Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. К. Сабитова, Краевая задача с нелокальным интегральным условием для уравнений смешанного типа с вырождением на переходной линии, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 3, 393–406

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9135>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 15:53:32

Краевая задача с нелокальным интегральным условием для уравнений смешанного типа с вырождением на переходной линии

Ю. К. Сабитова

Для уравнения эллипτικο-гиперболического типа решена краевая задача с нелокальным условием Самарского–Ионкина в прямоугольной области. Методом спектрального анализа установлен критерий единственности и доказана теорема существования решения поставленной задачи. Решение задачи построено в виде суммы биортогонального ряда.

Библиография: 10 названий.

DOI: 10.4213/mzm9135

1. Введение. В данной работе рассматривается уравнение смешанного эллипτικο-гиперболического типа

$$Lu = K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (1.1)$$

где $K(y) = \operatorname{sgn} y \cdot |y|^m$, $m > 0$, в прямоугольной области

$$D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\},$$

которое вырождается на линии изменения типа. Для уравнения (1.1) в области D поставим следующую задачу.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА. Найти в области D функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-), \quad (1.2)$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-, \quad (1.3)$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x), \quad u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1.4)$$

$$u(1, y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta, \quad (1.5)$$

$$\int_0^1 u(x, y) dx = A = \text{const}, \quad -\alpha \leq y \leq \beta, \quad (1.6)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-97003).

где $D_- = D \cap \{y < 0\}$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям: $\varphi(1) = \psi(1) = 0$ и

$$\int_0^1 \varphi(x) dx = \int_0^1 \psi(x) dx = A. \quad (1.7)$$

Для разных уравнений, в том числе и смешанного типа, но с постоянными коэффициентами, задачи похожего типа изучались, в частности, в [1]–[3].

Если уравнение (1.1) интегрировать при фиксированном $y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta)$ по переменной x от ε до $1 - \varepsilon$, где ε – достаточно малое число, то получим

$$K(y) \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u_{xx} dx + \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u_{yy} dx = 0.$$

Отсюда при $\varepsilon \rightarrow 0$ будем иметь

$$K(y)[u_x(1, y) - u_x(0, y)] + \frac{d^2}{dy^2} \int_0^1 u(x, y) dx = 0.$$

Последнее равенство в силу условия (1.6) переходит в другое нелокальное условие

$$u_x(0, y) = u_x(1, y), \quad -\alpha \leq y \leq \beta, \quad (1.8)$$

выражающее равенство потоков через боковые стороны $x = 0$ и $x = 1$ прямоугольника D .

В дальнейшем вместо задачи (1.2)–(1.6) мы будем изучать задачу (1.2)–(1.5) и (1.8). В этой работе, опираясь на идеи работ [2]–[5], установлен критерий единственности решения задачи (1.2)–(1.5) и (1.8). При обосновании существования решения задачи возникает проблема малых знаменателей относительно параметра α . При определенных условиях на число α и функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ само решение определяется в виде суммы биортогонального ряда. Доказана сходимость построенного ряда в классе (1.2).

2. Единственность решения. Частные решения уравнения (1.1), удовлетворяющие условиям (1.2), (1.5), (1.8), будем искать методом разделения переменных в виде $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Подставляя данное произведение в уравнение (1.1), получаем соотношения

$$X''(x) + \mu X(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (2.1)$$

$$X(1) = 0, \quad X'(0) = X'(1), \quad (2.2)$$

$$Y''(y) - \mu \operatorname{sgn} y \cdot |y|^m Y(y) = 0, \quad y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta), \quad (2.3)$$

где μ – постоянная. Задача (2.1), (2.2) несамосопряженная; сопряженная к ней имеет вид

$$Y''(x) + \mu Y(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad Y'(0) = 0, \quad Y(0) = Y(1).$$

Собственными значениями первой задачи являются числа $\mu_n = \lambda_n^2$, $\lambda_n = 2\pi n$, $n = 1, 2, \dots$, которым отвечают собственные и присоединенные функции

$$\begin{aligned} X_0(x) &= 2(1-x), \\ X_{2n-1}(x) &= 4 \sin 2\pi n x, \quad X_{2n}(x) = 4(1-x) \cos 2\pi n x, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

При $n \geq 1$ собственные значения двукратны, функции $X_{2n-1}(x)$ собственные, а $X_{2n}(x)$ присоединенные. Система собственных и присоединенных функций сопряженной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} Y_0(x) &= 2, \\ Y_{2n}(x) &= 4 \cos 2\pi n x, \quad Y_{2n-1}(x) = 4x \sin 2\pi n x, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

Легко проверить, что системы (2.4) и (2.5) являются взаимно биортогональными, т.е.

$$(X_k(x), Y_l(x)) = \delta_{kl},$$

где δ_{kl} – символ Кронекера. Обе выписанные задачи являются регулярными, а потому системы $\{X_k\}$ и $\{Y_k\}$ полны в пространстве $L_2(0, 1)$ [6]. Так как обе эти системы бесселевы, т.е. для всех $f \in L_2(0, 1)$ выполняются неравенства

$$\Sigma |(f, X_k)|^2 < \infty, \quad \Sigma |(f, Y_k)|^2 < \infty,$$

в силу теоремы Бари эти системы образуют базисы Рисса в $L_2(0, 1)$.

