Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Двирный, В. И. Слынько, Устойчивость решений псевдолинейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 5, 702–715

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9136>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 18:24:06

Устойчивость решений псевдолинейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

А. И. Двирный, В. И. Слынько

В работе развит новый подход к построению кусочно-дифференцируемых функций Ляпунова для некоторых классов нелинейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. В основе подхода лежит метод “замороженных” коэффициентов, и функция строится в виде псевдоквадратичной формы. Получены условия устойчивости по Ляпунову для рассматриваемого случая. Предложенный подход может быть использован при исследовании устойчивости критических состояний равновесия систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.

Библиография: 10 названий.

DOI: 10.4213/mzm9136

Введение. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием являются математическими моделями процессов в физике, механике и технике [1]–[3]. Эти модели возникают в том случае, когда в некоторые моменты времени вектор состояния системы претерпевает мгновенные изменения. Актуальной задачей качественного анализа для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием является исследование устойчивости решений. Эффективным методом такого исследования является прямой метод Ляпунова, использующий кусочно-дифференцируемые функции Ляпунова [3]–[5]. В этом классе вспомогательных функций теоремы второго метода Ляпунова для периодических систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием могут быть обращены [5]. В пределах прямого метода Ляпунова значительный интерес представляет разработка способов построения вспомогательных функций.

Для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием известны достаточные условия устойчивости и неустойчивости по линейному приближению [1]. В случае, если эти условия не выполняются, при рассмотрении задачи об устойчивости решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием требуется учитывать нелинейность задачи. Проблема устойчивости критических положений равновесия является достаточно разработанной для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [6], [7]. Для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием известны лишь отдельные результаты [2], [8], [9].

В настоящей работе предлагается новый подход к построению вспомогательной кусочно-дифференцируемой функции в виде псевдоквадратичной формы. При этом прямой метод Ляпунова сочетается с методом замороженных коэффициентов, который применяется в теории устойчивости нелинейных систем.

1. Постановка задачи. Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (A + C(t, x))x, & t \neq \tau_k, \\ \Delta x(t) &= (B_k + D_k(x(t)))x(t), & t = \tau_k, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in C([a, \infty) \times D; \mathbb{R}^{n \times n})$, $\Delta x(t) = x(t+0) - x(t)$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $D_k \in C(D; \mathbb{R}^{n \times n})$, $k \in \mathbb{N}$, $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность моментов импульсного воздействия, имеющая единственную точку сгущения на бесконечности, D – открытая связная окрестность точки $x = 0$. Обозначим $x(t; t_0, x_0)$ – решение задачи Коши для системы (1.1) с начальным условием $x(t_0; t_0, x_0) = x_0$, $\|\cdot\|$ – евклидову норму соответствующего вектора, а $\|\cdot\|_E$ – норму Шмидта соответствующей матрицы.

Функция $x(t; t_0, x_0)$ является непрерывно-дифференцируемой по t на множестве $t \in [a, \infty) \setminus \bigcup_{k=1}^\infty \{\tau_k\}$, $x_0 \in D$. Считаем также, что в точках $t = \tau_k$, $k \in \mathbb{N}$, функция $x(t; t_0, x_0)$ является непрерывной слева, т.е. $x(\tau_k - 0; t_0, x_0) = x(\tau_k; t_0, x_0)$.

Относительно моментов импульсного воздействия τ_k , $k \in \mathbb{N}$, предположим, что выполняются неравенства

$$0 < \tau_{k+1} - \tau_k \leq \theta_2.$$

Предположим, что при всех $(t_0, x_0) \in [a, \infty) \times D$ решение задачи Коши существует и единственно. Для матричнозначной функции $C(t, x)$ введем следующие предположения:

- 1) для некоторых постоянных $\gamma_1 > 0$ и $\nu_1 \in [1, \infty)$ выполняются неравенства $|c_{ij}(t, x)| \leq \gamma_1 \|x\|^{\nu_1}$ при всех $i, j = 1, 2, \dots, n$, $(t, x) \in [a, \infty) \times D$;
- 2) при всех $x \in D$ существуют частные производные $D_{x_m} C(t, x)$, $m = 1, 2, \dots, n$, и постоянная $\gamma_2 > 0$ такая, что выполняются неравенства $|D_{x_m} c_{ij}(t, x)| \leq \gamma_2 \|x\|^{\nu_1 - 1}$ при всех $i, j, m = 1, \dots, n$, $(t, x) \in [a, \infty) \times D$.

Определения устойчивости и асимптотической устойчивости решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием приведены в монографии [1].

Не уменьшая общности, будем считать, что $t_0 < \tau_1$. Исследование устойчивости решения $x = 0$ системы (1.1) проведем при помощи вспомогательной функции в виде псевдоквадратичной формы $v(t, x) = x^T P(t, x)x$, где

$$P(t, x) = Y(t; \tau_k, x)XY^T(t; \tau_k, x) - \int_{\tau_k}^t Y(t; s, x)Q(s, x)Y^T(t; s, x)ds, \quad t \in (\tau_k; \tau_{k+1}],$$

$k \in \mathbb{N}$, X – некоторая положительно-определенная симметричная $n \times n$ -матрица, матрица $Y(t; t_0, x)$ является матрицантом линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, правые части которой зависят от векторного параметра x :

$$\frac{dy}{dt} = -(A^T + C^T(t, x))y, \quad (1.2)$$

а $Q(t, x)$ – симметричная матрица, которая будет выбрана ниже.

2. Вспомогательные результаты. В этом пункте установим некоторые вспомогательные утверждения, важные для дальнейшего изложения.

