Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Алдашев, Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для вырождающихся многомерных эллиптических уравнений, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 6, 936–939

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9134>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 10:46:13

Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для вырождающихся многомерных эллиптических уравнений

С. А. Алдашев

Корректные постановки краевых задач на плоскости для эллиптических уравнений методом теории аналитических функций комплексного переменного проведены в [1]. При изучении аналогичных вопросов, когда число независимых переменных больше двух, возникают трудности принципиального характера. Весьма привлекательный и удобный метод сингулярных интегральных уравнений теряет свою силу из-за отсутствия сколько-нибудь полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений [2]. В данной работе, используя метод [3], показана однозначная разрешимость классического решения задачи Дирихле в цилиндрической области для вырождающихся многомерных эллиптических уравнений.

Пусть D – цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \dots, x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = 0$, где $|x|$ – длина вектора $x = (x_1, \dots, x_m)$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D области D , обозначим через Γ_α , S_α , S_0 соответственно.

В области D рассмотрим вырождающиеся многомерные эллиптические уравнения

$$Lu \equiv g(t)\Delta_x u + u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(x, t)u_{x_i} + b(x, t)u_t + c(x, t)u = 0, \quad (1)$$

где $g(t) > 0$ при $t > 0$ и может обращаться в нуль при $t = 0$, $g(t) \in C([0, \alpha])$, а Δ_x – оператор Лапласа по переменным $x_1, \dots, x_m$, $m \geq 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, \dots, x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, 3, \dots, m-1$.

Задача 1 (Дирихле). Найти решение уравнения (1) в области D из класса $C(\overline{D}) \cap C^2(D)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{S_0} = \tau(r, \theta), \quad u|_{\Gamma_\alpha} = \psi(t, \theta), \quad u|_{S_\alpha} = \varphi(t, \theta). \quad (2)$$

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка n , $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$, $W_2^l(S_0)$, $l = 0, 1, \dots$, – пространства Соболева. Пусть $a_i(r, \theta, t)$, $b(r, \theta, t)$, $c(r, \theta, t) \in W_2^l(D)$, $i = 1, \dots, m$, $l \geq m+1$, $c(r, \theta, t) \leq 0$ для всех $(r, \theta, t) \in D$.

ТЕОРЕМА. Если $\tau(r, \theta) \in W_2^l(S_0)$, $\psi(t, \theta) \in W_2^l(\Gamma_\alpha)$, $\varphi(r, \theta) \in W_2^l(S_\alpha)$, $l > 3m/2$, то задача 1 однозначно разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Единственность решения задачи 1 следует из принципа Хопфа [4]. Теперь переходим к ее разрешимости. Искомое решение задачи 1 будем искать в виде

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (3)$$

где $\bar{u}_n^k(r, t)$ – функции, подлежащие определению.

Тогда, как в [3], приходим к бесконечной системе дифференциальных уравнений

$$g(t)\rho_0^{1-1}u_{0rr} + \rho_0^{1-1}u_{0tt} + \frac{m-1}{r}g(t)\rho_0^{1-1}u_{0r} = 0, \quad (4)$$

$$g(t)\rho_1^k \bar{u}_{1rr}^k + \rho_1^k \bar{u}_{1tt}^k + \frac{m-1}{r} g(t)\rho_1^k \bar{u}_{1r}^k - \frac{\lambda_1}{r^2} g(t)\rho_1^k \bar{u}_1^k = -\frac{1}{k_1} \left(\sum_{i=1}^m a_{i0}^1 \bar{u}_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1 \bar{u}_0^1 \right), \quad (5)$$

$$n = 1, k = 1, \dots, k_1,$$

$$\begin{aligned} & g(t)\rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k + \rho_n^k \bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r} g(t)\rho_n^k \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} g(t)\rho_n^k \bar{u}_n^k \\ &= -\frac{1}{k_n} \sum_{k=1}^{k_n-1} \left\{ \sum_{i=1}^m a_{in-1}^k \bar{u}_{n-1r}^k \bar{u}_{n-1t}^k + \tilde{b}_{n-1}^k + \left[\tilde{c}_{n-1}^k + \sum_{i=1}^m (\tilde{a}_{in-2}^k - (n-1)a_{in-1}^k) \right] \bar{u}_{n-1}^k \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$k = 1, \dots, k_n, n = 2, 3, \dots$$

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (4)–(6) можно представить в виде

$$g(t) \left(\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_n^k \right) + \bar{u}_{ntt}^k = f_n^k(r, t), \quad (7)$$