Пусть $u(x, y)$ – решение задачи (1.2)–(1.5), (1.8). Рассмотрим функции

$$w_n(y) = \int_0^1 u(x, y) \cos 2\pi n x \, dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.6)$$

$$w_0(y) = \int_0^1 u(x, y) \, dx, \quad (2.7)$$

$$z_n(y) = \int_0^1 u(x, y) x \sin 2\pi n x \, dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

На основании (2.6) введем функцию

$$w_{\varepsilon, n}(y) = \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(x, y) \cos 2\pi n x \, dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.9)$$

где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. Дифференцируя дважды равенство (2.9) при $y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta)$ и учитывая уравнение (1.1), получим

$$\begin{aligned} w''_{\varepsilon, n}(y) &= \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u_{yy}(x, y) \cos 2\pi n x \, dx = -\operatorname{sgn} y \cdot |y|^m \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u_{xx}(x, y) \cos 2\pi n x \, dx \\ &= -\operatorname{sgn} y \cdot |y|^m \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u_{xx}(x, y) \cos 2\pi n x \, dx. \end{aligned} \quad (2.10)$$

В (2.10) интегрируя по частям два раза с учетом условий (1.5), (1.8) и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим дифференциальное уравнение

$$w''_n(y) - \operatorname{sgn} y \cdot |y|^m (2\pi n)^2 w_n(y) = 0 \quad (2.11)$$

с граничными условиями

$$w_n(\beta) = \int_0^1 \varphi(x) \cos 2\pi n x \, dx = \varphi_n, \quad w_n(-\alpha) = \int_0^1 \psi(x) \cos 2\pi n x \, dx = \psi_n. \quad (2.12)$$

Общее решение уравнения (2.11) имеет вид

$$w_n(y) = \begin{cases} a_n \sqrt{y} I_{1/(2q)}(p_n y^q) + b_n \sqrt{y} K_{1/(2q)}(p_n y^q), & y > 0, \\ c_n \sqrt{-y} J_{1/(2q)}(p_n (-y)^q) + d_n \sqrt{-y} Y_{1/(2q)}(p_n (-y)^q), & y < 0, \end{cases} \quad (2.13)$$

где $J_{1/(2q)}(p_n (-y)^q)$ и $Y_{1/(2q)}(p_n (-y)^q)$ – функции Бесселя первого и второго рода соответственно, $I_{1/(2q)}(p_n y^q)$ и $K_{1/(2q)}(p_n y^q)$ – модифицированные функции Бесселя, a_n, b_n, c_n и d_n – произвольные постоянные, $q = (m+2)/2$, $p_n = (2\pi n)/q$.

В силу (1.2) подберем постоянные a_n, b_n, c_n и d_n так, чтобы выполнялись равенства

$$w_n(0+) = w_n(0-), \quad w'_n(0+) = w'_n(0-). \quad (2.14)$$

Первое из равенств (2.14) выполнено при $d_n = -\pi b_n/2$ и любых a_n и c_n , а второе равенство выполнено при $c_n = \pi \operatorname{ctg}[\pi/(4q)] b_n/2 - a_n$ и $d_n = -\pi b_n/2$.

Подставим полученные выражения для постоянных c_n и d_n в (2.13); тогда функции $w_n(y)$ примут вид

$$w_n(y) = \begin{cases} a_n \sqrt{y} I_{1/(2q)}(p_n y^q) + b_n \sqrt{y} K_{1/(2q)}(p_n y^q), & y > 0, \\ -a_n \sqrt{-y} J_{1/(2q)}(p_n (-y)^q) + b_n \sqrt{-y} \bar{Y}_{1/(2q)}(p_n (-y)^q), & y < 0, \end{cases} \quad (2.15)$$

где

$$\bar{Y}_{1/(2q)}(p_n y^q) = \frac{\pi}{2 \sin[\pi/(2q)]} (J_{1/(2q)}(p_n y^q) + J_{-1/(2q)}(p_n y^q)).$$

Отметим, что для функций (2.15) выполнено равенство

$$w''_n(0+) = w''_n(0-) = 0.$$

Теперь на основании (2.12) и (2.15) получим систему для нахождения a_n и b_n :

$$\begin{cases} a_n I_{1/(2q)}(p_n \beta^q) + b_n K_{1/(2q)}(p_n \beta^q) = \varphi_n \beta^{-1/2}, \\ -a_n J_{1/(2q)}(p_n \alpha^q) + b_n \bar{Y}_{1/(2q)}(p_n \alpha^q) = \psi_n \alpha^{-1/2}, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.16)$$

Если определитель системы (2.16)

$$\Delta_n(\alpha, \beta) = J_{1/(2q)}(p_n \alpha^q) K_{1/(2q)}(p_n \beta^q) + I_{1/(2q)}(p_n \beta^q) \bar{Y}_{1/(2q)}(p_n \alpha^q) \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.17)$$

то данная система имеет единственное решение

$$a_n = \frac{\varphi_n \sqrt{\alpha} \bar{Y}_{1/(2q)}(p_n \alpha^q) - \psi_n \sqrt{\beta} K_{1/(2q)}(p_n \beta^q)}{\Delta_n(\alpha, \beta) \sqrt{\alpha\beta}}, \quad (2.18)$$

$$b_n = \frac{\varphi_n \sqrt{\alpha} J_{1/(2q)}(p_n \alpha^q) + \psi_n \sqrt{\beta} I_{1/(2q)}(p_n \beta^q)}{\Delta_n(\alpha, \beta) \sqrt{\alpha\beta}}. \quad (2.19)$$

С учетом (2.18) и (2.19) из (2.15) найдем окончательный вид функций

$$w_n(y) = \begin{cases} \frac{\varphi_n \sqrt{\alpha y} \Delta_n(\alpha, y) + \psi_n \sqrt{\beta y} A_n(y, \beta)}{\Delta_n(\alpha, \beta) \sqrt{\alpha\beta}}, & y > 0, \\ \frac{\varphi_n \sqrt{-\alpha y} B_n(\alpha, -y) + \psi_n \sqrt{-\beta y} \Delta_n(-y, \beta)}{\Delta_n(\alpha, \beta) \sqrt{\alpha\beta}}, & y < 0, \end{cases} \quad (2.20)$$