ЛЕММА 2.1. *Существуют частные производные $\partial Y(t; s, x)/\partial x_p$, $p = 1, \dots, n$, и*

$$\frac{\partial Y(t; s, x)}{\partial x_p} = - \int_s^t Y(t; \tau, x) \frac{\partial C^T}{\partial x_p}(\tau, x) Y(\tau; s, x) d\tau.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование частных производных $\partial Y(t; s, x)/\partial x_p$ следует из общих теорем теории дифференциальных уравнений о дифференцируемости решений по параметру. При этом $\partial Y(t; s, x)/\partial x_p$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Y}{\partial x_p}(t; s, x) \right) = -(A^T + C^T(t, x)) \frac{\partial Y}{\partial x_p}(t; s, x) - \frac{\partial C^T}{\partial x_p}(t, x) Y(t; s, x)$$

с начальным условием $\partial Y(s; s, x)/\partial x_p = 0$. Применяя формулу Коши, получим утверждение леммы.

Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\Gamma}{dt} = e^{A^T(t-s)} C^T(t, x) e^{-A^T(t-s)} \Gamma \equiv \Phi(t, s, x) \Gamma \quad (2.1)$$

и обозначим $\Gamma(t; s, x)$ решение этого уравнения с начальным условием $\Gamma(s; s, x) = I$. Введем аппроксимацию $\Gamma_m(t; s, x)$ функции $\Gamma(t; s, x)$:

$$\begin{aligned} \Gamma_m(t; s, x) = I &+ \int_s^t \Phi(s_1, s, x) ds_1 + \int_s^t \int_s^{s_1} \Phi(s_1, s, x) \Phi(s_2, s, x) ds_1 ds_2 + \dots \\ &+ \int_s^t \int_s^{s_1} \dots \int_s^{s_{m-1}} \Phi(s_1, s, x) \dots \Phi(s_{m-1}, s, x) \Phi(s_m, s, x) ds_1 \dots ds_m. \end{aligned}$$

Определим функции

$$J_0(t; s, x) = e^{-A^T(t-s)}, \quad J_1(t; s, x) = e^{-A^T(t-s)} \int_s^t \Phi(s_1, s, x) ds_1,$$

$$J_m(t; s, x) = e^{-A^T(t-s)} \int_s^t \int_s^{s_1} \dots \int_s^{s_{m-1}} \Phi(s_1, s, x) \dots \Phi(s_{m-1}, s, x) \Phi(s_m, s, x) ds_1 \dots ds_m.$$

Тогда

$$Y(t; s, x) = \sum_{q=0}^{\infty} J_q(t; s, x).$$

Определим также функцию

$$Y_m(t; s, x) = \sum_{q=0}^m J_q(t; s, x).$$

Отметим, что

$$\sup_{0 \leq t-s \leq T} \|J_l(t; s, x)\|_E \leq \frac{C_0 e^{\alpha T} T^l}{l!} \|x\|^{\nu_1 l},$$

$$\frac{\partial J_0}{\partial x_q}(t; s, x) = 0,$$

$$\max_q \sup_{0 \leq t-s \leq T} \left\| \frac{\partial J_l}{\partial x_q}(t; s, x) \right\|_E \leq \frac{C_1 e^{\alpha T} T^l}{l!} \|x\|^{\nu_1 l - 1}, \quad l = 1, 2, \dots$$

Здесь α, C_0, C_1 – положительные постоянные.

ЛЕММА 2.2. Пусть $T > 0$. Тогда существуют постоянные $C_1 = C_1(T) > 0$, $C_2 = C_2(T) > 0$ такие, что

$$\sup_{0 \leq t-s \leq T} \|Y(t; s, x) - Y_m(t; s, x)\|_E \leq \frac{C_1(T)}{(m+1)!} \|x\|^{(m+1)\nu_1}.$$

$$\max_q \sup_{0 \leq t-s \leq T} \left\| \frac{\partial Y}{\partial x_q}(t; s, x) - \frac{\partial Y_m}{\partial x_q}(t; s, x) \right\|_E \leq \frac{C_2(T)}{(m+1)!} \|x\|^{(m+1)\nu_1 - 1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

ЛЕММА 2.3. Пусть $\gamma_0 > 0$, $T > 0$, $\vartheta \geq 1$. Тогда существует функция $Q_1(t, x)$ такая, что выполняется неравенство

$$-Q_1(t, x) - \sum_{p=1}^n \sum_{l=1}^n a_{pl} x_l \int_s^t e^{-A^T(t-\tau)} \frac{\partial Q_1}{\partial x_p}(\tau, x) e^{-A(t-\tau)} d\tau \leq -\gamma_0 \|x\|^\vartheta \quad (2.2)$$

и асимптотические представления в достаточно малой окрестности состояния равновесия $x = 0$

$$\sup_{0 \leq t-s \leq T} \|Q_1(t, x)\|_E = \gamma_0 O(\|x\|^\vartheta),$$

$$\max_p \sup_{0 \leq t-s \leq T} \left\| \frac{\partial Q_1}{\partial x_p}(t, x) \right\|_E = \gamma_0 O(\|x\|^{\vartheta-1}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим линейную замену переменных

$$x_p = \sum_{q=1}^n t_{pq} z_q, \quad p = 1, \dots, n,$$

и обратную замену

$$z_q = \sum_{p=1}^n s_{qp} x_p, \quad q = 1, \dots, n,$$

где $\mathfrak{T} = [t_{pq}]_{p,q=1}^n$ и $\mathfrak{S} = [s_{qp}]_{p,q=1}^n$ – взаимно-обратные матрицы с действительными элементами, т.е. $\mathfrak{T}\mathfrak{S} = \mathfrak{S}\mathfrak{T} = I$. Введем функцию $\tilde{Q}_1(t, z) = Q_1(t, \mathfrak{T}z)$. Тогда

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_p}(t, x) = \sum_{m=1}^n \frac{\partial \tilde{Q}_1}{\partial z_m}(t, z) \frac{\partial z_m}{\partial x_p} = \sum_{m=1}^n \frac{\partial \tilde{Q}_1}{\partial z_m}(t, z) \frac{\partial}{\partial x_p} \sum_{q=1}^n s_{mq} x_q = \sum_{m=1}^n s_{mp} \frac{\partial \tilde{Q}_1}{\partial z_m}(t, z)$$