$f_n^k(r, t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $f_0^1(r, t) \equiv 0$. Далее, из краевого условия (2) в силу (3) будем иметь

$$\bar{u}_n^k(r, 0) = \tilde{\tau}_n^k(r), \quad \bar{u}_n^k(1, t) = \psi_n^k(t), \quad \bar{u}_n^k(r, \alpha) = \tilde{\varphi}_n^k(r), \quad (8)$$

$$k = 1, \dots, k_n, n = 0, 1, \dots$$

В (7), (8) произведя сначала замену $\bar{v}_n^k(r, t) = \bar{u}_n^k(r, t) - \psi_n^k(t)$, а затем замену $\bar{v}_n^k(r, t) = r^{(1-m)/2} v_n^k(r, t)$, получим следующую задачу:

$$L v_n^k \equiv g(t) \left(v_{nrr}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} v_n^k \right) + v_{ntt}^k = \tilde{f}_n^k(r, t), \quad (9)$$

$$v_n^k(r, 0) = \tilde{\tau}_n^k(r), \quad v_n^k(1, t) = 0, \quad v_n^k(r, \alpha) = \tilde{\varphi}_n^k(r), \quad (10)$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{[(m-1)(3-m) - 4\lambda_n]}{4}, \quad \tilde{f}_n^k(r, t) = r^{(m-1)/2} [f_n^k(r, t) + \frac{\lambda_n}{r^2} g(t) \psi_n^k - \psi_{ntt}^k],$$

$$\tilde{\tau}_n^k(r) = r^{(m-1)/2} [\tilde{\tau}_n^k(r) - \psi_n^k(0)], \quad \tilde{\varphi}_n^k(r) = r^{(m-1)/2} [\tilde{\varphi}_n^k(r) - \psi_n^k(\alpha)].$$

Решение задачи (9), (10) ищем в виде $v_n^k(r, t) = v_{1n}^k(r, t) + v_{2n}^k(r, t)$, где $v_{1n}^k(r, t)$ – решение задачи

$$L v_{1n}^k = \tilde{f}_n^k(r, t), \quad v_{1n}^k(r, 0) = 0, \quad v_{1n}^k(1, t) = 0, \quad v_{1n}^k(r, \alpha) = 0, \quad (11)$$

а $v_{2n}^k(r, t)$ – решение задачи

$$L v_{2n}^k = 0, \quad v_{2n}^k(r, 0) = \tilde{\tau}_n^k(r), \quad v_{2n}^k(1, t) = 0, \quad v_{2n}^k(r, \alpha) = \tilde{\varphi}_n^k(r). \quad (12)$$

Решение выше указанных задач рассмотрим в виде

$$v_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_{ns}^k(r) T_{ns}^k(t), \quad (13)$$

при этом пусть

$$\tilde{f}_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k(t) R_{ns}^k(r), \quad \tilde{\tau}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{ns}^k R_{ns}^k(r), \quad \tilde{\varphi}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{ns}^k R_{ns}^k(r). \quad (14)$$

Подставляя (13) в (11), с учетом (14) получим

$$R_{nsrr}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} R_{ns}^k + \mu R_{ns}^k = 0, \quad 0 < r < 1, \quad R_{ns}^k(1) = 0, \quad |R_{ns}^k(0)| < \infty, \quad (15)$$

$$T_{nstt}^k - \mu g(t) T_{ns}^k(t) = a_{ns}^k(t), \quad 0 < t < \alpha, \quad T_{ns}^k(0) = 0, \quad T_{ns}^k(\alpha) = 0. \quad (16)$$

Ограниченным решением задачи (15) является [5]

$$R_{ns}^k(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad (17)$$

где $\nu = n + (m - 2)/2$, $\mu_{s,n}$ – нули функций Бесселя первого рода $J_\nu(z)$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Задача (16) эквивалентна к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно $T_{ns}(t)$ [2]

$$\alpha T_{ns}^k(t) = \int_0^t (t - \alpha) \xi [\mu_{s,n}^2 g(\xi) T_{ns}^k(\xi) + a_{ns}^k(\xi)] d\xi + \int_t^\alpha t(\xi - \alpha) [\mu_{s,n}^2 T_{ns}^k(\xi) + a_{ns}^k(\xi)] d\xi. \quad (18)$$

Подставляя (17) в (14), получим

$$\begin{aligned} r^{-1/2} \tilde{f}_n^k(r, t) &= \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), & r^{-1/2} \tilde{\varphi}_{1n}^k(r) &= \sum_{s=1}^{\infty} b_{ns}^k J_\nu(\mu_{s,n} r), \\ r^{-1/2} \tilde{\varphi}_{2n}^k(r) &= \sum_{s=1}^{\infty} e_{ns}^k J_\nu(\mu_{s,n} r), \end{aligned} \quad (19)$$

$0 < r < 1$.