где

$$\Delta_n(\alpha, y) = J_{1/(2q)}(p_n \alpha^q) K_{1/(2q)}(p_n y^q) + \bar{Y}_{1/(2q)}(p_n \alpha^q) I_{1/(2q)}(p_n y^q), \quad (2.21)$$

$$A_n(y, \beta) = I_{1/(2q)}(p_n \beta^q) K_{1/(2q)}(p_n y^q) - I_{1/(2q)}(p_n y^q) K_{1/(2q)}(p_n \beta^q),$$

$$B_n(\alpha, -y) = \bar{Y}_{1/(2q)}(p_n (-y)^q) J_{1/(2q)}(p_n \alpha^q) - \bar{Y}_{1/(2q)}(p_n \alpha^q) J_{1/(2q)}(p_n (-y)^q), \quad (2.22)$$

$$\Delta_n(-y, \beta) = J_{1/(2q)}(p_n (-y)^q) K_{1/(2q)}(p_n \beta^q) + \bar{Y}_{1/(2q)}(p_n (-y)^q) I_{1/(2q)}(p_n \beta^q).$$

Аналогично $w_n(y)$ получим, что функция $w_0(y)$, определенная формулой (2.7), удовлетворяет условиям

$$w_0''(y) = 0, \quad y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta), \quad (2.23)$$

$$w_0(0+) = w_0(0-), \quad w_0'(0+) = w_0'(0-), \quad (2.24)$$

$$w_0(\beta) = \int_0^1 \varphi(x) dx = \varphi_0, \quad w_0(-\alpha) = \int_0^1 \psi(x) dx = \psi_0. \quad (2.25)$$

Единственное решение задачи (2.23)–(2.25) определяется формулой

$$w_0(y) = \frac{\varphi_0 - \psi_0}{\alpha + \beta} (y + \alpha) + \psi_0. \quad (2.26)$$

Повторяя те же действия над функцией $z_n(y)$, что и для $w_n(y)$, заданной формулой (2.8), получим неоднородное дифференциальное уравнение

$$z_n''(y) - \operatorname{sgn} y \cdot |y|^m (2\pi n)^2 z_n(y) = -4\pi n \operatorname{sgn} y \cdot |y|^m w_n(y), \quad (2.27)$$

где $y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta)$, с соответствующими граничными условиями

$$z_n(\beta) = \int_0^1 \varphi(x) x \sin 2\pi n x dx = \varphi_{1n}, \quad (2.28)$$

$$z_n(-\alpha) = \int_0^1 \psi(x) x \sin 2\pi n x dx = \psi_{1n} \quad (2.29)$$

и условиями сопряжения

$$z_n(0+) = z_n(0-), \quad z_n'(0+) = z_n'(0-). \quad (2.30)$$

На основании метода вариации произвольных постоянных найдем решение задачи (2.27)–(2.30), которое определяется по формуле

$$z_n(y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\alpha y} [\varphi_{1n} - z_n^+(\beta)] \Delta_n(\alpha, y)}{\Delta_n(\alpha, \beta) \sqrt{\alpha \beta}} + \frac{\sqrt{\beta y} [\psi_{1n} - z_n^-(\alpha)] A_n(y, \beta)}{\Delta_n(\alpha, \beta) \sqrt{\alpha \beta}} + z_n^+(y), & y > 0, \\ \frac{\sqrt{-\beta y} [\psi_{1n} - z_n^-(\alpha)] \Delta_n(-y, \beta)}{\Delta_n(\alpha, \beta) \sqrt{\alpha \beta}} \\ + \frac{\sqrt{-\alpha y} [\varphi_{1n} - z_n^+(\beta)] B_n(\alpha, -y)}{\Delta_n(\alpha, \beta) \sqrt{\alpha \beta}} + z_n^-(y), & y < 0, \end{cases} \quad (2.31)$$

где функции $z_n^+(y)$ и $z_n^-(y)$ определены соответственно равенствами

$$\begin{aligned}
 z_n^+(y) = & \frac{2\pi n}{q^2} \sqrt{y} [b_n K_{1/(2q)}(p_n y^q) - a_n I_{1/(2q)}(p_n y^q)] \\
 & \times \left\{ y^{2q} \left[\left(1 + \frac{1}{4(p_n q y^q)^2} \right) I_{1/(2q)}(p_n y^q) K_{1/(2q)}(p_n y^q) \right. \right. \\
 & \quad + \frac{1}{4} (p_n q)^2 y^{2q-2} (I_{1/(2q)-1}(p_n y^q) \\
 & \quad + I_{1/(2q)+1}(p_n y^q)) [K_{1/(2q)+1}(p_n y^q) + K_{1/(2q)-1}(p_n y^q)] \\
 & \quad \left. \left. - (2p_n^2)^{-1} \right] \right\} \\
 & - \frac{\pi^2 n}{q^2 \sin(\pi/(2q))} b_n I_{1/(2q)}(p_n y^q) y^{2q+1/2} \\
 & \times \left[\frac{\pi}{2 \sin(\pi/(2q))} (I_{-1/(2q)}^2(p_n y^q) - I_{-1/(2q)-1}(p_n y^q) I_{-1/(2q)}(p_n y^q)) \right. \\
 & \quad \left. - 2K_{1/(2q)}(p_n y^q) I_{1/(2q)}(p_n y^q) - 2I_{1+1/(2q)}(p_n y^q) K_{1/(2q)-1}(p_n y^q) \right] \\
 & + \frac{2\pi n}{q^2} a_n K_{1/(2q)}(p_n y^q) y^{2q+1/2} \\
 & \times [I_{1/(2q)}^2(p_n y^q) - I_{1/(2q)-1}(p_n y^q) I_{1/(2q)+1}(p_n y^q)], \quad y > 0, \quad (2.32)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z_n^-(y) = & -\frac{\pi^2 n}{2q^2} y^{2q+1/2} [a_n J_{1/(2q)}(p_n y^q) - b_n Y_{1/(2q)}(p_n y^q)] \\
 & \times [2J_{1/(2q)}(p_n y^q) Y_{1/(2q)}(p_n y^q) - J_{1/(2q)+1}(p_n y^q) Y_{1/(2q)-1}(p_n y^q) \\
 & \quad - J_{1/(2q)-1}(p_n y^q) Y_{1/(2q)+1}(p_n y^q)] \\
 & - \frac{\pi^2 n}{q^2} b_n y^{2q+1/2} [Y_{1/(2q)}^2(p_n y^q) - Y_{1/(2q)+1}(p_n y^q) Y_{1/(2q)-1}(p_n y^q)] J_{1/(2q)}(p_n y^q) \\
 & + \frac{\pi^2 n}{q^2} a_n y^{2q+1/2} [J_{1/(2q)}^2(p_n y^q) - J_{1/(2q)+1}(p_n y^q) J_{1/(2q)-1}(p_n y^q)] Y_{1/(2q)}(p_n y^q) \\
 & + \frac{\pi n}{p_n^2 q^3} \left[a_n + 2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2q} b_n \right] J_{1/(2q)}(p_n y^q) \sqrt{y} \\
 & - \frac{\pi n}{p_n^2 q^3} b_n Y_{1/(2q)}(p_n y^q) \sqrt{y}, \quad y < 0. \quad (2.33)
 \end{aligned}$$