и, как следствие,

$$-Q_1(t, x) - \sum_{p=1}^n \sum_{l=1}^n a_{pl} x_l \int_s^t e^{-A^T(t-\tau)} \frac{\partial Q_1}{\partial x_p}(\tau, x) e^{-A(t-\tau)} d\tau$$

$$= -\tilde{Q}_1(t, z) - \int_s^t e^{-A^T(t-\tau)} \sum_{m=1}^n \frac{\partial \tilde{Q}_1}{\partial z_m}(\tau, z) \sum_{q=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{l=1}^n s_{mp} a_{pl} t_{lq} z_q e^{-A(t-\tau)} d\tau.$$

Пусть ε_0 – произвольное сколь угодно малое положительное число. Тогда по теореме Шура о почти триангуляризации матрицы [10; с. 113] матрицу $\mathfrak{S}$ можно выбрать так, чтобы

$$\mathfrak{S}A\mathfrak{T} = \Lambda + \mathfrak{G},$$

где

$$\Lambda = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \alpha_r & \beta_r \\ -\beta_r & \alpha_r \end{pmatrix}, \lambda_{2r+1}, \dots, \lambda_n \right\},$$

$\alpha_q \pm i\beta_q$, $q = 1, \dots, r$, $\lambda_{2r+1} \in \mathbb{R}$, $\dots$, $\lambda_n \in \mathbb{R}$ – собственные значения матрицы A , $\mathfrak{G} = [g_{pq}]_{p,q=1}^n$ – матрица с действительными элементами такими, что $|g_{pq}| \leq \varepsilon_0$ при $p > q$, $g_{pq} = 0$ при $p \leq q$, $p, q = 1, \dots, n$.

В этом случае

$$\begin{aligned} & -Q_1(t, x) - \sum_{p=1}^n \sum_{l=1}^n a_{pl} x_l \int_s^t e^{-A^T(t-\tau)} \frac{\partial Q_1}{\partial x_p}(\tau, x) e^{-A(t-\tau)} d\tau \\ & = -\tilde{Q}_1(t, z) - \int_s^t e^{-A^T(t-\tau)} \sum_{p=1}^r \left[\alpha_p \left(z_{2p-1} \frac{\partial \tilde{Q}_1}{\partial z_{2p-1}}(\tau, z) + z_{2p} \frac{\partial \tilde{Q}_1}{\partial z_{2p}}(\tau, z) \right) \right. \\ & \quad \left. - \beta_p \left(z_{2p-1} \frac{\partial \tilde{Q}_1}{\partial z_{2p}}(\tau, z) - z_{2p} \frac{\partial \tilde{Q}_1}{\partial z_{2p-1}}(\tau, z) \right) \right] e^{-A(t-\tau)} d\tau \\ & \quad - \sum_{p=2r+1}^n \int_s^t e^{-A^T(t-\tau)} \lambda_p z_p \frac{\partial \tilde{Q}_1(\tau, z)}{\partial z_p} e^{-A(t-\tau)} d\tau \\ & \quad - \int_s^t e^{-A^T(t-\tau)} \sum_{m=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{\partial \tilde{Q}_1}{\partial z_m}(\tau, z) g_{mq} z_q e^{-A(t-\tau)} d\tau. \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение в частных производных

$$\begin{aligned} & -\tilde{Q}_1(t, z) - \int_s^t e^{-A^T(t-\tau)} \sum_{p=1}^r \left[\alpha_p \left(z_{2p-1} \frac{\partial \tilde{Q}_1}{\partial z_{2p-1}}(\tau, z) + z_{2p} \frac{\partial \tilde{Q}_1}{\partial z_{2p}}(\tau, z) \right) \right. \\ & \quad \left. - \beta_p \left(z_{2p-1} \frac{\partial \tilde{Q}_1}{\partial z_{2p}}(\tau, z) - z_{2p} \frac{\partial \tilde{Q}_1}{\partial z_{2p-1}}(\tau, z) \right) \right] e^{-A(t-\tau)} d\tau \\ & \quad - \sum_{p=2r+1}^n \int_s^t e^{-A^T(t-\tau)} \lambda_p z_p \frac{\partial \tilde{Q}_1(\tau, z)}{\partial z_p} e^{-A(t-\tau)} d\tau \\ & = -k\gamma_0((z_1^2 + z_2^2)^{\vartheta/2} + \dots + (z_{2r-1}^2 + z_{2r}^2)^{\vartheta/2} + |z_{2r+1}|^\vartheta + \dots + |z_n|^\vartheta). \end{aligned}$$

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_1(t, z) & = k\gamma_0(q_1(t)(z_1^2 + z_2^2)^{\vartheta/2} + \dots + q_r(t)(z_{2r-1}^2 + z_{2r}^2)^{\vartheta/2} \\ & \quad + q_{2r+1}(t)|z_{2r+1}|^\vartheta + \dots + q_n(t)|z_n|^\vartheta), \end{aligned}$$

где $q_i(t)$ – квадратные $n \times n$ -матрицы. Для функций $q_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, r$, получим систему интегральных уравнений

$$q_i(t) + \vartheta \alpha_i \int_s^t e^{-A^T(t-\tau)} q_i(\tau) e^{-A(t-\tau)} d\tau = I.$$

Для решения этого уравнения введем функцию

$$f(t) = \int_s^t e^{-A^T(t-\tau)} q_i(\tau) e^{-A(t-\tau)} d\tau.$$

Тогда

$$f'(t) = q_i(t) - A^T f(t) - f(t)A = I - \alpha_i \vartheta f(t) - A^T f(t) - f(t)A.$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_s^t e^{-A^T(t-\tau)} e^{-(A+\alpha_i \vartheta)(t-\tau)} d\tau. \\ q_i(t) &= I - \vartheta \alpha_i \int_s^t e^{-A^T(t-\tau)} e^{-(A+\alpha_i \vartheta)(t-\tau)} d\tau. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\max_{p=1,\dots,r} \sup_{0 \leq t-s \leq T} \|q_i(t)\|_E \leq c_0(T)$, где $c_0(T)$ – положительная постоянная, зависящая от T . Аналогично доказывается, что выполняется оценка $\max_{p=2r+1,\dots,n} \sup_{0 \leq t-s \leq T} \|q_i(t)\|_E \leq c_0(T)$ (если это необходимо, постоянная $c_0(T)$ может быть увеличена).

