Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Галошкин, О максимальной квадратичной функции для степенно-ограниченных операторов в L^p , *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 6, 950–953

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm913>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 13:53:21

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О МАКСИМАЛЬНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ СТЕПЕННО-ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ В L^p

В. Ф. Гапошкин

Пусть $p > 1$ – любое число. Рассмотрим класс S_p степенно-ограниченных линейных обратимых операторов, отображающих $L^p(X)$ на себя, где X – некоторое измеримое пространство, т. е. для $T \in S_p$ выполнено условие $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|T^n\| < \infty$.

Для $f \in L^p$ и $T \in S_p$ введем средние арифметические последовательности степеней

$$A_n f = n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} T^k f.$$

Если задана некоторая последовательность $1 \leq n_1 < n_2 < \dots$, то максимальной квадратичной функцией, отвечающей этой последовательности, называется выражение

$$\Delta f = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \max_{n_k \leq n < n_{k+1}} |A_n f - A_{n_k} f|^2 \right)^{1/2}.$$

Последовательность $N = (n_k)$ назовем *допустимой* для максимальной квадратичной функции в классе S_p , если для любых $T \in S_p$ и $f \in L^p$ выполняется соотношение $\Delta f \in L^p$. В работе автора [1] была доказана теорема: *последовательность (n_k) допустима для максимальной квадратичной функции в классе S_2 тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} < \infty. \quad (1)$$

Достаточность этого условия была доказана и при любых $p > 1$. Цель данной заметки – доказать его необходимость в классе S_p .

Следующая лемма является переформулировкой известной теоремы Олевского (см. [2, с. 66]).

ЛЕММА 1. *Существуют такая перестановка (g_j) системы Хаара и такая функция $f \in L_\infty$, что ее ряд Фурье по системе (g_j)*

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j g_j(x), \quad a_j = (f, g_j),$$

расходится почти всюду. Кроме того, для любой возрастающей последовательности (q_n) существуют такие последовательности $(m_n), (m'_n)$, что

$$q_n < m'_n; \quad m'_n + m_n < m'_{n+1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке внебюджетного фонда НИОКР МПС РФ.

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x) = \infty \quad \text{п. в.}, \quad (2)$$

где

$$\delta_n(x) = \max_{1 \leq k \leq m_n} \left| \sum_{j=m'_n+1}^{m'_n+k} a_j g_j(x) \right|.$$

При этом блок

$$P_n(x) = \sum_{j=m'_n+1}^{m'_n+m_n} a_j g_j(x)$$

получается перестановкой соответствующего блока по системе Хаара

$$P_n(x) = \sum_{j=m'_n+1}^{m'_n+m_n} b_j \chi_j(x), \quad b_j = (f, \chi_j(x)),$$

и

$$\|P_n\|_{\infty} = \alpha_n, \quad \sum \alpha_n < \infty.$$

ЛЕММА 2. Если

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (l_{k+1} - l_k) = \infty, \quad (3)$$

то существуют перестановка (h_j) системы Хаара и функция $f \in L_{\infty}$ такие, что последовательность частичных сумм $\tilde{S}_{l_k}(f)$ сходится почти всюду, а последовательность $\tilde{S}_n(f)$ расходится почти всюду. Здесь и далее используем обозначения:

$$\tilde{S}_n(f) = \sum_{j=0}^n (f, h_j) h_j, \quad S_n(f) = \sum_{j=0}^n (f, \chi_j) \chi_j.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. За основу возьмем функцию $f \in L^{\infty}$, перестановку (g_j) и блоки $P_n(x)$ из леммы 1. Пользуясь этой леммой и соотношением (3), можно выбрать такие возрастающие последовательности

$$(m'_n); \quad (m_n); \quad (k_n), \quad k_0 = 0,$$

что

$$m'_n > l_{k_{n-1}+1}; \quad l_{k_n} > m'_n + m_n; \quad l_{k_n+1} - l_{k_n} > m_n.$$

Образует перестановку (h_j) следующим образом. На места с номерами от $l_{k_1} + 1$ до $l_{k_1} + m_1$ поставим блок функций $(g_j)_{j=m'_1+1}^{m'_1+m_1}$ из леммы 1, от $l_{k_2} + 1$ до $l_{k_2} + m_2$ — блок $(g_j)_{j=m'_2+1}^{m'_2+m_2}$, и т. д. Оставшиеся функции системы Хаара и переставленные блоки занумеруем подряд в системе $(h_j)_{j=0}^{\infty}$.

Для частичных сумм $\tilde{S}_{l_k}(f)$ ряда Фурье данной функции $f \in L^{\infty}$ по системе (h_j) при $n = 1, 2, \dots$ очевидны соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{l_k}(f) &= S_{l_k}(f), & l_{k_{n-1}+1} &\leq l_k \leq m'_n, \\ \tilde{S}_{l_k}(f) &= S_{l_k+m_n}(f) - P_n, & m'_n &< l_k \leq l_{k_n}. \end{aligned}$$

Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f) = f \quad \text{п. в.}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n\|_{\infty} = 0,$$

то последовательность $\tilde{S}_{l_k}(f)$ сходится почти всюду. Однако, в силу (2)

$$\max_{1 \leq \nu \leq m_n} |\tilde{S}_{l_{k_n}+\nu}(f) - \tilde{S}_{l_{k_n}}(f)| = \delta_n(x) \rightarrow \infty \quad \text{п. в.},$$

т. е. последовательность $\tilde{S}_k(f)$ расходится почти всюду.