Отметим, что более подробные выкладки вывода формулы (2.31) приведены в [7; § 1.1, § 2.1].

При условии (2.17) из формул (2.20), (2.26), (2.31) следует единственность решения задачи (1.2)–(1.5), (1.8), так как если $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$ на $[0, 1]$, то $w_n(y) \equiv 0$, $w_0(y) \equiv 0$, $z_n(y) \equiv 0$ для $n = 0, 1, 2, \dots$ на $[-\alpha, \beta]$. Тогда из (2.6)–(2.8) имеем

$$\begin{aligned}
 4 \int_0^1 u(x, y) (1-x) \cos 2\pi n x \, dx &= 0, & 2 \int_0^1 (1-x) u(x, y) \, dx &= 0, \\
 4 \int_0^1 u(x, y) \sin 2\pi n x \, dx &= 0, & n &= 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Отсюда в силу полноты системы корневых функций (2.4) в пространстве $L_2[0, 1]$ следует, что функция $u(x, y) = 0$ почти всюду на $[0, 1]$ при любом $y \in [-\alpha, \beta]$. В силу (1.2) функция $u(x, y)$ непрерывна на $\overline{D}$, поэтому $u(x, y) \equiv 0$ на $\overline{D}$.

Если при некоторых α, β и $n = l \in \mathbb{N}$ нарушено условие (2.17), т.е. $\Delta_l(\alpha, \beta) = 0$, то однородная задача (1.2)–(1.5), (1.8) (где $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_l(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{y}\Delta_l(\alpha, y)}{J_{1/(2q)}(p_l\alpha^q)} X_l(x), & y > 0, \\ \frac{\sqrt{-y}\Delta_l(-y, \beta)}{I_{1/(2q)}(p_l\beta^q)} X_l(x), & y < 0, \end{cases} \quad (2.34)$$

где

$$X_l(x) = A_1(1-x)\cos 2\pi lx + A_2(1-x) + A_3\sin 2\pi lx$$

и $A_i, i = 1, \dots, 3$ – произвольные постоянные.

Нетрудно показать, что построенная нами функция (2.34) принадлежит классу $C^2(\overline{D})$ и всюду в D является решением уравнения (1.1).

Естественно возникает вопрос о существовании нулей выражения $\Delta_n(\alpha, \beta)$ при фиксированном n относительно α . Выражение для $\Delta_n(\alpha, \beta)$ представим в следующем виде:

$$\Delta_n(\alpha, \beta) = I_{1/(2q)}(p_n\beta^q)\delta_n(\alpha, \beta), \quad (2.35)$$

где

$$\delta_n(\alpha, \beta) = J_{1/(2q)}(p_n\alpha^q) \frac{K_{1/(2q)}(p_n\beta^q)}{I_{1/(2q)}(p_n\beta^q)} + \overline{Y}_{1/(2q)}(p_n\alpha^q). \quad (2.36)$$

Существование нулей $\delta_n(\alpha, \beta)$ относительно α следует из того, что $J_{1/(2q)}(p_k z)$ и $\overline{Y}_{1/(2q)}(p_k z)$, $z = \alpha^q$, являются линейно независимыми решениями уравнения Бесселя

$$y''(z) + \frac{1}{z}y'(z) + \left[p_k^2 - \left(\frac{1}{2qz}\right)^2\right]y(z) = 0. \quad (2.37)$$

Поскольку функции $J_{1/(2q)}(p_k z)$ и $\delta_n(z, \beta)$ являются линейно независимыми решениями уравнения (2.37), из общей теории линейных дифференциальных уравнений [8; с. 135] следует, что нули двух линейно независимых решений уравнения Бесселя строго чередуются, т.е. на интервале между любыми последовательными нулями любого из этих решений содержится ровно один нуль другого решения. Функция $J_{1/(2q)}(p_k z)$ имеет счетное множество положительных нулей. Тогда функция $\delta_n(z, \beta)$ также имеет счетное множество положительных нулей относительно $z = \alpha^q$.

Таким образом, нами доказана следующая

ТЕОРЕМА 1. *Если существует решение задачи (1.2)–(1.5), (1.8), то оно единственно тогда и только тогда, когда $\Delta_n(\alpha, \beta) \neq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$.*

3. Существование решения. Поскольку α и β – любые положительные числа, при достаточно больших n выражение $\Delta_n(\alpha, \beta)$, которое входит в знаменатели формул (2.20), (2.31), может стать достаточно малым из-за существования счетного множества нулей $\delta_n(\alpha, \beta)$ относительно α^q . Следовательно, возникает проблема малых знаменателей как и при изучении задачи Дирихле для уравнения (1.1) [9].