Таким образом,

$$\begin{aligned} &-Q_1(t, x) - \sum_{p=1}^n \sum_{l=1}^n a_{pl} x_l \int_s^t e^{-A^T(t-\tau)} \frac{\partial Q_1}{\partial x_p}(\tau, x) e^{-A(t-\tau)} d\tau \\ &= -k\gamma_0 ((z_1^2 + z_2^2)^{\vartheta/2} + \dots + (z_{2r-1}^2 + z_{2r}^2)^{\vartheta/2} + |z_{2r+1}|^{\vartheta} + \dots + |z_n|^{\vartheta}) \\ &\quad - \int_s^t e^{-A^T(t-\tau)} \sum_{m=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{\partial \tilde{Q}_1}{\partial z_m}(\tau, z) g_{mq} z_q e^{-A(t-\tau)} d\tau \\ &\leq -k\gamma_0 ((z_1^2 + z_2^2)^{\vartheta/2} + \dots + (z_{2r-1}^2 + z_{2r}^2)^{\vartheta/2} + |z_{2r+1}|^{\vartheta} + \dots + |z_n|^{\vartheta}) \\ &\quad + k\gamma_0 c_1(T) \varepsilon_0 \|z\|^{\vartheta}. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что существует положительная постоянная c_3 , от T не зависящая, такая, что

$$(z_1^2 + z_2^2)^{\vartheta/2} + \dots + (z_{2r-1}^2 + z_{2r}^2)^{\vartheta/2} + |z_{2r+1}|^{\vartheta} + \dots + |z_n|^{\vartheta} \geq c_3 \|z\|^{\vartheta}.$$

Поэтому

$$-Q_1(t, x) - \sum_{p=1}^n \sum_{l=1}^n a_{pl} x_l \int_s^t e^{-A^T(t-\tau)} \frac{\partial Q_1}{\partial x_p}(\tau, x) e^{-A(t-\tau)} d\tau \leq -k\gamma_0 (c_3 - c_1(T) \varepsilon_0) \|z\|^{\vartheta}.$$

Выберем $\varepsilon_0 = c_3/(2c_1(T))$. Тогда

$$\|x\| \leq \|\mathfrak{I}\|_E \|z\|,$$

$$-Q_1(t, x) - \sum_{p=1}^n \sum_{l=1}^n a_{pl} x_l \int_s^t e^{-A^T(t-\tau)} \frac{\partial Q_1}{\partial x_p}(\tau, x) e^{-A(t-\tau)} d\tau \leq -\frac{k\gamma_0 c_3}{2\|\mathfrak{I}\|_E^{\vartheta}} \|x\|^{\vartheta}.$$

Выберем $k = 2\|\mathfrak{I}\|_E^{\vartheta}/c_3$. Тогда

$$-Q_1(t, x) - \sum_{p=1}^n \sum_{l=1}^n a_{pl} x_l \int_s^t e^{-A^T(t-\tau)} \frac{\partial Q_1}{\partial x_p}(\tau, x) e^{-A(t-\tau)} d\tau \leq -\gamma_0 \|x\|^{\vartheta}.$$

Таким образом, функция $Q_1(t, x) = \tilde{Q}_1(t, \mathfrak{S}x)$ удовлетворяет первому неравенству. Остальные свойства этой функции проверяются элементарно. Лемма доказана.

3. Основной результат. Исследование устойчивости решения $x = 0$ системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (1.1) проведем на основе прямого метода Ляпунова. Для этого рассмотрим полную производную $(dv/dt)|_{(1.1)}$ вспомогательной функции $v(t, x)$ вдоль решений системы дифференциальных уравнений (1.1) при всех $t \in (\tau_k, \tau_{k+1})$:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} \Big|_{(1.1)} &= x^T \left((A^T + C^T(t, x))P(t, x) + P(t, x)(A + C(t, x)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial P(t, x)}{\partial t} + \sum_{q=1}^n \frac{\partial P}{\partial x_q} \frac{dx_q}{dt} \right) x \\ &= x^T \left(-Q(t, x) + \sum_{q=1}^n \sum_{l=1}^n \left[\frac{\partial Y}{\partial x_q}(t; \tau_k, x) X Y^T(t; \tau_k, x) + Y(t; \tau_k, x) X \frac{\partial Y^T}{\partial x_q}(t; \tau_k, x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_{\tau_k}^t \left(\frac{\partial Y}{\partial x_q}(t; s, x) Q(s, x) Y^T(t; s, x) + Y(t; s, x) Q(s, x) \frac{\partial Y^T}{\partial x_q}(t; s, x) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + Y(t; s, x) \frac{\partial Q}{\partial x_q}(s, x) Y^T(t; s, x) \right) ds \right] (a_{ql} + c_{ql}(t, x)) x_l \right) x. \end{aligned}$$

