Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Дашков, О позитивном фрагменте полимодальной логики доказуемости **GLP**, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 3, 331–346

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9138>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 18:34:05

О позитивном фрагменте полимодальной логики доказуемости GLP

Е. В. Дашков

Рассматривается фрагмент полимодальной логики доказуемости **GLP** в языке со связками $\top$, $\wedge$ и $\langle n \rangle$ для всех $n \in \omega$. Для него построена дедуктивная система, предложена семантика Крипке и получена полиномиальная оценка сложности разрешающей процедуры.

Библиография: 14 названий.

1. Введение. Беклемишев предложил [1] новый подход к ординальному анализу арифметических теорий, основанный на понятии *градуированной алгебры доказуемости*, т.е. алгебры Линденбаума рассматриваемой теории, обогащенной операторами доказуемости (или непротиворечивости). Пусть $\mathcal{L}_T$ означает алгебру Линденбаума теории T . Предполагая T достаточно сильной, введем операторы на $\mathcal{L}_T$:

$$\langle n \rangle_T: [F] \mapsto [n\text{-Con}_T(F)],$$

где $[F]$ означает класс эквивалентности формулы F , а формула $n\text{-Con}_T(F)$ естественным образом выражает совместность множества всех истинных Π_n -предложений и формулы F в теории T . Тогда *градуированной алгеброй доказуемости теории T* называется структура $\mathcal{M}_T = (\mathcal{L}_T, \{\langle n \rangle_T \mid n < \omega\})$. Термы $\mathcal{M}_T$ можно отождествить с формулами некоторого модального языка.

Действительно, рассмотрим язык $\mathcal{L}$ с пропозициональными переменными, связками $\perp$, $\top$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ и $\langle n \rangle$ для всех $n < \omega$. При этом считаем $\neg\varphi$, $\varphi \leftrightarrow \psi$ и $[n]\varphi \equiv \neg\langle n \rangle\neg\varphi$ сокращениями.

Джапаридзе установил [2] (см. также [3]), что тогда для введенной им полимодальной логики доказуемости **GLP** и всякой (достаточно сильной) корректной теории T выполнено

$$\mathcal{M}_T \models \forall \vec{x}(\varphi(\vec{x}) = \top) \iff \mathbf{GLP} \vdash \varphi(\vec{x}).$$

С применением этого результата Беклемишевым была получена система ординальных обозначений до ординала ε_0 , ординальный анализ арифметики Пеано **PA** и ряда ее фрагментов [1], а также построен новый пример комбинаторного утверждения, независимого от **PA** [4]. В действительности, как заметил Беклемишев, для получения этих результатов достаточно рассматривать множество доказуемых

в **GLP** эквивалентностей формул *позитивного* полимодального языка $\mathcal{L}_+$ с пропозициональными переменными, $\top$, $\wedge$ и модальными связками $\langle n \rangle$ для всех $n < \omega$.¹ В частности, упомянутая система ординальных обозначений строится из позитивных формул без переменных. Таким образом возможно упростить доказательства результатов [1], [4].

Кроме того, позитивный формализм допускает более широкий класс арифметических интерпретаций – в соответствие переменным могут быть поставлены *теории* (т.е. фильтры в $\mathcal{M}_T$). В отличие от случая языка $\mathcal{L}$ здесь не возникает неясности в определении отрицания (бесконечно порожденного) фильтра. Это обстоятельство может способствовать анализу более сильных теорий методом градуированных алгебр доказуемости. Например, можно определить оператор $\langle \omega \rangle: S \mapsto \{ \langle n \rangle S \mid n < \omega \}$. Тогда значением $\langle \omega \rangle S$ будет полная схема рефлексии для теории S , не являющаяся конечно аксиоматизируемой.

Шапировский показал [5], что логика **GLP** является PSPACE-полной. Мы докажем, что фрагмент **GLP**₊ разрешим за полиномиальное время. Таким образом, позитивный формализм проще не только синтаксически, но алгоритмически.

Настоящая работа посвящается исследованию позитивного фрагмента **GLP**₊ логики **GLP**, т.е. множества выводимых в **GLP** эквивалентностей для формул языка $\mathcal{L}_+$. Мы решаем естественно возникающую задачу аксиоматизации **GLP**₊, предлагая для него эквациональное исчисление в п. 2. В п. 3 мы устанавливаем полноту этого исчисления относительно некоторого класса полимодальных шкал Крипке. Отметим, что **GLP** не полна по Крипке. С помощью последнего результата в п. 5 получена полиномиальная оценка сложности разрешающей процедуры для **GLP**₊.