Как известно [10; с. 99], функции $K_\nu(z) = O(z^{-1/2}e^{-z})$ и $I_\nu(z) = O(z^{-1/2}e^z)$ при $z \rightarrow +\infty$, поэтому величина

$$J_{1/(2q)}(p_n\alpha^q) \frac{K_{1/(2q)}(p_n\beta^q)}{I_{1/(2q)}(p_n\beta^q)}$$

есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $\bar{Y}_{1/(2q)}(p_n\alpha^q)$ при больших n . Поэтому достаточно рассмотреть выражение

$$\tilde{\delta}_n(\alpha) = \frac{2 \sin(\pi/(2q))}{\pi} \bar{Y}_{1/(2q)}(2\pi n\alpha_q) = J_{1/(2q)}(2\pi n\alpha_q) + J_{-1/(2q)}(2\pi n\alpha_q), \quad \alpha_q = \frac{\alpha^q}{q},$$

которое также имеет счетное множество положительных нулей относительно α .

Используя асимптотическую формулу функции

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O(z^{-3/2}), \quad z \rightarrow \infty,$$

при $n > n_0$, где n_0 – достаточно большое натуральное число, получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{n}\tilde{\delta}_n(\alpha) &= \frac{1}{\pi\sqrt{\alpha_q}} \left[\cos\left(2\pi n\alpha_q - \frac{\pi}{4q} - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2\pi n\alpha_q + \frac{\pi}{4q} - \frac{\pi}{4}\right) \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \alpha_q^{-1/2} \cos\left(\frac{\pi}{4q}\right) \cos\left(2\pi n\alpha_q - \frac{\pi}{4}\right) = A \cos\left(2\pi n\alpha_q - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что если, например, $\alpha_q = \mu \in \mathbb{N}$, т.е. $\alpha = (\mu q)^{1/q}$, то при $n > n_0$

$$|\sqrt{n}\tilde{\delta}_n(\alpha)| = A \left| \cos\left(2\pi n\mu - \frac{\pi}{4}\right) \right| = A \left| \cos \frac{\pi}{4} \right| \geq \tilde{C}_1 > 0;$$

$\tilde{C}_i$ здесь и в дальнейшем положительные постоянные.

Пусть теперь $\alpha_q = k/m$ – рациональное число, где k и m , m и 4 – взаимно простые числа. Тогда

$$|\sqrt{n}\tilde{\delta}_{k/m}(\alpha)| = A \left| \cos\left(2\pi \frac{kn}{m} - \frac{\pi}{4}\right) \right|. \quad (3.1)$$

Разделим $2kn$ на m с остатком: $2kn = sm + r$, $s, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leq r < m$. Если $r = 0$, то этот случай сводится к рассмотренному выше. Пусть $r > 0$ и ясно, что $1 \leq r \leq m - 1$ и $m \geq 2$. Тогда выражение (3.1) примет вид

$$|\sqrt{n}\tilde{\delta}_{k/m}(\alpha)| = A \left| \cos \pi \left(\frac{r}{m} - \frac{1}{4} \right) \right| \geq \tilde{C}_2 > 0.$$

Тем самым справедлива следующая

ЛЕММА 1. *Если выполнено одно из следующих условий:*

- 1) α_q – любое натуральное число;
- 2) α_q – любое дробное число, т.е. $\alpha_q = k/m \notin \mathbb{N}$, где $k, m \in \mathbb{N}$, k и m , m и 4 – взаимно простые числа,

то существуют положительные постоянные n_0 ($n_0 \in \mathbb{N}$) и C_0 , зависящие от α и q , такие, что при любом фиксированном $\beta > 0$ и всех $n > n_0$ справедлива оценка

$$|\sqrt{n}\delta_n(\alpha)| \geq C_0 > 0. \quad (3.2)$$

Если $\delta_n(\alpha, \beta) \neq 0$ при $n = 1, \dots, n_0$ и выполнена оценка (3.2), то решение задачи (1.2)–(1.5), (1.8) можно представить в виде суммы ряда

$$u(x, y) = 2(1-x)w_0(y) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} w_n(y)(1-x) \cos 2\pi nx + 4 \sum_{n=1}^{\infty} z_n(y) \sin 2\pi nx, \quad (3.3)$$

где функции $w_0(y)$, $w_n(y)$, $z_n(y)$ находятся соответственно по формулам (2.26), (2.20), (2.31).

Теперь покажем, что при определенных условиях относительно функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ ряд (3.3) и его производные первого порядка в замкнутой области $\bar{D}$, а производные второго порядка по x и y соответственно в замкнутых областях $\bar{D}_+$ и $\bar{D}_-$ сходятся равномерно.

Рассмотрим следующие отношения:

$$P_n(y) = \frac{\sqrt{y}\Delta_n(\alpha, y)}{\Delta_n(\alpha, \beta)}, \quad Q_n(y) = \frac{\sqrt{y}A_n(y, \beta)}{\Delta_n(\alpha, \beta)}, \quad y \in [0, \beta], \quad (3.4)$$

$$M_n(y) = \frac{\sqrt{-y}B_n(\alpha, -y)}{\Delta_n(\alpha, \beta)}, \quad N_n(y) = \frac{\sqrt{-y}\Delta_n(-y, \beta)}{\Delta_n(\alpha, \beta)}, \quad y \in [-\alpha, 0]. \quad (3.5)$$

ЛЕММА 2. Пусть выполнено условие (3.2) при всех $n > n_0$. Тогда для таких n справедливы оценки

$$\begin{aligned} |P_n(y)| &\leq C_1, & |P'_n(y)| &\leq C_2 n, & |P''_n(y)| &\leq C_3 n^2, \\ |Q_n(y)| &\leq C_4 n^{1-\lambda}, & |Q'_n(y)| &\leq C_5 n^\lambda, & |Q''_n(y)| &\leq C_6 n^{3-\lambda}, & y \in [0, \beta], \\ |M_n(y)| &\leq C_7 n^\lambda e^{-nd}, & |M'_n(y)| &\leq C_8 n e^{-nd}, & |M''_n(y)| &\leq C_9 n^{2+\lambda} e^{-nd}, \\ |N_n(y)| &\leq C_{10} n^\lambda, & |N'_n(y)| &\leq C_{11} n^{1/2+\lambda}, & |N''_n(y)| &\leq C_{12} n^{2+\lambda}, & y \in [-\alpha, 0], \end{aligned}$$