Введем также интегро-дифференциальное уравнение в частных производных для некоторой матричнозначной функции $Q_0(t, x)$, которое в дальнейшем будем называть *основным уравнением*:

$$\begin{aligned} Q_0(t, x) &+ \sum_{q=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{d=0}^{m-1} \sum_{g=0}^d (a_{ql} + c_{ql}(t, x)) x_l \int_{\tau_k}^t \left[\frac{\partial J_g}{\partial x_q}(t; s, x) Q_0(s, x) J_{d-g}^T(t; s, x) \right. \\ &\quad \left. + J_{d-g}(t; s, x) Q_0(s, x) \frac{\partial J_g^T}{\partial x_q}(t; s, x) + J_g(t; s, x) \frac{\partial Q_0}{\partial x_q}(s, x) J_{d-g}^T(t; s, x) \right] ds \\ &= \sum_{q=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{d=0}^m \sum_{g=0}^d (a_{ql} + c_{ql}(t, x)) x_l \left[J_{d-g}(t; \tau_k, x) X \frac{\partial J_g^T}{\partial x_q}(t; \tau_k, x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial J_g}{\partial x_q}(t; \tau_k, x) X J_{d-g}^T(t; \tau_k, x) \right], \quad (t, x) \in (\tau_k, \tau_{k+1}) \times D. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Предположим, что это уравнение имеет решение $Q_0(t, x)$, удовлетворяющее в достаточно малой окрестности точки $x = 0$ асимптотическим оценкам

$$\begin{aligned} \sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{t \in (\tau_k, \tau_{k+1})} \|Q_0(t, x)\|_E &= O(\|x\|^{\nu_1}), \\ \max_q \sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{t \in (\tau_k, \tau_{k+1})} \left\| \frac{\partial Q_0}{\partial x_q}(t, x) \right\|_E &= O(\|x\|^{\nu_1-1}). \end{aligned}$$

Из леммы 2.2 следуют асимптотические представления в малой окрестности точки $x = 0$, справедливые при всех $t \in (\tau_k, \tau_{k+1})$ равномерно по $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial Y}{\partial x_q}(t; \tau_k, x) X Y^T(t; \tau_k, x) = \sum_{d=0}^m \sum_{g=0}^d \frac{\partial J_g}{\partial x_q}(t; \tau_k, x) X J_{d-g}^T(t; \tau_k, x) + O(\|x\|^{\nu_1(m+1)-1}),$$

$$\begin{aligned}
Y(t; \tau_k, x) X \frac{\partial Y^T}{\partial x_q}(t; \tau_k, x) &= \sum_{d=0}^m \sum_{g=0}^d J_{d-g}(t; \tau_k, x) X \frac{\partial J_g^T}{\partial x_q}(t; \tau_k, x) + O(\|x\|^{\nu_1(m+1)-1}), \\
\frac{\partial Y}{\partial x_q}(t; s, x) Q_0(s, x) Y^T(t; s, x) &= \sum_{d=0}^{m-1} \sum_{g=0}^d \frac{\partial J_g}{\partial x_q}(t; s, x) Q_0(s, x) J_{d-g}^T(t; s, x) + \sup_{t \in (\tau_k, \tau_{k+1})} \|Q_0(t, x)\|_E O(\|x\|^{\nu_1 m-1}), \\
Y(t; s, x) Q_0(s, x) \frac{\partial Y^T}{\partial x_q}(t; s, x) &= \sum_{d=0}^{m-1} \sum_{g=0}^d J_{d-g}(t; s, x) Q_0(s, x) \frac{\partial J_g^T}{\partial x_q}(t; s, x) + \sup_{t \in (\tau_k, \tau_{k+1})} \|Q_0(t, x)\|_E O(\|x\|^{\nu_1 m-1}), \\
Y(t; s, x) \frac{\partial Q_0}{\partial x_q}(s, x) Y^T(t; s, x) &= \sum_{d=0}^m \sum_{g=0}^d J_{d-g}(t; s, x) \frac{\partial Q_0}{\partial x_q}(s, x) J_g^T(t; s, x) + \sup_{t \in (\tau_k, \tau_{k+1})} \left\| \frac{\partial Q_0}{\partial x_q}(t, x) \right\|_E O(\|x\|^{\nu_1 m}).
\end{aligned}$$

Выберем функцию $Q(t, x) = Q_0(t, x) + Q_1(t, x)$, где $Q_1(t, x)$ удовлетворяет условиям леммы 2.3, а числа ϑ и m будут выбраны ниже. Учитывая основное уравнение (3.1) и утверждения лемм 2.1 и 2.2, оценим полную производную вспомогательной функции $v(t, x)$ вдоль решений системы дифференциальных уравнений (1.1) при $t \in (\tau_k, \tau_{k+1})$:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{dv}{dt} \right|_{(1.1)} &\leq x^T \left(-Q_1(t, x) - \sum_{q=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ql} x_l \int_{\tau_k}^t e^{-A^T(t-s)} \frac{\partial Q_1}{\partial x_q}(s, x) e^{-A(t-s)} ds \right. \\
&\quad - \sum_{q=1}^n \sum_{l=1}^n (a_{ql} + c_{ql}(t, x)) x_l \int_{\tau_k}^t \left(\frac{\partial Y}{\partial x_q}(t; s, x) Q_1(s, x) Y^T(t; s, x) \right. \\
&\quad \left. + Y(t; s, x) Q_1(s, x) \frac{\partial Y^T}{\partial x_q}(t; s, x) + R_0(t; s, x) \frac{\partial Q_1}{\partial x_q}(s, x) Y^T(t; s, x) \right. \\
&\quad \left. + Y(t; s, x) \frac{\partial Q_1}{\partial x_q}(s, x) R_0^T(t; s, x) \right. \\
&\quad \left. + R_0(t; s, x) \frac{\partial Q_1}{\partial x_q}(s, x) R_0^T(t; s, x) \right) ds \\
&\quad \left. - \sum_{q=1}^n \sum_{l=1}^n c_{ql}(t, x) x_l \int_{\tau_k}^t e^{-A^T(t-s)} \frac{\partial Q_1}{\partial x_q}(s, x) e^{-A(t-s)} ds \right) x \\
&\quad + O(\|x\|^{2+\nu_1(m+1)}) + \sup_{t \in (\tau_k, \tau_{k+1})} \|Q_0(t, x)\|_E O(\|x\|^{2+\nu_1 m}) \\
&\quad + \max_q \sup_{t \in (\tau_k, \tau_{k+1})} \left\| \frac{\partial Q_0}{\partial x_q}(t, x) \right\|_E O(\|x\|^{3+\nu_1 m}) \\
&\leq -\gamma_0 \|x\|^{\vartheta+2} + \sup_{t \in (\tau_k, \tau_{k+1})} \|Q_1(t, x)\|_E O(\|x\|^{2+\nu_1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \max_q \sup_{t \in (\tau_k, \tau_{k+1})} \left\| \frac{\partial Q_1}{\partial x_q}(t, x) \right\|_E O(\|x\|^{3+\nu_1}) + O(\|x\|^{\nu_1(m+1)+2}) \\
& + \sup_{t \in (\tau_k, \tau_{k+1})} \|Q_0(t, x)\|_E O(\|x\|^{\nu_1 m+2}) \\
& + \max_q \sup_{t \in (\tau_k, \tau_{k+1})} \left\| \frac{\partial Q_0}{\partial x_q}(t, x) \right\|_E O(\|x\|^{3+\nu_1 m}).
\end{aligned}$$

Здесь $R_0(t; s, x) = Y(t; s, x) - Y_0(t; s, x)$.