Ряды (19) – разложение в ряды Фурье–Бесселя [6], если

$$a_{ns}^k(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{f}_n^k(\xi, t) J_\nu(\mu_{s,n} \xi) d\xi, \quad (20)$$

$$e_{ns}^k(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\tau}_n^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n} \xi) d\xi, \quad (21)$$

$$b_{ns}^k = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\varphi}_n^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n} \xi) d\xi,$$

$\mu_{s,n}$, $s = 1, 2, \dots$, – положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины. Из единственности решения задачи 1 и из равенств (3), (12), (20) следует, что $v_{ns}^k(r, t) \equiv 0$, $a_{ns}^k(t) \equiv 0$ и $T_{ns}^k(t) \equiv 0$, $k = 1, \dots, k_n$, $n = 0, 1, \dots$. Следовательно, однородная задача, соответствующая задаче (16), имеет только тривиальное решение. Поэтому при предположениях непрерывности $g(t)$ и $a_{ns}^k(t)$ в силу второй теоремы Фредгольма [2] задача (16) всегда имеет, и притом единственное, решение. Из (17), (18) получим решение задачи (11) в виде

$$v_{1n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{ns}^k(t) J_\nu(\mu_{s,n} r),$$

где $a_{ns}^k(t)$ определяются из (20). Далее, подставляя (17) в (12) с учетом (14), будем иметь $V_{nstt}^k - \mu_{s,n}^2 g(t) V_{ns}^k = 0$, $0 < t < \alpha$, $V_{ns}^k(0) = e_{ns}^k$, $V_{ns}^k(\alpha) = b_{ns}^k$; произведя замену

$$T_{ns}^k(t) = V_{ns}^k(t) - \frac{t}{\alpha} b_{ns}^k - \frac{(\alpha - t)}{\alpha} e_{ns}^k,$$

приходим к следующей задаче:

$$T_{nstt}^k - \mu_{s,n}^2 g(t) T_{ns}^k = q_{ns}^k(t), \quad T_{ns}^k(0) = 0, \quad T_{ns}^k(\alpha) = 0,$$

$$q_{ns}^k(t) = \mu_{s,n}^2 g(t) \left(\frac{t}{\alpha} b_{ns}^k + \frac{(\alpha - t)}{\alpha} e_{ns}^k \right),$$

которая также эквивалентна интегральному уравнению (18), где вместо $a_{ns}^k(t)$ берется $q_{ns}^k(t)$. Из (17), (18) найдем решение задачи (12)

$$v_{2n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} V_{ns}^k(t) J_{\nu}(\mu_{s,n} r),$$

где e_{ns}^k , b_{ns}^k находятся из (21). Следовательно, сначала решив задачу (4), (8) ($n = 0$), а затем (5), (8) ($n = 1$) и т.д., найдем последовательно все $v_n^k(r, t)$. Итак, имеет место

$$\int_H \rho(\theta) Lu dH = 0.$$

Пусть $f(r, \theta, t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0$, V_0 плотна в $L_2((0, 1))$, $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$ плотна в $L_2(H)$, а $T(t) \in V_1$, V_1 плотна в $L_2((0, \alpha))$. Тогда $f(r, \theta, t) \in V$, $V = V_0 \otimes H \otimes V_1$ плотна в $L_2(D)$ [7]. Отсюда следует, что

$$\int_D f(r, \theta, t) Lu dD = 0, \quad Lu = 0 \quad \text{для всех } (r, \theta, t) \in D.$$

Таким образом, решением задачи 1 является ряд

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \psi_n^k(t) + r^{(1-m)/2} \left[v_{1n}^k(r, t) + v_{2n}^k(r, t) \right] \right\} Y_{n,m}^k(\theta). \quad (22)$$

Учитывая ограничения на коэффициенты уравнения (1) и на заданные функции $\tau(r, \theta)$, $\psi(t, \theta)$, $\varphi(r, \theta)$, как в [3], можно показать, что полученное решение (22) принадлежит классу $C(\overline{D}) \cap C^2(D)$. Следовательно, разрешимость задачи 1 установлена. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. В. Бицадзе, *Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка*, Наука, М., 1966. [2] А. В. Бицадзе, *Некоторые классы уравнений в частных производных*, Наука, М., 1981. [3] С. А. Алдашев, *Изв. вузов. Матем.*, 2006, № 9, 3–9. [4] Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер, *Уравнения с частными производными*, Мир, М., 1966. [5] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, М., 1961. [6] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1974. [7] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1976.

С. А. Алдашев

Казахский национальный педагогический
университет им. Абая, г. Алматы
E-mail: aldash51@mail.ru

Поступило

05.02.2012

Исправленный вариант

15.04.2013