где $\lambda = 1/2 + 1/2q$, $d = 2\pi\beta_q$, $\beta_q = \beta^q/q$, C_i здесь и в дальнейшем положительные постоянные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость указанных оценок функций (3.4), (3.5) и их производных устанавливается на основании асимптотических формул поведения функций Бесселя [10; с. 98–99] при $z \rightarrow 0$ и $z \rightarrow +\infty$. Здесь для примера остановимся на функциях $P_n(y)$ и $M_n(y)$. С учетом (2.35) и (3.2) из (3.4) и (2.21) при $0 \leq y \leq \beta$ и больших n имеем

$$\begin{aligned} |P_n(y)| &\leq \left| \frac{\sqrt{n}J_{1/(2q)}(p_n\alpha^q)\sqrt{y}K_{1/(2q)}(p_ny^q)}{I_{1/(2q)}(p_n\beta^q)\tilde{C}_0} \right| + \left| \frac{\sqrt{ny}I_{1/(2q)}(p_ny^q)\bar{Y}_{1/(2q)}(p_n\alpha^q)}{I_{1/(2q)}(p_n\beta^q)\tilde{C}_0} \right| \\ &\leq \tilde{C}_3 |\sqrt{n\bar{Y}_{1/(2q)}(p_n\alpha^q)}| \leq C_1, \end{aligned} \quad (3.6)$$

так как при $y \in [0, \beta]$

$$\left| \frac{y^{1/2}I_{1/(2q)}(p_ny^q)}{I_{1/(2q)}(p_n\beta^q)} \right| \leq \tilde{C}_4, \quad |y^{1/2}K_{1/(2q)}(p_ny^q)| \leq \tilde{C}_5 n^{-1/(2q)}.$$

На основании формул [10; с. 90]

$$\frac{d}{dz}[z^\nu I_\nu(z)] = z^\nu I_{\nu-1}(z), \quad \frac{d}{dz}[z^\nu K_\nu(z)] = -z^\nu K_{\nu-1}(z)$$

вычислим производную

$$P'_n(y) = \frac{p_n q y^{q-1/2}}{\Delta_n(\alpha, \beta)} [I_{1/(2q)-1}(p_n y^q) \bar{Y}_{1/(2q)}(p_n \alpha^q) - J_{1/(2q)}(p_n \alpha^q) K_{1/(2q)-1}(p_n y^q)]. \quad (3.7)$$

Поскольку при $y \in [0, \beta]$

$$|y^{q-1/2} I_{1/(2q)-1}(p_n y^q)| \leq \tilde{C}_6 n^{-(1-1/(2q))}, \quad |y^{q-1/2} K_{1/(2q)-1}(p_n y^q)| \leq \tilde{C}_7 n^{-(1-1/(2q))},$$

из формулы (3.7) с учетом (2.35) и (3.2) получим

$$\begin{aligned} |P'_n(y)| &\leq \frac{|p_n q \sqrt{n} y^{q-1/2} I_{1/(2q)-1}(p_n y^q) \bar{Y}_{1/(2q)}(p_n \alpha^q)|}{I_{1/(2q)}(p_n \beta^q) \tilde{C}_0} \\ &\quad + \frac{|p_n q \sqrt{n} y^{q-1/2} J_{1/(2q)}(p_n \alpha^q) K_{1/(2q)-1}(p_n y^q)|}{I_{1/(2q)}(p_n \beta^q) \tilde{C}_0} \\ &\leq \tilde{C}_6 p_n \sqrt{n} |\bar{Y}_{1/(2q)}(p_n \alpha^q)| \leq C_2 n. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что вторая производная $P''_n(y) = (p_n q)^2 y^{2q-2} P_n(y)$. Из данного равенства в силу оценки (3.6) следует, что $|P''_n(y)| \leq C_3 n^2$.

Аналогично на основании (3.5), (2.22) и (2.35), (3.2) оценим функцию $M_n(y)$:

$$\begin{aligned} |M_n(y)| &\leq \frac{\sqrt{n} |J_{1/(2q)}(p_n \alpha^q) \sqrt{-y} \bar{Y}_{1/(2q)}(p_n (-y)^q)|}{I_{1/(2q)}(p_n \beta^q) \tilde{C}_0} \\ &\quad + \frac{\sqrt{n} |\sqrt{-y} J_{1/(2q)}(p_n (-y)^q) \bar{Y}_{1/(2q)}(p_n \alpha^q)|}{I_{1/(2q)}(p_n \beta^q) \tilde{C}_0}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Используя при любом $y \in [-\alpha, 0]$ следующие оценки:

$$|\sqrt{-y} \bar{Y}_{1/(2q)}(p_n (-y)^q)| \leq \tilde{C}_8 n^{1/(2q)}, \quad |\sqrt{-y} J_{1/(2q)}(p_n (-y)^q)| \leq \tilde{C}_9 n^{1/(2q)},$$

из неравенства (3.8) получим

$$|M_n(y)| \leq C_7 n^\lambda e^{-nd}. \quad (3.9)$$

С учетом формул [10; с. 20]

$$\frac{d}{dz}(z^\nu J_\nu(z)) = z^\nu J_{\nu-1}(z), \quad \frac{d}{dz}(z^\nu J_{-\nu}(z)) = -z^\nu J_{1-\nu}(z)$$

вычислим производную

$$\begin{aligned} M'_n(y) &= \frac{\pi(-y)^{q-1/2} p_n q}{2 \sin(\pi/(2q)) \Delta_n(\alpha, \beta)} \\ &\quad \times [J_{1/(2q)}(p_n \alpha^q) J_{1-1/(2q)}(p_n (-y)^q) + J_{-1/(2q)}(p_n \alpha^q) J_{1/(2q)-1}(p_n (-y)^q)]. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (2.35) и (3.2) получим $|M'_n(y)| \leq C_8 n^\lambda e^{-nd}$.