Некоторые позитивные модальные логики рассматривались и ранее. Данн в статье [6] исследует минимальную нормальную модальную логику $\mathbf{K}_+^{\top\perp}$ в языке $\mathcal{L}_D$ со связками $\wedge$, $\vee$, $\Box$, $\Diamond$, $\top$, $\perp$, а также некоторые ее расширения. Аксиомами и теоремами при этом считаются утверждения вида $\varphi \vdash \psi$. С помощью обычной семантики Крипке Данн установил, что **K** консервативна над $\mathbf{K}_+^{\top\perp}$, или, другими словами, $\mathbf{K}_+^{\top\perp}$ аксиоматизирует фрагмент логики **K** в языке $\mathcal{L}_D$:

$$\varphi \vdash_{\mathbf{K}_+^{\top\perp}} \psi \iff \vdash_{\mathbf{K}} \varphi \rightarrow \psi$$

для любых $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_D$. Однако, в смысле предложенной семантики некоторые расширения $\mathbf{K}_+^{\top\perp}$ оказались неполными: например, в каждой шкале, где истинна $\Box\varphi \vdash \Box\Box\varphi$, истинной оказывается и $\Diamond\Diamond\varphi \vdash \Diamond\varphi$, притом, что второе утверждение не выводится из первого в $\mathbf{K}_+^{\top\perp}$. Эта трудность была разрешена Челани и Янсана в работе [7], доказавшими полноту ряда расширений $\mathbf{K}_+^{\top\perp}$ относительно шкал, где отношение достижимости согласовано с некоторым предпорядком и допускаются лишь неубывающие относительно предпорядка оценки переменных.

Результаты работ [6], [7] позволяют получить аксиоматизацию позитивных фрагментов многих хорошо известных логик, являющихся расширениями **K** принципами вида $\varphi \rightarrow \psi$, где $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_D$. Таковы **B**, **T**, **D**, **S4**, **S5** и др. Однако, например, к логике Геделя–Лёба **GL** = **K4** + $\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond(\varphi \wedge \neg\Diamond\varphi)$ эти результаты непосредственно не

¹В литературе по модальным логикам принято более широкое понимание позитивного языка: обычно позитивным считается язык $\mathcal{L}_D$, определяемый ниже, где (в мономодальном случае) допускаются связки $\wedge$, $\vee$, $\Box$, $\Diamond$, $\top$, $\perp$. Мы, однако, будем в пп. 2–5 называть позитивными модальные языки лишь с булевыми связками $\wedge$ и $\top$.

применимы. Из результатов п. 4 следует совпадение $\mathcal{L}_+$ -фрагментов логик **GL** и **K4**, однако легко убедиться, что **K4_D** $\subsetneq$ **GL_D**.

Вопросы сложности модальных логик в ограниченных языках рассматривались ранее преимущественно в контексте дескрипционных логик. В работах [8]–[11] в дескрипционной постановке исследуется сложность задачи, представимой в модальных терминах следующим образом. Пусть формулы построены из переменных, связок $\top$, $\perp$, $\wedge$ и не более чем счетного множества связок $\Diamond_r$. Проверить: для всякой модели из данного класса, если во всех точках модели выполнено некоторое конечное множество импликаций $\varphi_i \rightarrow \psi_i$, то во всех точках этой модели выполнена $\varphi \rightarrow \psi$. Установлена PTIME-разрешимость этой задачи для класса всех шкал Крипке и получены оценки сложности для некоторых классов шкал. Тем не менее, из известных нам результатов в этой области оценка сложности **GLP**₊ очевидным образом не извлекается.

2. Позитивный фрагмент системы GLP. Логика **GLP** может быть задана в $\mathcal{L}$ следующими схемами аксиом:

- (i) аксиомы пропозициональной логики,
- (ii) $\neg\langle n \rangle \perp$,
- (iii) $\langle n \rangle (\varphi \vee \psi) \rightarrow \langle n \rangle \varphi \vee \langle n \rangle \psi$,
- (iv) $\langle n \rangle \varphi \rightarrow \langle n \rangle (\varphi \wedge \neg\langle n \rangle \varphi)$,
- (v) $\langle n \rangle \langle m \rangle \varphi \rightarrow \langle m \rangle \varphi$, если $m \leq n$,
- (vi) $\langle n \rangle \neg\langle m \rangle \varphi \rightarrow \neg\langle m \rangle \varphi$, если $m < n$,
- (vii) $\langle n \rangle \varphi \rightarrow \langle m \rangle \varphi$, если $m < n$,

