Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Марченков, Интерполирование и суперпозиции
многоместных непрерывных функций, *Матем. замет-*
ки, 2013, том 93, выпуск 4, 566–574

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9132>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 13:17:22

Интерполирование и суперпозиции многоместных непрерывных функций

С. С. Марченков

Предлагается новый подход к решению задач о непредставимости непрерывных функций многих переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных. В основе подхода лежит идея интерполирования функций по достаточно “редким” узлам интерполяции, но со сравнительно высокой степенью точности. Подход иллюстрируется хорошо известными результатами А. Г. Витушкина о суперпозициях функций, имеющих заданное число переменных и производные заданного порядка.

Библиография: 16 названий.

DOI: 10.4213/mzm9132

Исследования в области представления непрерывных функций многих переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных инициированы 13-й проблемой Гильберта. В середине 1950-х гг. Витушкин [1], [2] доказал, что при наличии у функций определенных свойств гладкости не всякую многоместную функцию можно реализовать суперпозициями функций меньшего числа переменных.

В 1956–57 гг. Колмогоров [3], [4] и Арнольд [5] установили, что всякую непрерывную функцию нескольких переменных можно представить в виде суперпозиции непрерывных функций двух переменных. Более того, как показано в [4], в этом представлении можно ограничиться лишь функциями одной переменной и сложением.

Исследования по проблеме представимости непрерывных функций многих переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных были продолжены Витушкиным [6], [7], Колмогоровым [8], а также Марченковым [9]–[13] и Гашковым [14]. При решении поставленных задач в работах [1], [2], [6]–[14] был использован разнообразный арсенал средств. В их основе лежит подсчет числа различных “приближений”, требуемых для непрерывных функций, которые реализуются суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных.

В настоящей статье мы хотим предложить новый подход к решению обсуждаемых задач о непредставимости непрерывных функций. Этот подход использует

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 09-01-00701, 10-01-00768).

идею интерполирования функций. Именно, мы покажем, что возможность интерполирования непрерывных функций по сравнительно “редким” узлам интерполяции, но с высокой степенью точности, позволяет получать результаты о невозможности представления непрерывных функций из одного класса суперпозициями непрерывных функций из другого класса. Соотношение между числом узлов интерполяции и точностью приближения составляет ядро предлагаемого подхода. Данный подход мы кратко иллюстрируем хорошо известными результатами Витушкина.

Введем необходимые понятия. Для любого множества функций M и любого натурального числа n обозначим через $M^{(n)}$ множество всех функций из M , зависящих от n переменных (множество n -местных функций из M). Рассматриваемые ниже множества M будут содержать все *селекторные функции* e_i^n , где при любом i , $1 \leq i \leq n$, значения функции $e_i^n(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ совпадают со значениями переменной x_i . Это ограничение на множества M не влияет на общность получаемых результатов, однако позволяет упростить некоторые технические моменты доказательств.

При определении понятий формулы над множеством M и суперпозиции мы придерживаемся книги [15].

Пусть M – произвольное множество функций. По индукции определим понятие формулы над M . Если f есть обозначение функции из $M^{(n)}$, а $x_1, \dots, x_n$ – различные символы переменных, то выражение $f(x_1, \dots, x_n)$ называем *формулой над M* . Пусть g есть обозначение функции из $M^{(m)}$, а $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ – либо формулы над M , либо символы переменных (не обязательно различные). Тогда выражение $g(\Phi_1, \dots, \Phi_m)$ есть формула над M .

Параллельно определению понятия формулы над M введем понятие *функции, реализуемой формулой над M* . Если f – обозначение функции из $M^{(n)}$, то формула $f(x_1, \dots, x_n)$ реализует функцию из M , обозначением которой служит символ f . Пусть далее g есть обозначение функции из $M^{(m)}$, а $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ – либо формулы над M , либо символы переменных. Будем предполагать, что формулам Φ_i , отличным от символов переменных, уже сопоставлены функции $\varphi_i(x_1^i, \dots, x_{n_i}^i)$, реализуемые этими формулами. Если выражение Φ_i является символом переменной x^i , то сопоставим ему тождественную функцию $\varphi_i(x^i) = x^i$. Тогда формула $g(\Phi_1, \dots, \Phi_m)$ реализует функцию $g(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ (по понятным техническим причинам мы не выписываем переменные, от которых зависят функции $\varphi_1, \dots, \varphi_m$).