Вторая производная функции $M_n(y)$ имеет вид $M''_n(y) = (p_n q)^2 y^{2q-2} M_n(y)$. Тогда из оценки (3.9) следует, что $|M''_n(y)| \leq C_9 n^{2+\lambda} e^{-nd}$.

ЛЕММА 3. Справедливы следующие утверждения:

- 1) функции $z_n^+(y)$ и $z_n^-(y)$ являются решениями неоднородного уравнения (2.27) при $y > 0$ и $y < 0$ соответственно и удовлетворяют нулевым начальным условиям

$$z_n^+(0) = 0, \quad z_n^{+'}(0) = 0, \quad z_n^-(0) = 0, \quad z_n^{-'}(0) = 0;$$

- 2) при $0 < \varepsilon \leq y \leq \beta$ и больших n выполняются оценки

$$|z_n^+(y)| \leq \tilde{C}_3 n^{-3/2} (|a_n| e^{-2\pi n \beta_q} + |b_n| e^{-2\pi n \varepsilon_q}), \\ |z_n^{+''}(y)| \leq \tilde{C}_4 n^{1/2} (|a_n| e^{-2\pi n \beta_q} + |b_n| e^{-2\pi n \varepsilon_q});$$

- 3) при $-\alpha \leq y \leq -\varepsilon < 0$ и больших n выполняются оценки

$$|z_n^-(y)| \leq \tilde{C}_5 (|c_n| + |d_n|) n^{-1/2}, \quad |z_n^{-''}(y)| \leq \tilde{C}_6 n^{3/2} (|c_n| + |d_n|),$$

где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число, $\beta_q = \beta^q/q$, $\varepsilon_q = \varepsilon^q/q$.

Доказательство проводится на основании (2.32) и (2.33) с использованием асимптотических формул поведения функций Бесселя при $z \rightarrow 0$ и $z \rightarrow +\infty$. Подробное изложение приведено в ([7; § 1.1, § 2.1]).

ЛЕММА 4. Пусть выполнено условие (3.2) при всех $n > n_0$. Тогда для таких n имеют место оценки

$$|w_n(y)| \leq C_{13} (|\varphi_n| + n^\lambda |\psi_n|), \quad |w_n'(y)| \leq C_{14} (|\varphi_n| n + n^{1/2+\lambda} |\psi_n|), \\ |w_n''(y)| \leq C_{15} (n^2 |\varphi_n| + n^{2+\lambda} |\psi_n|), \\ |z_n(y)| \leq C_{16} (|\varphi_{1n}| + n^\lambda |\psi_{1n}|), \quad |z_n'(y)| \leq C_{17} (n |\varphi_{1n}| + n^{1/2+\lambda} |\psi_{1n}|), \\ |z_n''(y)| \leq C_{18} (n^2 |\varphi_{1n}| + n^{2+\lambda} |\psi_{1n}|).$$

Справедливость этих оценок следует из лемм 2 и 3.

ЛЕММА 5. Если $\varphi(x) \in C^3[0, 1]$, $\psi(x) \in C^{3+\gamma}[0, 1]$, $\gamma > \lambda$,

$$\varphi'(0) = \varphi'(1), \quad \psi'(0) = \psi'(1), \quad \varphi(1) = 0, \quad \psi(1) = 0, \quad \varphi''(1) = 0, \quad \psi''(1) = 0,$$

то справедливы оценки:

$$|\varphi_n| \leq \frac{C_{19} |g_n|}{n^3}, \quad |\varphi_{1n}| \leq C_{20} \left(\frac{|g_{1n}|}{n^3} + \frac{|g_n|}{n^4} \right), \quad |\psi_n| \leq \frac{C_{21}}{n^{3+\gamma}}, \quad |\psi_{1n}| \leq \frac{C_{22}}{n^{3+\gamma}}, \quad (3.10)$$

где

$$g_n = \int_0^1 \varphi'''(x) \sin(2\pi n x) dx, \quad g_{1n} = \int_0^1 \varphi'''(x) x \cos(2\pi n x) dx, \\ \sum_{n=1}^{+\infty} g_n^2 < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} g_{1n}^2 < +\infty. \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом условий леммы интегрируем по частям три раза в интегралах (2.12), (2.28) и (2.29). Затем, применяя теорему о скорости убывания коэффициентов ряда Фурье функции, удовлетворяющей на $[0, 1]$ условию Гёльдера с показателем $\gamma \in (0, 1]$, получим оценки (3.10). Обоснование сходимости рядов (3.11) проводится аналогично [2].

Таким образом, в силу лемм 4 и 5 ряд (3.3) при любом (x, y) из $\bar{D}$ мажорируется сходящимся рядом

$$C_{23} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \left(|g_n| + |g_{1n}| + \frac{1}{n^{\gamma-\lambda}} \right),$$

поэтому ряд (3.3) в силу признака Вейерштрасса сходится абсолютно и равномерно в замкнутой области $\bar{D}$. Ряды из производных первого порядка на $\bar{D}$ и из производных второго порядка мажорируются соответственно на замкнутых областях $\bar{D}_+$ и $\bar{D}_-$ сходящимся числовым рядом

$$C_{24} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(|g_n| + |g_{1n}| + \frac{1}{n^{\gamma-\lambda}} \right).$$

Поэтому сумма $u(x, y)$ ряда (3.3) принадлежит классу (1.2) и удовлетворяет уравнению (1.1) на множестве $D_+ \cup D_-$.

