty}\|_{p_1, q_1}^{q_1} 2^{\nu_k q_1(1/p_1 - 1/q_1)} \right. \\ &\quad \left. \times \prod_{l=1}^m 2^{-|\nu_k - \nu_l|(1/2 - 1/\alpha)(m/(2\tau))} \right\}^{1/m} \\ &= c_9 \prod_{k=1}^m M_k^{1/m}. \end{aligned}$$

Оценим M_k :

$$\begin{aligned}
 M_k &= \sum_{\nu_k=M_1}^{M_2} \|T_{2^{\nu_k}, \infty}\|_{p_1, q_2}^{q_1} 2^{\nu_k q_1 (1/p_1 - 1/q_1)} \\
 &\quad \times \sum_{\nu_1=M_1}^{M_2} \cdots \sum_{\nu_{k-1}=M_1}^{M_2} \sum_{\nu_{k+1}=M_1}^{M_2} \cdots \sum_{\nu_m=M_1}^{M_2} \prod_{l=1}^m 2^{-|\nu_k - \nu_l| (1/2 - 1/\alpha)/(m-1)} \\
 &= \sum_{\nu_k=M_1}^{M_2} \|T_{2^{\nu_k}, \infty}\|_{p_1, q_2}^{q_1} 2^{\nu_k q_1 (1/p_1 - 1/q_1)} \left\{ \sum_{\nu=M_1}^{M_2} 2^{-|\nu_k - \nu| (1/2 - 1/\alpha)/(m-1)} \right\}^{m-1} \\
 &\leq \sum_{\nu_k=M_1}^{M_2} \|T_{2^{\nu_k}, \infty}\|_{p_1, q_2}^{q_1} 2^{\nu_k q_1 (1/p_1 - 1/q_1)} \left[\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} 2^{-|\lambda| (1/2 - 1/\alpha)/(m-1)} \right]^{m-1} \\
 &\leq c_{10} \sum_{\nu_k=M_1}^{M_2} \|T_{2^{\nu_k}, \infty}\|_{p_1, q_2}^{q_1} 2^{\nu_k q_1 (1/p_1 - 1/q_1)}.
 \end{aligned}$$

Итак, получаем, что

$$J_1 \leq c_{11} \left[\sum_{\nu=M_1}^{M_2} \|T_{2^\nu, \infty}\|_{p_1, q_2}^{q_1} 2^{\nu q_1 (1/p_1 - 1/q_1)} \right]^{q_2/q_1},$$

где константа c_{11} не зависит от M_1, M_2 .

Лемма 8 доказана.

Отметим, что лемма 8 доказана методом Харди–Литтлвуда–Пэли; ранее этот метод применялся для $n = 1$ в работе [13], для $n > 1$ – в работе [14].

Из леммы вытекает следующая

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f \in L_{p_1, p_2}^0([0, 2\pi]^2)$, $1 < p_1 < q_1 < \infty$, $1 < p_2 < q_2 < \infty$, $n_1 = 0, 1, \dots, n_2 = 0, 1, \dots$. Тогда

$$\begin{aligned}
 &\|f - (S_{2^{n_1}, \infty}(f) + S_{\infty, 2^{n_2}}(f) - S_{2^{n_1}, 2^{n_2}}(f))\|_{q_1, q_2} \\
 &\leq c_1(p_1, p_2, q_1, q_2) \\
 &\quad \times \left(\sum_{\nu_2=n_2}^{\infty} \left(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} 2^{\nu_2(1/p_2 - 1/q_2)q_1} 2^{\nu_1(1/p_1 - 1/q_1)q_1} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \|f - (S_{2^{\nu_1}, \infty}(f) + S_{\infty, 2^{\nu_2}}(f) - S_{2^{\nu_1}, 2^{\nu_2}}(f))\|_{p_1, p_2}^{q_1} \right)^{q_2/q_1} \right)^{1/q_2},
 \end{aligned} \tag{8}$$