и правилами вывода: modus ponens и $(\text{Nec}) \vdash \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \vdash \langle n \rangle \varphi \rightarrow \langle n \rangle \psi$. Используемая нами ниже логика **J** (как видно, являющаяся подсистемой **GLP**) получается удалением (vii) и добавлением в ее место схемы

- (viii) $\langle m \rangle \langle n \rangle \varphi \rightarrow \langle m \rangle \varphi$, если $m \leq n$.

Напомним, что формулы языка $\mathcal{L}_+$ строятся из пропозициональных переменных и связок $\top$, $\wedge$, $\langle n \rangle$ для всех $n < \omega$. Множество формальных равенств **GLP**₊ $\equiv \{ \varphi = \psi \mid \mathbf{GLP} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \text{ и } \varphi, \psi \in \mathcal{L}_+ \}$ называется *позитивным фрагментом* системы **GLP**. Ясно, что естественно задаваемое **GLP**₊ отношение $=$ на $(\mathcal{L}_+)^2$ действительно является отношением эквивалентности.

Введем исчисление **GLP**₊^e для равенств вида $\varphi = \psi$, где $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_+$. Примем схему аксиом $\varphi = \varphi$ и правила

$$\frac{\varphi = \psi}{\psi = \varphi}, \quad \frac{\varphi = \theta, \theta = \psi}{\varphi = \psi}, \quad \frac{\varphi = \psi}{\varphi \wedge \theta = \psi \wedge \theta}, \quad \frac{\varphi = \psi}{\langle n \rangle \varphi = \langle n \rangle \psi}$$

для всех $n < \omega$. В языке с конъюнкцией можно заменить равенства неравенствами: будем иногда писать $\varphi \leq \psi$ вместо $\varphi \wedge \psi = \varphi$. Кроме указанных схем и правил, исчисление **GLP**₊^e задается схемами аксиом

- 1) $\top \wedge \varphi = \varphi$,
- 2) $(\varphi \wedge \psi) \wedge \theta = \varphi \wedge (\psi \wedge \theta)$,
- 3) $\varphi \wedge \psi = \psi \wedge \varphi$,
- 4) $\varphi \wedge \varphi = \varphi$,
- 5) $\langle n \rangle (\varphi \wedge \psi) \leq \langle n \rangle \varphi \wedge \langle n \rangle \psi$,
- 6) $\langle n \rangle \langle n \rangle \varphi \leq \langle n \rangle \varphi$,
- 7) $\langle n \rangle \varphi \wedge \langle m \rangle \psi \leq \langle n \rangle (\varphi \wedge \langle m \rangle \psi)$, где $m < n$,
- 8) $\langle n \rangle \varphi \leq \langle m \rangle \varphi$, где $m < n$.

Для конечных множеств $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{L}_+$ пишем $\Gamma \leq \Delta$, если существует формула $\delta \in \Delta$ такая, что $\mathbf{GLP}_+^e \vdash \bigwedge \Gamma \leq \delta$ (как обычно, $\bigwedge \emptyset = \top$); если такой формулы не существует, то пишем $\Gamma \not\leq \Delta$.

ЛЕММА 2.1. Пусть $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_+$. Тогда $\mathbf{GLP}_+^e \vdash \varphi \leq \psi$ влечет $\mathbf{GLP} \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемые эквивалентности легко выводятся в $\mathbf{GLP}$. Например, чтобы получить неравенство (7), достаточно использовать аксиому (vi) и выводимую в силу (iii) формулу $\langle n \rangle \eta \wedge [n] \theta \rightarrow \langle n \rangle (\eta \wedge \theta)$.

ЛЕММА 2.2. $\mathbf{GLP} \not\vdash \neg \psi$ для всех $\psi \in \mathcal{L}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $\mathbf{GLP} \vdash \neg \psi$ для некоторой формулы $\psi \in \mathcal{L}_+$. Подставим в последнюю $\top$ вместо всех вхождений переменных и получим замкнутую (т.е. не содержащую переменных) формулу ψ' , причем $\mathbf{GLP} \vdash \neg \psi'$. Можно использовать корректность $\mathbf{GLP}$ относительно арифметической интерпретации $\cdot^*$ в произвольной (достаточно сильной) корректной теории T [3]. Поскольку $(\langle n \rangle \varphi)^* = n\text{-Con}_T(\varphi^*)$, очевидно, $\mathbb{N} \models (\psi')^*$. Вследствие корректности, $T \not\vdash \neg(\psi')^*$ и $\mathbf{GLP} \not\vdash \neg \psi'$.