Формулы над M называют также *суперпозициями над M* . Однако гораздо чаще под суперпозициями над M подразумевают сами функции, реализуемые данными суперпозициями. В конкретных случаях для заданной суперпозиции над M , реализуемой формулой Φ над M , указывают все те функции $f_1, \dots, f_s$, из которых построена формула Φ , и говорят о суперпозиции $\Phi(f_1, \dots, f_s)$ функций $f_1, \dots, f_s$.

Отметим одно преимущество множеств функций M , содержащих селекторные функции. Именно, вместо произвольных суперпозиций над M можно рассматривать так называемые “регулярные” суперпозиции, когда при каждой подстановке функций в функцию набор переменных у подставляемых функций одинаков. В качестве примера рассмотрим формулу $f(x_{i_1}, \dots, x_{i_l})$, где $\{i_1, \dots, i_l\} \subseteq \{1, \dots, n\}$. С использованием селекторных функций реализуемую ею функцию можно задать формулой, содержащей все переменные $x_1, \dots, x_n$:

$$f(e_{i_1}^n(x_1, \dots, x_n), \dots, e_{i_l}^n(x_1, \dots, x_n)).$$

Пусть I – отрезок действительных чисел $[0, 1]$. Для любого натурального числа k обозначим через I_k множество $\{i2^{-k} : i = 0, 1, \dots, 2^k\}$. Для любого натурального числа n определим на множестве I^n метрику ρ' : если $(x_1, \dots, x_n), (x'_1, \dots, x'_n) \in I^n$, то положим

$$\rho'((x_1, \dots, x_n), (x'_1, \dots, x'_n)) = \max(|x_1 - x'_1|, \dots, |x_n - x'_n|).$$

Через $\mathcal{M}$ обозначим множество всех функций от произвольного числа переменных, отображающих декартовы степени множества I в множество I , а через $\mathcal{C}$ – подмножество всех непрерывных (в метрике ρ) функций из $\mathcal{M}$. Будем говорить, что функция f из множества $\mathcal{M}^{(n)}$ удовлетворяет условию Липшица с показателем 1, если существует такая положительная константа L_f , что для любых двух точек $(x_1, \dots, x_n), (x'_1, \dots, x'_n)$ из I^n выполняется неравенство

$$|f(x_1, \dots, x_n) - f(x'_1, \dots, x'_n)| \leq L_f \cdot \rho'((x_1, \dots, x_n), (x'_1, \dots, x'_n)).$$

Пусть $f_1, f_2 \in \mathcal{M}^{(n)}$, ε – положительное действительное число. Говорим, что функция f_1 приближает функцию f_2 с погрешностью ε (а функция f_2 – функцию f_1 с погрешностью ε), если для любой точки $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$ имеет место неравенство

$$|f_1(x_1, \dots, x_n) - f_2(x_1, \dots, x_n)| \leq \varepsilon. \quad (1)$$

Этот термин мы применяем и в том случае, когда одна из функций f_1, f_2 есть дискретная функция, определенная на множестве I_k^n . При этом имеется в виду, что наборы в неравенстве (1) рассматриваются только в множестве I_k^n .

При любом натуральном n определим метрику ρ на множестве всех дискретных функций типа $I_k^n \rightarrow I$ и на множестве $\mathcal{C}^{(n)}$:

$$\rho(f_1, f_2) = \max |f_1(x_1, \dots, x_n) - f_2(x_1, \dots, x_n)|.$$

В первом случае максимум берется по всем наборам $(x_1, \dots, x_n)$ из множества I_k^n , во втором – по всем точкам из множества I^n .

Предполагаем, что задан оператор интерполирования $\mathcal{J}$, который для любого натурального числа k и любой дискретной функции g типа $I_k^n \rightarrow I$ дает функцию $\mathcal{J}(g)$ из множества $\mathcal{M}$ (не обязательно непрерывную), которая совпадает с функцией g в точках множества I_k^n . Будем далее предполагать, что оператор $\mathcal{J}$ удовлетворяет условию Липшица с показателем 1: существует такая положительная константа $L_{\mathcal{J}}$, что для любого натурального числа k и любых двух дискретных функций g_1, g_2 типа $I_k^n \rightarrow I$ выполняется неравенство

$$\rho(\mathcal{J}(g_1), \mathcal{J}(g_2)) \leq L_{\mathcal{J}} \cdot \rho(g_1, g_2).$$