ЛЕММА 3. Пусть $p > 1$. Рассмотрим некоторую ОНС (h_j) в $L^2[0, 1]$, $h_j \in L^\infty$, являющаяся безусловным базисом в L^p . Пусть (λ_j) – фиксированная последовательность комплексных чисел на единичной окружности, $|\lambda_j| = 1$. Тогда диагональный оператор $T: L^p \rightarrow L^p$, задаваемый формулой

$$Tf = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j h_j, \quad a_j = (f, h_j),$$

является обратимым степенно-ограниченным оператором. Если положить

$$\lambda_j = e^{-i2^{-j-1}}, \quad R_k f = \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j h_j, \quad t_k = 2^{k+\delta_k}, \quad 0 \leq \delta_k < 1,$$

то для последовательности средних арифметических $A_{t_k} f$ любой функции $f \in L_p \cap L_2$ выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|A_{t_k} f - R_k f\|_2^2 < \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Близкая конструкция использовалась в ряде работ по эргодической теории (см. [3]–[5]). Так как (h_j) – безусловный базис, то из равенства $|\lambda_j^n| = 1$ ($j \geq 0, n \in \mathbb{Z}$) вытекает оценка

$$\|T^n f\| \leq C_p \|f\|_p, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Легко проверяется, что

$$A_{t_k} f = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_j^{t_k} - 1}{t_k(\lambda_j - 1)} a_j h_j = R_k(f) + \sum_{j=0}^{\infty} a_j \mu_j^{(k)} h_j,$$

где $|\mu_j^{(k)}| \leq C 2^{-|j-k|}$. Так как $f \in L^2$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|A_{t_k} f - R_k f\|_2^2 \leq C^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 2^{-2|j-k|} \leq 4C^2 \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 < \infty.$$

ТЕОРЕМА. Последовательность (n_k) допустима для максимальной квадратичной функции в классе S_p , $p > 1$, тогда и только тогда, когда выполнено условие (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность, как уже отмечалось, доказана в работе [1]. Предположим теперь, что последовательность (n_k) допустима, но условие (1) нарушается, т.е.

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} = \infty. \quad (4)$$

Заметим, что из допустимости (n_k) сразу следует такое утверждение: если для некоторой $f \in L^p$ существует почти всюду предел подпоследовательности средних $A_{n_k} f$, то и вся последовательность $A_n f$ сходится почти всюду. Поэтому наша цель будет достигнута, если будут построены такой степенно-ограниченный оператор T и такая функция $f \in L^p$, что подпоследовательность $A_{n_k} f$ сходится п. в., а последовательность $A_{2^n} f$ не сходится п. в. Если обозначить

$$n_k = 2^{m_k + \delta_k}, \quad 0 < \delta_k \leq 1,$$

то из (4) следует, что

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (m_{k+1} - m_k) = \infty.$$

Возьмем перестановку (h_j) системы Хаара и функцию $f \in L^\infty$ из леммы 2 при $l_k = m_k$. Построим степенно-ограниченный оператор T по лемме 3 и применим утверждение этой леммы сначала при $t_k = n_k$, а затем при $t_k = 2^k$. В результате получим соотношения

$$A_{n_k} f - \sum_{j=m_k+1}^{\infty} a_j h_j \rightarrow 0 \text{ п.в.}$$

и

$$A_{2^k} f - \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j h_j \rightarrow 0 \text{ п.в.}$$

С другой стороны, по лемме 2

$$\sum_{j=m_k+1}^{\infty} a_j h_j = f - \tilde{S}_{m_k} f \rightarrow 0 \text{ п.в.,}$$

но предел сумм

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} a_j h_j = f - \tilde{S}_k f$$

не существует п.в. Следовательно, $\lim_{k \rightarrow \infty} A_{n_k} f = 0$ п.в., а $\lim_{k \rightarrow \infty} A_{2^k} f$ (и $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n f$) не существуют почти всюду. Необходимость условия (1) доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гапошкин В. Ф. // Теор. вероятн. и ее применения. 1999. Т. 44. № 2. С. 432–440.
2. Olevs-kii A. M. Fourier Series with respect to General Orthogonal Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1975.
3. Blanc-Lapierre A., Tortra A. // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A. 1968. V. 267. P. 740–743.
4. Гапошкин В. Ф. // Тр. МИРЭА. 1974. Т. 67. С. 95–96.
5. Assani I. // Canad. J. Math. 1986. № 4. P. 937–946.

Московский государственный университет путей сообщения

Поступило
24.03.1999