Учитывая утверждение леммы 2.3 и предположения относительно свойств функции $Q_0(t, x)$, получим

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{(1.1)} \leq -\gamma_0 \|x\|^{\vartheta+2} + O(\|x\|^{2+\nu_1+\vartheta}) + O(\|x\|^{2+\nu_1(m+1)}).$$

Числа m и ϑ подчиним условию $\nu_1(m+1) - \vartheta > 0$. Тогда в достаточно малой окрестности точки $x = 0$ справедливо неравенство

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{(1.1)} \leq -\frac{\gamma_0}{2} \|x\|^{\vartheta+2}. \quad (3.2)$$

Рассмотрим теперь вопрос об оценке разности вспомогательной функции в моменты импульсного воздействия $t = \tau_{k+1}$ в достаточно малой окрестности точки $x = 0$:

$$\begin{aligned}
& v(\tau_{k+1} + 0, x + (B_k + D_k(x))x) - v(\tau_{k+1}, x) \\
& = x^T \left((B_k + D_k(x))^T X + X(B_k + D_k(x)) + (B_k + D_k(x))^T X(B_k + D_k(x)) + X \right. \\
& \quad \left. - Y(\tau_{k+1}; \tau_k, x) X Y^T(\tau_{k+1}; \tau_k, x) \right. \\
& \quad \left. + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} Y(\tau_{k+1}; s, x) Q(s, x) Y^T(\tau_{k+1}; s, x) ds \right) x \\
& \leq x^T \left((B_k + D_k(x))^T X + X(B_k + D_k(x)) + (B_k + D_k(x))^T X(B_k + D_k(x)) + X \right. \\
& \quad \left. - \sum_{d=0}^m \sum_{g=0}^d J_g(\tau_{k+1}; \tau_k, x) X J_{d-g}^T(\tau_{k+1}; \tau_k, x) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{d=0}^{m-1} \sum_{g=0}^d \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} J_g(\tau_{k+1}; s, x) Q_0(s, x) J_{d-g}^T(\tau_{k+1}; s, x) ds \right) x \\
& \quad + O(\|x\|^{2+\nu_1(m+1)}) + O(\|x\|^{2+\nu_1 m}) \sup_{t \in (\tau_k, \tau_{k+1})} \|Q_0(t, x)\|_E \\
& \quad + x^T \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} Y(\tau_{k+1}; s, x) Q_1(s, x) Y^T(\tau_{k+1}; s, x) ds.
\end{aligned}$$

Предположим, что существуют положительная постоянная η_0 и неотрицательное число ϑ такие, что выполняется *основное неравенство*

$$x^T \left((B_{k+1} + D_{k+1}(x))^T X + X(B_{k+1} + D_{k+1}(x)) \right)$$

$$\begin{aligned}
& + (B_{k+1} + D_{k+1}(x))^T X (B_{k+1} + D_{k+1}(x)) + X \\
& - \sum_{d=0}^m \sum_{g=0}^d J_g(\tau_{k+1}; \tau_k, x) X J_{d-g}^T(\tau_{k+1}; \tau_k, x) \\
& + \sum_{d=0}^{m-1} \sum_{g=0}^d \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} J_g(\tau_{k+1}; s, x) Q_0(s, x) J_{d-g}^T(\tau_{k+1}; s, x) ds \Big) x \leq -\eta_0 \|x\|^{2+\vartheta}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Тогда с учетом утверждения леммы 2.3 и свойств функции $Q_0(t, x)$ получим

$$\begin{aligned}
& v(\tau_{k+1} + 0, x + (B_k + D_k(x))x) - v(\tau_{k+1}, x) \\
& \leq -\eta_0 \|x\|^{2+\vartheta} + O(\|x\|^{2+\nu_1(m+1)}) + \gamma_0 C \|x\|^{2+\vartheta}.
\end{aligned}$$

Положительную постоянную γ_0 выберем равной $\eta_0/(2C)$. Тогда

$$v(\tau_{k+1} + 0, x + (B_k + D_k(x))x) - v(\tau_{k+1}, x) \leq -\frac{\eta_0}{2} \|x\|^{2+\vartheta} + O(\|x\|^{2+\nu_1(m+1)}).$$

С учетом неравенства $(m+1)\nu_1 - \vartheta > 0$ получим, что в достаточно малой окрестности точки $x = 0$ выполняется неравенство

$$v(\tau_{k+1} + 0, x + (B_k + D_k(x))x) - v(\tau_{k+1}, x) \leq -\frac{\eta_0}{4} \|x\|^{2+\vartheta}. \tag{3.4}$$

ТЕОРЕМА 3.1. *Предположим, что для системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (1.1) существует симметричная положительно-определенная матрица X такая, что*

- 1) *для симметричной матричнозначной функции $Q_0(t, x)$ выполняется основное уравнение (3.1) при всех $(t, x) \in (\tau_k, \tau_{k+1}) \times D$, $k \in \mathbb{N}$;*
- 2) *выполняется основное неравенство (3.3) и числа m , ν_1 и ϑ , $\vartheta \geq 1$, связаны соотношением*

$$(m+1)\nu_1 - \vartheta > 0.$$

Тогда состояние равновесия $x = 0$ системы (1.1) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия теоремы 3.1 гарантируют существование достаточно малой окрестности $N \subset D$ точки $x = 0$ такой, что при всех $x \in N$ выполняются неравенства (3.2) и (3.4).