Пусть q – действительное число, $q \geq 1$. Пусть далее $\mathcal{D}_q$ есть множество функций из $\mathcal{C}$, которое содержит все селекторные функции и удовлетворяет следующим двум условиям:

- 1) все функции множества $\mathcal{D}_q$ удовлетворяют условию Липшица с показателем 1;
- 2) для любой функции f из $\mathcal{D}_q^{(n)}$ найдется такая положительная константа C_f , что для любого натурального числа k и дискретной функции g типа $I_k^n \rightarrow I$, являющейся ограничением функции f на множество I_k^n , функция $\mathcal{J}(g)$ приближает функцию f с погрешностью $C_f \cdot 2^{-kq}$.

Пусть $\mathcal{E}_q$ есть множество функций из $\mathcal{C}$, которое удовлетворяет следующему условию:

- 3) для любого n в кубе I^n имеется последовательность $\{J_k\}$ попарно не пересекающихся конечных множеств, где множество J_k состоит из 2^{n2^k} точек; при этом для любой последовательности $\{g_k\}$ дискретных функций типа $J_k \rightarrow \{0, 2^{-(2^k+2k)q}\}$ в множество $\mathcal{E}_q^{(n)}$ входит функция f , которая при любом k совпадает с функцией g_k на множестве J_k .

ЛЕММА 1. Для любой функции f из множества $\mathcal{D}_q^{(n)}$ найдется такая положительная константа C'_f , что для любого натурального числа k и любой дискретной функции g типа $I_k^n \rightarrow I$, приближающей функцию f с погрешностью 2^{-kq} , функция $\mathcal{J}(g)$ приближает функцию f с погрешностью $C'_f \cdot 2^{-kq}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через g_1 ограничение функции f на множество I_k^n . Согласно условию 2) функция $\mathcal{J}(g_1)$ приближает функцию f с погрешностью $C_f \cdot 2^{-kq}$. С другой стороны, оператор $\mathcal{J}$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L_{\mathcal{J}}$. Поэтому функции $\mathcal{J}(g)$ и $\mathcal{J}(g_1)$ отличаются друг от друга (в метрике ρ) не более, чем на $L_{\mathcal{J}} \cdot 2^{-kq}$. Из этих двух фактов и неравенства треугольника выводим, что

$$\rho(f, \mathcal{J}(g)) \leq \rho(f, \mathcal{J}(g_1)) + \rho(\mathcal{J}(g_1), \mathcal{J}(g)) \leq C_f \cdot 2^{-kq} + L_{\mathcal{J}} \cdot 2^{-kq} = C'_f \cdot 2^{-kq},$$

где $C'_f = C_f + L_{\mathcal{J}}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть p – действительное число, $p \geq 1$, и функция $f \in \mathcal{C}^{(n)}$ получена суперпозицией $\Phi(f_1, \dots, f_s)$ функций $f_1, \dots, f_s$ из множества $\mathcal{D}_p^{(m)}$. Тогда существует такая положительная константа C (зависящая как от функций $f_1, \dots, f_s$, так и от самой суперпозиции Φ), что для любого натурального числа k и любых дискретных функций $g_1, \dots, g_s$ типа $I_k^m \rightarrow I$, приближающих функции $f_1, \dots, f_s$ с погрешностью 2^{-kp} , функция $\Phi(\mathcal{J}(g_1), \dots, \mathcal{J}(g_s))$ приближает функцию f с погрешностью $C2^{-kp}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 1 для всякого i , $1 \leq i \leq s$, найдется такая положительная константа C'_{f_i} , что функция $\mathcal{J}(g_i)$ приближает функцию f_i с погрешностью $C'_{f_i} \cdot 2^{-kp}$. Далее последовательно рассматриваем подформулы формул $\Phi(f_1, \dots, f_s)$ и $\Phi(\mathcal{J}(g_1), \dots, \mathcal{J}(g_s))$ и доказываем, что функции, реализуемые подформулами второй формулы, приближают функции, реализуемые соответствующими подформулами первой формулы с погрешностью вида $C'2^{-kp}$. При этом пользуемся тем, что класс $\mathcal{D}_p$ удовлетворяет условию 1).