Возможно и более прямое доказательство. Для каждой замкнутой формулы $\varphi \in \mathcal{L}_+$ найдется $m < \omega$ такое, что $\mathbf{GLP} \vdash \langle m \rangle \top \rightarrow \varphi$. Действительно, проведем индукцию по построению φ . Для $\varphi = \top$ положим $m = 0$. Из $\langle m_1 \rangle \top \rightarrow \varphi_1$ и $\langle m_2 \rangle \top \rightarrow \varphi_2$ в $\mathbf{GLP}$ выводим $\langle \max(m_1, m_2) \rangle \top \rightarrow \varphi_1 \wedge \varphi_2$. Наконец, если $\varphi = \langle n \rangle \varphi_1$ и $\mathbf{GLP} \vdash \langle m_1 \rangle \top \rightarrow \varphi_1$, положив $m = \max(n, m_1) + 1$, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{GLP} \vdash \langle m \rangle \top &\rightarrow \langle m \rangle \langle \max(n, m_1) \rangle \top \\ &\rightarrow \langle n \rangle \langle m_1 \rangle \top \\ &\rightarrow \langle n \rangle \varphi_1. \end{aligned}$$

Поэтому из $\mathbf{GLP} \vdash \neg \psi'$ следует $\mathbf{GLP} \vdash \neg \langle m \rangle \top$ для некоторого $m < \omega$.

Игнатьев предложил [3] (см. также [12]) универсальную модель $\mathcal{U}$ для замкнутого фрагмента логики $\mathbf{GLP}$. Как нетрудно показать, $\mathcal{U}, x_m \Vdash \langle m \rangle \top$ для некоторого $x_m \in \mathcal{U}$. Противоречие.

Пусть дано конечное множество $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_+$. Тогда любое множество $\{\langle k_\gamma \rangle \gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ такое, что все числа $k_\gamma \geq n$, будем обозначать через $\Diamond_{\geq n} \Gamma$. Множества $\Diamond_{< n} \Gamma$ определяются аналогично для $k_\gamma < n$. Наконец, $\langle n \rangle \Gamma \equiv \{\langle n \rangle \gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$.

ЛЕММА 2.3. Пусть $\Gamma = \Diamond_{< n} \Gamma'$ для некоторого $\Gamma' \subseteq \mathcal{L}_+$ и $\varphi \in \mathcal{L}_+$. Тогда $\Gamma, \varphi \not\leq \langle n \rangle \varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим $\bigwedge \Gamma \wedge \varphi \leq \langle n \rangle \varphi$. Тогда по лемме 2.1 $\mathbf{GLP} \vdash \bigwedge \Gamma \wedge \varphi \rightarrow \langle n \rangle \varphi$. Выводим отсюда в $\mathbf{J}$:

$$\begin{aligned} \varphi \wedge \neg \langle n \rangle \varphi &\rightarrow \bigvee \neg \Gamma, \\ \langle n \rangle (\varphi \wedge \neg \langle n \rangle \varphi) &\rightarrow \bigvee \langle n \rangle \neg \Gamma, & (\text{Nec, iii}) \\ \langle n \rangle (\varphi \wedge \neg \langle n \rangle \varphi) &\rightarrow \bigvee \neg \Gamma, & (\text{vi}) \\ \langle n \rangle \varphi &\rightarrow \bigvee \neg \Gamma, & (\text{iv}) \end{aligned}$$

Последнее дает $\mathbf{GLP} \vdash \neg(\bigwedge \Gamma \wedge \langle n \rangle \varphi)$, что противоречит лемме 2.2.

3. Семантика Крипке для GLP_+ . Для $\Psi \cup \{\psi\} \subset \mathcal{L}_+$ положим $\ell(\Psi) \Rightarrow \{n \mid \langle n \rangle \varphi \in \Psi\}$, $m(\Psi) \Rightarrow \max \ell(\Psi)$ и $\ell(\psi) \Rightarrow \ell(\text{SFm}(\psi))$, $m(\psi) \Rightarrow \max \ell(\psi)$. Назовем конечное множество формул $\Phi \subset \mathcal{L}_+$ *подходящим*, если

- (0) $\top \in \Phi$,
- (1) Φ содержит все подформулы своих формул и
- (2) если $\langle n \rangle \varphi \in \Phi$ и $n < m \leq m(\Phi)$, то $\langle m \rangle \varphi \in \Phi$.