и

$$\begin{aligned}
 &\|f - S_{2^{n_1}, \infty}(f)\|_{q_1, q_2} \leq c_2(p_1, p_2, q_1, q_2) \\
 &\quad \times \left(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} 2^{\nu_1(1/p_1 - 1/q_1)q_1} \|f - S_{2^{\nu_1}, \infty}(f)\|_{p_1, q_2}^{q_1} \right)^{1/q_1}, \\
 &\|f - S_{\infty, 2^{n_2}}(f)\|_{q_1, q_2} \leq c_3(p_1, p_2, q_1, q_2) \\
 &\quad \times \left(\sum_{\nu_2=n_2}^{\infty} 2^{\nu_2(1/p_2 - 1/q_2)q_2} \|f - S_{\infty, 2^{\nu_2}}(f)\|_{q_1, p_2}^{q_2} \right)^{1/q_2}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Заметим, что неравенство (8) ранее было доказано в работе [14].

6. Докажем теорему 2. Обозначим $I = \omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f; \delta_1, \delta_2)_{q_1, q_2}$. Для данных $\delta_i \in (0, 1]$, $i = 1, 2$, существуют целые неотрицательные числа n_1, n_2 такие, что

$$\frac{1}{2^{n_i+1}} < \delta_i \leq \frac{1}{2^{n_i}}, \quad i = 1, 2.$$

Поэтому $I \leq \omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f; 2^{-n_1}, 2^{-n_2})_{q_1, q_2}$. Применяя теорему 1, получим

$$\begin{aligned} I &\leq c_1(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2) \\ &\quad \times (2^{-n_1 \alpha_1} 2^{-n_2 \alpha_2} \|S_{2^{n_1}, 2^{n_2}}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(f)\|_{q_1, q_2} + 2^{-n_1 \alpha_1} \|S_{2^{n_1}, \infty}^{(\alpha_1, 0)}(f - S_{\infty, 2^{n_2}}(f))\|_{q_1, q_2} \\ &\quad + 2^{-n_2 \alpha_2} \|S_{\infty, 2^{n_2}}^{(0, \alpha_2)}(f - S_{2^{n_1}, \infty}(f))\|_{q_1, q_2} \\ &\quad + \|f - (S_{2^{n_1}, \infty}(f) + S_{\infty, 2^{n_2}}(f) - S_{2^{n_1}, 2^{n_2}}(f))\|_{q_1, q_2}) \\ &= c_1(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2)(I_1 + I_2 + I_3 + I_4). \end{aligned}$$

Применяя теоремы 3 и 1, имеем

$$\begin{aligned} I_4 &\leq c_2(p_1, p_2, q_1, q_2, \alpha_1, \alpha_2) \\ &\quad \times \left(\sum_{\nu_2=n_2}^{\infty} \left(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} 2^{\nu_2(1/p_2-1/q_2)q_1} 2^{\nu_1(1/p_1-1/q_1)q_1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \omega_{\alpha_1+1/p_1-1/q_1, \alpha_2+1/p_2-1/q_2}^{q_1}(f; 2^{-\nu_1}, 2^{-\nu_2})_{p_1, p_2}^{q_1} \right)^{q_2/q_1} \right)^{1/q_2}. \end{aligned}$$

Применяя лемму 6 и теорему 1, имеем

$$\begin{aligned} I_1 &\leq c_3(p_1, p_2, q_1, q_2, \alpha_1, \alpha_2) 2^{n_2(1/p_2-1/q_2)} 2^{n_1(1/p_1-1/q_1)} \\ &\quad \times \omega_{\alpha_1+1/p_1-1/q_1, \alpha_2+1/p_2-1/q_2}(f; 2^{-n_1}, 2^{-n_2})_{p_1, p_2}. \end{aligned}$$

Применяя лемму 6, получим

$$I_2 \leq c_4(p_1, p_2, q_1, q_2, \alpha_1, \alpha_2) 2^{-n_1 \alpha_1} \|S_{2^{n_1}, \infty}^{(\alpha_1+1/p_1-1/q_1, 0)}(f - S_{\infty, 2^{n_2}}(f))\|_{p_1, q_2}.$$