Рассмотрим произвольную подформулу $f_i(\Phi_1, \dots, \Phi_m)$ формулы $\Phi(f_1, \dots, f_s)$. В силу сделанных выше замечаний можно считать, что формулы $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ (которые могут быть и символами переменных) реализуют функции $h_1, \dots, h_m$ от одних и тех же переменных $x_1, \dots, x_n$. Чтобы провести индукцию по построению формулы Φ , будем предполагать, что уже найдены такие положительные константы $C_1, \dots, C_m$, что функции $h'_1, \dots, h'_m$, реализуемые подформулами формулы $\Phi(\mathcal{J}(g_1), \dots, \mathcal{J}(g_m))$, которые соответствуют формулам $\Phi_1, \dots, \Phi_m$, приближают функции $h_1, \dots, h_m$ с погрешностями $C_1 2^{-kp}, \dots, C_m 2^{-kp}$. Положим $C_{\max} = \max(C_1, \dots, C_m)$.

Пусть функция f_i удовлетворяет условию Липшица с константой L_i . Тогда получаем

$$\begin{aligned} & \rho(f_i(h_1, \dots, h_m), \mathcal{J}(g_i)(h'_1, \dots, h'_m)) \\ & \leq \rho(f_i(h_1, \dots, h_m), f_i(h'_1, \dots, h'_m)) + \rho(f_i(h'_1, \dots, h'_m), \mathcal{J}(g_i)(h'_1, \dots, h'_m)) \\ & \leq L_i C_{\max} \cdot 2^{-kp} + C'_{f_i} \cdot 2^{-kp}. \end{aligned}$$

Соображения индукции завершают доказательство леммы.

ТЕОРЕМА. Пусть p, q – действительные числа, $p, q \geq 1$, m, n – натуральные числа и $m/p < n/q$. Тогда в множестве $\mathcal{E}_q^{(n)}$ найдется функция, которую невозможно представить в виде суперпозиции функций из множества $\mathcal{D}_p^{(m)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в соответствии со свойством 3) для некоторой последовательности $\{g_k\}$ дискретных функций типа $J_k \rightarrow \{0, 2^{-(2^k+2k)q}\}$ в множестве $\mathcal{E}_q^{(n)}$ выбрана функция f . Заметим, что задать функцию g_k на множестве J_k можно

$$2^{2^{n2^k}} \quad (2)$$

способами. Понятно, что различным заданиям функции g_k отвечают различные (уже на множестве J_k) функции f .

Предположим, что функция f реализуется суперпозицией $\Phi(f_1, \dots, f_s)$ функций $f_1, \dots, f_s$ множества $\mathcal{D}_p^{(m)}$. Тогда по лемме 2 найдется такая положительная константа C , что для любого натурального числа l и любых дискретных функций $g'_1, \dots, g'_s$ типа $I_l^m \rightarrow I$, приближающих функции $f_1, \dots, f_s$ с погрешностью 2^{-lp} , функция $f' = \Phi(\mathcal{J}(g'_1), \dots, \mathcal{J}(g'_s))$ будет приближать функцию f с погрешностью $C2^{-lp}$. Выберем число l так, чтобы выполнялось неравенство

$$C2^{-lp} < 2^{-(2^k+2k)q-1}. \quad (3)$$

Тогда по значениям функции f' в точках множества J_k можно однозначно определить значения функции g_k на множестве J_k .

Заметим, что функции $g'_1, \dots, g'_s$ всегда можно выбрать некоторым стандартным образом. Именно, вместо произвольных значений из I достаточно ограничиться значениями из множества $\{i2^{-lp} : i = 0, 1, \dots, [2^{lp}]\}$. Тогда число возможных функций f' (безотносительно к выбранным функциям $f_1, \dots, f_s$) будет равно

$$([2^{lp}] + 1)^{s(2^l+1)^m}. \quad (4)$$

Иными словами, число различных (в смысле погрешности) $2^{-(2^k+2k)q-1}$ функций f , которые можно определить только за счет выбора значений функции g_k , должно не превосходить величины (4). Однако при выполнении неравенства $m/p < n/q$ при достаточно больших значениях k и при значении l , равном величине

$$\left\lceil \frac{\log_2 C + (2^k q + 2kq + 1)}{p} \right\rceil$$

(см. неравенство (3)), величина (2) будет строго больше величины (4). Следовательно, число функций f , которые приближаются с погрешностью $2^{-2^k q - 2kq - 1}$ суперпозициями вида $\Phi(\mathcal{J}(g'_1), \dots, \mathcal{J}(g'_s))$, строго меньше, чем число дискретных функций g_k указанного выше типа. Противоречие завершает доказательство теоремы.