Обозначим r положительное число такое, что $\bar{B}_r \subset N$ (B_r – открытый шар с центром в начале координат, радиуса r) и

$$M = \sup_{x \in \bar{B}_r} (\|A\|_E + \|C(t, x)\|_E) > 0, \quad M_1 = \sup_{x \in \bar{B}_r} (n + \|B_k + D_k(x)\|_E) > 1.$$

Рассмотрим решение задачи Коши $x(t; t_0, x_0)$ с начальным условием x_0 , удовлетворяющим неравенству $\|x_0\| < \delta$, где

$$\delta = \delta(t_0, \varepsilon) = \min \left\{ \frac{r}{M_1} \sqrt{\frac{\lambda_m(X)}{\lambda_M(X)}} e^{-2M\theta}, \frac{\varepsilon}{M_1} \sqrt{\frac{\lambda_m(X)}{\lambda_M(X)}} e^{-2M\theta} \right\},$$

$\theta = \max\{\tau_1 - t_0, \theta_2\}$. Предположим, что в некоторый момент времени $t^* > t_0$ решение задачи Коши $x(t; t_0, x_0)$ покинет открытый шар B_r , т.е. $\|x(t; t_0, x_0)\| < r$ при всех $t \in [t_0, t^*]$ и $\|x(t^*; t_0, x_0)\| \geq r$. Рассмотрим случай, когда $t^* \in [t_0, \tau_1]$. Тогда из интегрального представления решения $x(t; t_0, x_0)$ задачи Коши для дифференциального уравнения (1.1)

$$x(t; t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^t (A + C(s, x(s; t_0, x_0)))x(s; t_0, x_0) ds, \quad t \in [t_0, \tau_1],$$

получим интегральное неравенство

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t M\|x(s; t_0, x_0)\| ds, \quad t \in [t_0, t^*].$$

Вследствие теоремы Гронуолла–Беллмана получим неравенство

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leq \|x_0\| e^{M\theta} < \sqrt{\frac{\lambda_m(X)}{\lambda_M(X)}} r e^{-M\theta} \leq r, \quad t \in [t_0, t^*].$$

При $t = t^*$ получаем противоречие. Отметим также, что

$$\|x(\tau_1 + 0; t_0, x_0)\| \leq M_1 e^{M\theta} \|x_0\|.$$

Далее рассмотрим случай, когда $t^* > \tau_1$. Пусть k_0 – наибольшее натуральное число, для которого $\tau_{k_0} \leq t^*$. Рассмотрим конечную последовательность $\{v(\tau_k + 0, x(\tau_k + 0; t_0, x_0))\}_{k=1}^{k_0}$. Эта последовательность убывает, что является простым следствием оценок (3.2) и (3.4). Таким образом,

$$\begin{aligned} \lambda_m(X) \|x(\tau_{k_0} + 0; t_0, x_0)\|^2 &\leq v(\tau_{k_0} + 0, x(\tau_{k_0} + 0; t_0, x_0)) \\ &\leq v(\tau_1 + 0, x(\tau_1 + 0; t_0, x_0)) \leq \lambda_M(X) \|x(\tau_1 + 0; t_0, x_0)\|^2, \end{aligned}$$

т.е.

$$\|x(\tau_{k_0} + 0; t_0, x_0)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_M(X)}{\lambda_m(X)}} \|x(\tau_1 + 0; t_0, x_0)\|.$$

Из интегрального представления решения задачи Коши $x(t; t_0, x_0)$

$$x(t; t_0, x_0) = x(\tau_{k_0} + 0; t_0, x_0) + \int_{\tau_{k_0}}^t (A + C(s, x(s; t_0, x_0)))x(s; t_0, x_0) ds$$

следует неравенство

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leq \|x(\tau_{k_0} + 0; t_0, x_0)\| + \int_{\tau_{k_0}}^t M\|x(s; t_0, x_0)\| ds, \quad t \in [\tau_{k_0}, t^*].$$

Откуда вследствие леммы Гронуолла–Беллмана получим при $t \in [\tau_{k_0}, t^*]$

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leq \|x(\tau_{k_0} + 0; t_0, x_0)\| e^{M(t-\tau_{k_0})} \leq \|x(\tau_{k_0} + 0; t_0, x_0)\| e^{M\theta}$$

и при $t = t^*$

$$r \leq \|x(t^*; t_0, x_0)\| \leq \|x_0\| M_1 \sqrt{\frac{\lambda_M(X)}{\lambda_m(X)}} e^{2M\theta} < r.$$

Полученное противоречие доказывает, что решение $x(t; t_0, x_0)$ не покидает шар B_r при всех $t \geq t_0$. Таким образом, вдоль решения $x(t; t_0, x_0)$, $t \geq t_0$, выполняются неравенства (3.2) и (3.4), т.е. последовательность $\{v(\tau_k + 0, x(\tau_k + 0; t_0, x_0))\}_{k=1}^{\infty}$ убывает. Поэтому

$$\begin{aligned} \lambda_m(X) \|x(\tau_k + 0; t_0, x_0)\|^2 &\leq v(\tau_k + 0, x(\tau_k + 0; t_0, x_0)) \\ &\leq v(\tau_1 + 0, x(\tau_1 + 0; t_0, x_0)) \leq \lambda_M(X) \|x(\tau_1 + 0; t_0, x_0)\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\|x(\tau_k + 0; t_0, x_0)\| \leq \|x(\tau_1 + 0; t_0, x_0)\| \sqrt{\frac{\lambda_M(X)}{\lambda_m(X)}}.$$

Из интегрального представления решения $x(t; t_0, x_0)$ задачи Коши

$$x(t; t_0, x_0) = x(\tau_k + 0; t_0, x_0) + \int_{\tau_k}^t (A + C(s, x(s; t_0, x_0)))x(s; t_0, x_0) ds, \quad t \in (\tau_k, \tau_{k+1}],$$

следует неравенство

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leq \|x(\tau_k + 0; t_0, x_0)\| + \int_{\tau_k}^t M \|x(s; t_0, x_0)\| ds, \quad t \in (\tau_k, \tau_{k+1}].$$

Вследствие неравенства Гронуолла–Беллмана, получим

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leq \|x(\tau_k + 0; t_0, x_0)\| e^{M(t-\tau_k)} \leq \|x_0\| M_1 e^{2M\theta} \sqrt{\frac{\lambda_M(X)}{\lambda_m(X)}}$$

при всех $t \geq t_0$. Таким образом, $\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$. Утверждение об устойчивости состояния равновесия $x = 0$ доказано.