Применяя теорему 3 (неравенство (9)), получим

$$\begin{aligned} I_2 &\leq c_4(p_1, p_2, q_1, q_2) 2^{-n_1 \alpha_1} \|S_{2^{n_1}, \infty}^{(\alpha_1+1/p_1-1/q_1, 0)}(f) - S_{\infty, 2^{n_2}}(S_{2^{n_1}, \infty}^{(\alpha_1+1/p_1-1/q_1, 0)}(f))\|_{p_1, q_2} \\ &\leq c_5(p_1, p_2, q_1, q_2) 2^{-n_1 \alpha_1} \\ &\quad \times \left(\sum_{\nu_2=n_2}^{\infty} 2^{\nu_2(1/p_2-1/q_2)q_2} \right. \\ &\quad \left. \times \|S_{2^{n_1}, \infty}^{(\alpha_1+1/p_1-1/q_1, 0)}(f) - S_{\infty, 2^{\nu_2}}(S_{2^{n_1}, \infty}^{(\alpha_1+1/p_1-1/q_1, 0)}(f))\|_{p_1, p_2}^{q_2} \right)^{1/q_2}. \end{aligned}$$

Применяя теорему 1, имеем

$$\begin{aligned} I_2 &\leq c_6(p_1, p_2, q_1, q_2, \alpha_1, \alpha_2) 2^{n_1(1/p_1-1/q_1)} \\ &\quad \times \left(\sum_{\nu_2=n_2}^{\infty} 2^{\nu_2(1/p_2-1/q_2)q_2} \omega_{\alpha_1+1/p_1-1/q_1, \alpha_2+1/p_2-1/q_2}^{q_2}(f; 2^{-n_1}, 2^{-\nu_2})_{p_1, p_2} \right)^{1/q_2}. \end{aligned}$$

Аналогично получаем, что

$$I_3 \leq c_7(p_1, p_2, q_1, q_2, \alpha_1, \alpha_2) 2^{n_2(1/p_2-1/q_2)} \\ \times \left(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} 2^{\nu_1(1/p_1-1/q_1)q_1} \omega_{\alpha_1+1/p_1-1/q_1, \alpha_2+1/p_2-1/q_2}^{q_1}(f; 2^{-\nu_1}, 2^{-n_2})_{p_1, p_2} \right)^{1/q_2}.$$

Таким образом, верна оценка

$$I \leq c_8(p_1, p_2, q_1, q_2, \alpha_1, \alpha_2) \\ \times \left(\sum_{\nu_2=n_2}^{\infty} \left(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} 2^{\nu_2(1/p_2-1/q_2)q_1} 2^{\nu_1(1/p_1-1/q_1)q_1} \right. \right. \\ \left. \left. \times \omega_{\alpha_1+1/p_1-1/q_1, \alpha_2+1/p_2-1/q_2}^{q_1}(f; 2^{-\nu_1}, 2^{-\nu_2})_{p_1, p_2}^{q_1} \right)^{q_2/q_1} \right)^{1/q_2}.$$

Используя свойства смешанного модуля гладкости, отсюда получаем, что

$$I \leq c_9(p_1, p_2, q_1, q_2, \alpha_1, \alpha_2) \\ \times \left(\int_0^{\delta_2} \left(\int_0^{\delta_1} (t_1^{-1/p_1+1/q_1} t_2^{-1/p_2+1/q_2} \right. \right. \\ \left. \left. \times \omega_{\alpha_1+1/p_1-1/q_1, \alpha_2+1/p_2-1/q_2}(f; t_1, t_2)_{p_1, p_2} \right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{q_2/q_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{1/q_2}.$$

Теорема 2 доказана.