Коротко опишем, как из доказанной теоремы получить следующий известный результат Витушкина [1], [2].

Для любых натуральных m, n, p, q , если $m/p < n/q$, то существует q раз дифференцируемая функция n переменных, которую невозможно получить в виде суперпозиции p раз дифференцируемых функций m переменных.

Пусть p – натуральное число, $p \geq 2$, $\mathcal{D}_p$ – множество всех функций из $\mathcal{C}$, которые имеют все частные производные до порядка p включительно, причем все частные производные порядка p ограничены. Очевидно, что множество $\mathcal{D}_p$ содержит все селекторные функции, а функции из $\mathcal{D}_p$ удовлетворяют условию Липшица с показателем 1.

Для любых натуральных чисел k, m пусть

$$S_{k,p}^m = \{(i_1 2^{-k}, \dots, i_m 2^{-k}) : i_1 + \dots + i_m < p\},$$

где $i_1, \dots, i_m$ – целые неотрицательные числа, и

$$T_{k,p}^m = \left\{ (x_1, \dots, x_m) : x_1, \dots, x_m \in I, \sum_{1 \leq i \leq m} x_i \leq (p-1)2^{-k} \right\}.$$

В работе [16] для любой функции $f(x_1, \dots, x_m)$ из множества $\mathcal{D}_p$ (и любого натурального числа k) определен интерполяционный полином $L_{f,p}(x_1, \dots, x_m)$, который совпадает с функцией f в узлах интерполяции $S_{k,p}^m$. В [16] получена следующая оценка погрешности приближения функции f полиномом $L_{f,p}$ в симплексе $T_{k,p}^m$:

$$\begin{aligned} & \rho(f(x_1, \dots, x_m), L_{f,p}(x_1, \dots, x_m)) \\ & \leq C_{f,p} \sum_{i_1 + \dots + i_m = p} \left| \prod_{j_1=0}^{i_1-1} (x_1 - j_1 2^{-k}) \cdots \prod_{j_m=0}^{i_m-1} (x_m - j_m 2^{-k}) \right|, \end{aligned} \quad (5)$$

где $C_{f,p}$ – подходящая положительная константа, не зависящая от k , и произведение $\prod_{j_i=0}^{i_i-1}$ при $i_i = 0$ равно 1. Очевидно, что при $(x_1, \dots, x_m) \in T_{k,p}^m$ каждая координата x_i может изменяться в пределах от 0 до $(p-1)2^{-k}$. Поэтому из (5) вытекает, что для подходящей положительной константы $D_{f,p}$ в симплексе $T_{k,p}^m$ будет справедлива оценка

$$\rho(f(x_1, \dots, x_m), L_{f,p}(x_1, \dots, x_m)) \leq D_{f,p} \cdot 2^{-kp}. \quad (6)$$

Априори полином $L_{f,p}$ может принимать в симплексе $T_{k,p}^m$ значения за пределами отрезка I . Чтобы оставаться в множестве функций $\mathcal{M}$, полином $L_{f,p}$ в необходимых случаях следует “подправить”: сделать равным 0, если значение полинома отрицательно, и равным 1, если значение превосходит 1. В результате образуется функция $L'_{f,p}$, которая, вообще говоря, полиномом не является. Тем не менее, ввиду принадлежности функции f множеству $\mathcal{M}$ и выполнения неравенства (6) для полинома $L_{f,p}$ функция $L'_{f,p}$ будет приближать функцию f в симплексе $T_{k,p}^m$ с погрешностью $D_{f,p} 2^{-kp}$.

Далее, покрываем куб I^m конечным числом симплексов вида $T_{k,p}^m$. Пусть это будут симплексы $T_1, \dots, T_r$. В каждом симплексе T_i задаем функцию L'_i , аналогичную функции $L_{f,p}$, которая будет приближать функцию f в симплексе T_i с той же

самой погрешностью $D_{f,p}2^{-kp}$. Возможность этого следует из того, что константа $C_{f,p}$ в неравенстве (5) зависит только от границ изменения p -х производных функции f в кубе I^m и от “размерности” p множества $S_{k,p}^m$ (см. [16]), а константа $D_{f,p}$ – от вида формулы из правой части неравенства (5) и пределов изменения переменных $x_1, \dots, x_m$ в симплексе T_i .