Если для указанных в лемме 1 значений α_q при $l = k_1, k_2, \dots, k_m$, где

$$1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq n_0,$$

$k_i, i = 1, \dots, m$, и m – заданные натуральные числа, выполняется $\Delta_l(\alpha, \beta) = 0$, то для разрешимости задачи (1.2)–(1.5), (1.8) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\varphi_l \sqrt{\alpha} J_{1/(2q)}(p_l \alpha^q) + \psi_l \sqrt{\beta} I_{1/(2q)}(p_l \beta^q) = 0, \quad (3.12)$$

$$\varphi_{1l} \sqrt{\alpha} J_{1/(2q)}(p_l \alpha^q) + \psi_{1l} \sqrt{\beta} I_{1/(2q)}(p_l \beta^q) = 0, \quad l = k_1, k_2, \dots, k_m. \quad (3.13)$$

Тогда решение задачи определяется в виде суммы ряда

$$\begin{aligned} u(x, y) = & 2(1-x)w_0(y) \\ & + 4 \left(\sum_{n=1}^{k_1-1} + \sum_{n=k_1+1}^{k_2-1} + \dots + \sum_{n=k_m+1}^{+\infty} \right) [z_n(y) \sin 2\pi n x + (1-x)w_n(y) \cos 2\pi n x] \\ & + \sum_l u_l(x, y), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где в последней сумме l принимает значения $k_1, k_2, \dots, k_m$ и функции $u_l(x, y)$ определяются по формуле

$$u_l(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{\varphi_l \sqrt{y} I_{1/(2q)}(p_l y^q)}{\sqrt{\beta} I_{1/(2q)}(p_l \beta^q)} + \frac{\varphi_{1l} \sqrt{y} I_{1/(2q)}(p_l y^q)}{\sqrt{\beta} I_{1/(2q)}(p_l \beta^q)} + C_l \frac{\sqrt{y} \Delta_l(\alpha, y)}{J_{1/(2q)}(p_l \alpha^q)} \right) X_l(x), & y > 0, \\ \left(\frac{\psi_l \sqrt{-y} J_{1/(2q)}(p_l (-y)^q)}{\sqrt{\alpha} J_{1/(2q)}(p_l \alpha^q)} + \frac{\psi_{1l} \sqrt{-y} J_{1/(2q)}(p_l (-y)^q)}{\sqrt{\alpha} J_{1/(2q)}(p_l \alpha^q)} + \frac{\sqrt{-y} \Delta_l(-y, \beta)}{I_{1/(2q)}(p_l \beta^q)} \right) X_l(x), & y < 0, \end{cases}$$

где C_l – произвольная постоянная; конечные суммы в (3.14) следует считать нулями при условии, когда верхний предел меньше нижнего.

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 2. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы 5 и выполнена оценка (3.2) при $n > n_0$. Тогда если $\delta_n(\alpha, \beta) \neq 0$ при всех $n = 1, \dots, n_0$, то существует единственное решение задачи (1.2)–(1.5), (1.8) и это решение определяется рядом (3.3); если $\delta_n(\alpha, \beta) = 0$ при некоторых $n = k_1, k_2, \dots, k_m \leq n_0$, то задача (1.2)–(1.5), (1.8) разрешима только тогда, когда выполнены условия (3.12), (3.13) и решение определяется рядом (3.14).

В силу доказанной теоремы 2 построенная нами функция (3.3) удовлетворяет всем условиям задачи (1.2)–(1.5) и (1.8), когда для функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ выполнены условия леммы 5, но при этом функция (3.3) не удовлетворяет равенству (1.6), т.е. функция (3.3) не является решением задачи (1.2)–(1.6). На основании теоремы 2 нетрудно получить следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены все условия теоремы 2 и условия (1.7). Тогда если $\delta_n(\alpha, \beta) \neq 0$ при всех $n = 1, \dots, n_0$, то существует единственное решение задачи (1.2)–(1.6) и оно определяется рядом (3.3), где $w_0(y) = A$; если $\delta_n(\alpha, \beta) = 0$ при некоторых $n = k_1, k_2, \dots, k_m \leq n_0$, то задача (1.2)–(1.6) разрешима только тогда, когда выполнены условия (3.12), (3.13) и решение определяется рядом (3.14) при $w_0(y) = A$.

В силу формул (2.20), (2.26), (2.31) нетрудно показать справедливость равенств

$$\begin{aligned} w_n''(0+) &= w_n''(0-), & n &= 0, 1, 2, \dots, \\ z_n''(0+) &= z_n''(0-), & n &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Отсюда получаем качественный результат о стирании особенности на линии изменения типа уравнения (1.1).

СЛЕДСТВИЕ. Построенное решение $u(x, y)$ задачи принадлежит классу $C^2(\overline{D})$ и функция $u(x, y)$ всюду в D является решением уравнения (1.1).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1966.
- [2] Н. И. Ионкин, “Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием”, *Дифференц. уравнения*, **13**:2 (1977), 294–304.
- [3] К. Б. Сабитов, “Краевая задача для уравнения парабола-гиперболического типа с нелокальным интегральным условием”, *Дифференц. уравнения*, **46**:10 (2010), 1468–1478.
- [4] Ю. К. Сабитова, “Нелокальные начально-граничные задачи для вырождающегося гиперболического уравнения”, *Изв. вузов. Матем.*, 2009, № 12, 49–58.
- [5] Ю. К. Сабитова, “Критерий единственности решения нелокальной задачи для вырождающегося уравнения смешанного типа в прямоугольной области”, *Дифференц. уравнения*, **46**:8 (2010), 1205–1208.
- [6] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969.

- [7] Ю. К. Сабитова, *Краевые задачи с нелокальным условием для уравнений смешанного типа в прямоугольной области*, Дис. . . . канд. физ.-матем. наук, СГПА, Стерлитамак, 2007.
- [8] Ф. Трикоми, *Дифференциальные уравнения*, ИЛ, М., 1962.
- [9] К. Б. Сабитов, “Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области”, *Докл. РАН*, **413**:1 (2007), 23–26.
- [10] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1966.

Ю. К. Сабитова

Стерлитамакский филиал БашГУ; Институт
прикладных исследований, г. Стерлитамак
E-mail: sabitovauk@rambler.ru

Поступило

01.05.2011

Исправленный вариант

03.03.2015