7. Приведем результат, обобщающий теорему 2.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $f(x, y) \in L_{p_1, p_2}^0([0, 2\pi]^2)$, $1 < p_1 < q_1 < \infty$, $1 < p_2 < q_2 < \infty$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\rho_1 \geq 0$, $\rho_2 \geq 0$, $\delta_1 \in (0, 1]$, $\delta_2 \in (0, 1]$. Тогда

$$\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f^{(\rho_1, \rho_2)}; \delta_1, \delta_2)_{q_1, q_2} \\ \leq c(p_1, p_2, q_1, q_2, \alpha_1, \alpha_2, \rho_1, \rho_2) \\ \times \left(\int_0^{\delta_2} \left(\int_0^{\delta_1} (t_1^{-\rho_1-1/p_1+1/q_1} t_2^{-\rho_2-1/p_2+1/q_2} \right. \right. \\ \left. \left. \times \omega_{\alpha_1+\rho_1+1/p_1-1/q_1, \alpha_2+\rho_2+1/p_2-1/q_2}(f; t_1, t_2)_{p_1, p_2} \right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{q_2/q_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{1/q_2}.$$

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 2.

Заметим, что для функции $f_0(x, y) = \sin x \sin y$

$$c_1 \omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f_0^{(\rho_1, \rho_2)}; \delta_1, \delta_2)_{q_1, q_2} \\ \leq \left(\int_0^{\delta_2} \left(\int_0^{\delta_1} (t_1^{-\rho_1-1/p_1+1/q_1} t_2^{-\rho_2-1/p_2+1/q_2} \right. \right. \\ \left. \left. \times \omega_{\alpha_1+\rho_1+1/p_1-1/q_1, \alpha_2+\rho_2+1/p_2-1/q_2}(f_0; t_1, t_2)_{p_1, p_2} \right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{q_2/q_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{1/q_2} \\ \leq c_2 \omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f_0^{(\rho_1, \rho_2)}; \delta_1, \delta_2)_{q_1, q_2},$$

где c_1 , c_2 не зависят от δ_1 , δ_2 .

Автор выражает благодарность профессору МГУ им. М. В. Ломоносова М. К. Потапову за полезные обсуждения данной работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*. Т. 2, Мир, М., 1965.
- [2] М. К. Potapov, B. V. Simonov, “On the interrelation of the generalized Besov–Nikol’skii and Weyl–Nikol’skii classes of functions”, *Anal. Math.*, **22**:4 (1996), 299–316.
- [3] Б. В. Симонов, *О свойствах преобразованного ряда Фурье*, Деп. в ВИНТИ № 3031-81.
- [4] М. К. Потапов, Б. В. Симонов, С. Ю. Тихонов, “О соотношениях между модулями гладкости в разных метриках”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2009, № 3, 17–25.
- [5] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1975.
- [6] С. М. Никольский, “Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера”, *Сиб. матем. журн.*, **4** (1963), 1342–1364.
- [7] М. К. Потапов, Б. В. Симонов, С. Ю. Тихонов, “Соотношения между смешанными модулями гладкости и теоремы вложения классов Никольского”, *Теория функций и дифференциальные уравнения*, Сборник статей. К 105-летию со дня рождения академика Сергея Михайловича Никольского, Тр. МИАН, **269**, МАИК, М., 2010, 204–214.
- [8] B. Simonov, S. Tikhonov, “Sharp Ul’yanov-type inequalities using fractional smoothness”, *J. Approx. Theory*, **162**:9 (2010), 1654–1684.
- [9] R. Taberski, “Differences, moduli and derivatives of fractional orders”, *Comment. Math.*, **19**:2 (1977), 389–400.
- [10] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1969.
- [11] М. К. Потапов, Б. Лакович, Б. В. Симонов, “О взаимосвязи классов функций Бесова–Никольского и Вейля–Никольского в смешанной метрике”, *Math. Montisnigri*, **12** (2000), 63–85.
- [12] А. П. Унинский, “Неравенства в смешанной норме для тригонометрических полиномов и целых функций конечной степени”, *Теоремы вложения и их применения*, Материалы Всесоюзного симпозиума по теоремам вложения, Баку, 1966.
- [13] М. Ф. Тиман, “О вложении $L_p^{(k)}$ классов функций”, *Изв. вузов. Матем.*, **10** (1974), 61–74.
- [14] М. К. Потапов, “Теоремы вложения в смешанной метрике”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Часть 8*, Сборник работ, Тр. МИАН СССР, **156**, 1980, 143–156.

Б. В. Симонов

Волгоградский государственный технический университет

E-mail: simonov-b2002@yandex.ru

Поступило

03.02.2011