Остается теперь из функций $L'_1, \dots, L'_r$ получить единую функцию, приближающую функцию f на кубе I^m с погрешностью $D_{f,p}2^{-kp}$. Для этого необходимо в симплексах $T_1, \dots, T_r$ выбрать попарно не пересекающиеся подмножества $U_1, \dots, U_r$, которые образуют покрытие куба I^m , и определить интерполяционную функцию равной функции L'_i на множестве U_i . Эта функция будет, вообще говоря, разрывной, однако она совпадает с функцией f на множестве I_k^m и приближает функцию f на всем кубе I^m с погрешностью $D_{f,p}2^{-kp}$.

Покажем, что так определенный оператор интерполирования $\mathcal{I}$ удовлетворяет условию Липшица с показателем 1. Для этого нам потребуется более детально описать вид интерполяционного полинома $L_{f,p}(x_1, \dots, x_m)$ из работы [16]. Именно, для множества (узлов интерполяции) $S_{k,p}^m$ и симплекса $T_{k,p}^m$ полином $L_{f,p}(x_1, \dots, x_m)$ имеет вид

$$\sum_{i_1 + \dots + i_m \leq p} \Delta_{f,k}^{i_1 \dots i_m} \cdot Q_{i_1 \dots i_m}(x_1, \dots, x_m),$$

где $\Delta_{f,k}^{i_1 \dots i_m}$ – коэффициенты, представляющие собой линейные комбинации значений функции f в точках множества $S_{k,p}^m$, когда j -е координаты точек принимают значения $0, 2^{-k}, \dots, i_j 2^{-k}$, а $Q_{i_1 \dots i_m}$ – так называемые *фундаментальные полиномы*. Они задаются равенствами

$$Q_{i_1 \dots i_m}(x_1, \dots, x_m) = \frac{2^{k(i_1 + \dots + i_m)}}{i_1! \dots i_m!} \prod_{j_1=0}^{i_1-1} (x_1 - j_1 2^{-k}) \dots \prod_{j_m=0}^{i_m-1} (x_m - j_m 2^{-k}). \quad (7)$$

Из структуры формулы (7) видно, что значения полинома $Q_{i_1 \dots i_m}$ в симплексе $T_{k,p}^m$ ограничены по модулю константой, не зависящей от k (с учетом “размера” симплекса $T_{k,p}^m$ при $i_s \neq 0$ произведение из (7), соответствующее индексу i_s , не превосходит по модулю величины $(p-1)!2^{-ki_s}$). Поэтому если функции f, f' в точках множества I_k^m отличаются не более чем на ε , то в любой точке симплекса $T_{k,p}^m$ полиномы $L_{f,p}, L_{f',p}$ будут отличаться не более чем на $C_{m,p}\varepsilon$, где константа $C_{m,p}$ зависит лишь от параметров m, p . Такое же утверждение будет справедливо для каждого из симплексов $T_1, \dots, T_r$, поскольку вид полиномов $Q_{i_1 \dots i_m}, L_{f,p}$ не зависит от симплекса (полиномы $L_{f,p}$ отличаются лишь коэффициентами $\Delta_{f,k}^{i_1 \dots i_m}$). Также можно считать независящей от симплексов $T_1, \dots, T_r$ константу $C_{m,p}$. Отсюда следует, что оператор $\mathcal{I}$ удовлетворяет условию Липшица с показателем 1.

Обратимся теперь к построению функции f из множества $\mathcal{E}_q^{(n)}$. Для любого $k \geq 1$ рассмотрим куб

$$I_k^n = \{2^{-k} \leq x_j \leq 2^{1-k}, 1 \leq j \leq n\}.$$

Куб I_k^n имеет ребро длины 2^{-k} , последовательность кубов $I_1^n, I_2^n, \dots$ сходится к точке $(0, \dots, 0)$ куба I^n и соседние кубы I_k^n, I_{k+1}^n имеют единственную общую точку $(2^{-k}, \dots, 2^{-k})$.