Покажем, что состояние равновесия $x = 0$ системы (1.1) асимптотически устойчиво.

Действительно, существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v(\tau_k, x(\tau_k + 0; t_0, x_0)) = \inf_k v(\tau_k, x(\tau_k + 0; t_0, x_0)) = \alpha.$$

Предположим, что $\alpha > 0$; тогда

$$\lambda_M(X) \|x(\tau_k + 0; t_0, x_0)\|^2 \geq x^T(\tau_k + 0; t_0, x_0) X x(\tau_k + 0; t_0, x_0) \geq \alpha$$

и, как следствие,

$$\|x(\tau_k + 0; t_0, x_0)\| \geq \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda_M(X)}}.$$

Поэтому,

$$\begin{aligned} &v(\tau_{N+1} + 0, x(\tau_{N+1} + 0; t_0, x_0)) \\ &\leq v(\tau_1 + 0, x(\tau_1 + 0; t_0, x_0)) - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N \|x(\tau_k + 0; t_0, x_0)\|^{\vartheta+2} \\ &\leq v(\tau_1 + 0, x(\tau_1 + 0; t_0, x_0)) - \frac{N}{4} \left(\frac{\alpha}{\lambda_M(X)} \right)^{(\vartheta+2)/2}. \end{aligned}$$

Это противоречиво при больших N , поэтому $\alpha = 0$. Поскольку

$$\lambda_M(X) \|x(\tau_k + 0; t_0, x_0)\|^2 \leq v(\tau_k + 0, x(\tau_k + 0; t_0, x_0)),$$

то $x(\tau_k + 0; t_0, x_0) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Применение леммы Гронуолла–Беллмана завершает доказательство теоремы.

4. Обсуждение результатов. Теорема 3.1 является обобщением результатов работ [10]. В случае, если $\vartheta = 0$, $D_k(x) = o(1)$, в достаточно малой окрестности точки $x = 0$ можно доказать справедливость следующего предложения, устанавливающего условия устойчивости по линейному приближению:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Предположим, что система дифференциальных уравнений (1.1) такова, что существуют положительно-определенная симметричная матрица X и положительная постоянная η_0 такие, что при всех $k \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства*

$$(I + B_{k+1})^T X (I + B_{k+1}) - e^{-A^T(\tau_{k+1} - \tau_k)} X e^{-A(\tau_{k+1} - \tau_k)} \leq -\eta_0 I.$$

Тогда состояние равновесия $x = 0$ асимптотически устойчиво не зависимо от нелинейных членов.

Утверждение теоремы 3.1 целесообразно использовать в тех случаях, когда невозможно судить об асимптотической устойчивости решения $x = 0$ по линейному приближению. Приведем соответствующий пример. Предположим, что существует положительно определенная матрица X такая, что при всех $k \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$(I + B_{k+1})^T X (I + B_{k+1}) - e^{-A^T(\tau_{k+1} - \tau_k)} X e^{-A(\tau_{k+1} - \tau_k)} = 0.$$

В этом случае, очевидно, линейное приближение системы (1.1) является устойчивым, но не может быть асимптотически устойчивым. Поэтому для решения вопроса об устойчивости состояния равновесия $x = 0$ системы (1.1) необходимо привлечь нелинейные члены в уравнениях (1.1). При этом теорема 3.1 может быть эффективным средством решения этой задачи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк, *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием*, Вища школа, Киев, 1987.
- [2] А. И. Двирный, В. И. Слынько, “Об устойчивости решений нестационарных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в одном критическом случае”, *Нелинейные колебания*, 14:4 (2011), 445–467.
- [3] V. Lakshmikantham, D. D. Bainov, P. S. Simeonov, *Theory of Impulsive Differential Equations*, Ser. Modern Appl. Math., 6, World Sci., Singapore, 1989.
- [4] А. О. Игнатьев, “Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных решений систем с импульсным воздействием”, *Сиб. матем. журн.*, 49:1 (2008), 125–133.
- [5] Р. И. Гладилина, А. О. Игнатьев, “О необходимых и достаточных условиях устойчивости инвариантных множеств нелинейных импульсных систем”, *Прикладная механика*, 44:2 (2008), 132–142.

- [6] Л. Г. Хазин, Э. Э. Шноль, *Устойчивость критических положений равновесия*, Изд-во НЦБИ АН СССР, Пушчино, 1985.
- [7] В. И. Арнольд, Ю. С. Ильяшенко, “Обыкновенные дифференциальные уравнения”, *Динамические системы* – 1, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **1**, ВИНТИ, М., 1985, 7–140.
- [8] О. С. Черникова, “Принцип сведения для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием”, *Укр. матем. журн.*, **34**:5 (1982), 601–607.
- [9] Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ*, Мир, М., 1989.
- [10] А. И. Двирный, В. И. Слынько, “Устойчивость решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в критических случаях”, *Сиб. матем. журн.*, **52**:1 (2011), 70–80.

А. И. Двирный

Академия пожарной безопасности им. Героев

Чернобыля, г. Черкассы

E-mail: dvirny@mail.ru

Поступило

21.04.2011

Исправленный вариант

30.06.2012

В. И. Слынько

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН

Украины, г. Киев

E-mail: vitstab@ukr.net