Каждый куб I_k^n разобьем на 2^{n2^k} равных кубов K_k с ребром длины $2^{-(2^k+k)}$. Множество J_k будет являться множеством центров всех кубов K_k , принадлежащих кубу I_k^n . Функция f будет определена с помощью вспомогательной функции φ . Если функция g_k в центре куба K_k принимает значение $2^{-(2^k+2k)q}$, то функция φ в кубе K_k имеет вид “шапочки” с единственным максимальным значением $2^{-(2^k+2k)q}$, достигаемым в центре данного куба. На границе куба K_k функция φ равна нулю. Если же значением функции g_k в центре куба K_k является 0, то функция f на всем кубе K_k равна нулю. Вне кубов I_k^n функция f также равна нулю.

В свою очередь “шапочки” в кубах K_k строятся на основе функции ψ , которую зададим в кубе I^n следующим образом:

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 2^{4^n - (x_1(1-x_1) \cdots x_n(1-x_n))^{-1}}, & \text{если } 0 < x_i < 1, 1 \leq i \leq n, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Функция ψ бесконечно дифференцируема внутри куба I^n , причем значения самой функции ψ и всех ее частных производных на границе куба I^n доопределяем по непрерывности значением 0. Далее, функция ψ неотрицательна и принимает в точке $(1/2, \dots, 1/2)$ единственное максимальное значение, равное 1.

Чтобы получить “шапочку” в кубе K_k , следует пронормировать функцию ψ : ввести множитель 2^{2^k+k} для переменных, множитель $2^{-(2^k+2k)q}$ для значений функции, а также выполнить перенос центра куба I^n в центр куба K_k .

То, что полученная функция f будет q раз непрерывно дифференцируема в кубе I^n , доказано в работах [9], [13].

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Г. Витушкин, “К тринадцатой проблеме Гильберта”, *ДАН СССР*, **95**:4 (1954), 701–704.
- [2] А. Г. Витушкин, *О многомерных вариациях*, Гостехиздат, М., 1955.
- [3] А. Н. Колмогоров, “О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных”, *ДАН СССР*, **108**:2 (1956), 179–182.
- [4] А. Н. Колмогоров, “О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения”, *ДАН СССР*, **114**:5 (1957), 953–956.
- [5] В. И. Арнольд, “О функциях трех переменных”, *ДАН СССР*, **114**:4 (1957), 679–681.
- [6] А. Г. Витушкин, Г. М. Хенкин, “Линейные суперпозиции функций”, *УМН*, **22**:1(133) (1967), 77–124.
- [7] A. G. Vitushkin, “On representation of functions by means of superpositions and related topics”, *Enseignement Math.* (2), **23**:3-4 (1977), 255–320.
- [8] А. Н. Колмогоров, “Оценки минимального числа элементов ε -сетей в различных функциональных классах и их применение к вопросу о представимости функций нескольких переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных”, *УМН*, **10**:1(63) (1955), 192–194.
- [9] С. С. Марченков, “Об одном методе анализа суперпозиций непрерывных функций”, *Проблемы кибернетики*, **37**, Наука, М., 1980, 5–17.
- [10] С. С. Марченков, “О суперпозициях непрерывных функций, заданных на бэровском пространстве”, *Матем. заметки*, **66**:5 (1999), 696–705.

- [11] С. С. Марченков, “О невозможности получения $(n + 1)$ -местных непрерывных функций из n -местных с помощью некоторых непрерывных операторов”, *Матем. сб.*, **192**:6 (2001), 71–88.
- [12] С. С. Марченков, С. И. Кривоспицкий, “Суперпозиции непрерывных функций, заданных на бэровском пространстве”, *Пробл. передачи информ.*, **45**:4 (2009), 107–114.
- [13] С. С. Марченков, *Представление функций суперпозициями*, КомКнига, М., 2010.
- [14] С. Б. Гашков, “О сложности приближенной реализации функциональных компактов в некоторых пространствах и о существовании функций с заданной по порядку сложностью”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **2**:3 (1996), 675–774.
- [15] С. В. Яблонский, *Введение в дискретную математику*, Высшая школа, М., 2003.
- [16] T. Sauer, Y. Xu, “A case study in multivariate Lagrange interpolation”, *Approximation Theory, Wavelets and Applications*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., **454**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995, 443–452.

С. С. Марченков

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: ssmarchen@cs.msu.su

Поступило

09.11.2010

Исправленный вариант

25.05.2012