Легко видеть, что каждое конечное подмножество Ψ языка $\mathcal{L}_+$ может быть дополнено до некоторого подходящего множества.

Назовем пару $(\Gamma; \Delta)$ *выводимой*, если $\Gamma \leq \Delta$. Станем рассматривать некоторое подходящее множество Φ . Пара $(\Gamma; \Delta)$ подмножеств Φ называется Φ -*максимальной* невыводимой, если

- (1) $(\Gamma; \Delta)$ не выводима;
- (2) для любых Γ', Δ' таких, что $\Gamma \subsetneq \Gamma' \subseteq \Phi$ и $\Delta \subsetneq \Delta' \subseteq \Phi$, выводима пара $(\Gamma'; \Delta')$.

Будем называть Φ -максимальные невыводимые пары просто *максимальными*.

ЛЕММА 3.1. Пусть пара $(\Gamma; \Delta)$ максимальная. Тогда

- 1) $\forall \varphi \in \Phi (\varphi \in \Gamma \text{ или } \varphi \in \Delta)$;
- 2) $\nexists \varphi (\varphi \in \Gamma \text{ и } \varphi \in \Delta)$;
- 3) $\top \in \Gamma$;
- 4) $\varphi \wedge \psi \in \Gamma \Rightarrow \varphi \in \Gamma \text{ и } \psi \in \Gamma$;
- 5) $\varphi \wedge \psi \in \Delta \Rightarrow \varphi \in \Delta \text{ или } \psi \in \Delta$.
- 6) если $\langle n \rangle \varphi \in \Gamma$ и $\langle m \rangle \varphi \in \Phi$ для некоторого $m < n$, то $\langle m \rangle \varphi \in \Gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим лишь последнее утверждение. Допустим противное. Тогда по максимальной выводимо $\Gamma, \langle m \rangle \varphi \leq \Delta$, так как $\langle m \rangle \varphi \in \Phi$. Имеем $\Gamma \leq \bigwedge \Gamma \wedge \langle m \rangle \varphi$, поскольку $\langle n \rangle \varphi \leq \langle m \rangle \varphi$. Отсюда $\Gamma \leq \Delta$, что не так.

Рассмотрим два класса шкал Крипке. Шкала $(W, \{R_n\}_{n \in \omega})$ называется *J-шкалой*, если

- (j1) каждое R_n задает нетерово (т.е. не допускающее бесконечных возрастающих цепей) упорядочение W ;
- (j2) $m < n \Rightarrow \forall x, y (xR_n y \Rightarrow \forall z (xR_m z \Leftrightarrow yR_m z))$;
- (j3) $m \leq n \Rightarrow \forall x, y (xR_m y \& yR_n z \Rightarrow xR_m z)$;

и называется *J_+ -шкалой*, если

- (j1₊) $\forall x, y, z (xR_n y \& yR_n z \Rightarrow xR_n z)$;
- (j2₊) $m < n \Rightarrow R_n \subseteq R_m$;
- (j3₊) $m < n \Rightarrow \forall x, y (xR_n y \Rightarrow \forall z (xR_m z \Rightarrow yR_m z))$.

ЛЕММА 3.2 [13]. Логика **J** корректна и полна относительно (конечных) *J-шкал*.

ЛЕММА 3.3. Если $\text{GLP}_+^e \vdash \varphi \leq \psi$ для некоторых формул $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_+$, то в любой J_+ -модели вынуждается $\varphi \rightarrow \psi$.

Проверяется непосредственно.

Рассмотрим (конечное) множество W всех Φ -максимальных пар и отношения $R_n, R_n^+ \subseteq W \times W$ для всех $n \in \omega$, определенные так: $(\Gamma; \Delta)R_n(\Gamma'; \Delta')$ равносильно условиям

- (1) $\langle n \rangle \varphi \in \Delta \Rightarrow (\varphi \in \Delta' \& \forall k \in [n, m(\Phi)] (\langle k \rangle \varphi \in \Delta'))$;

- (2) $\forall m < n (\langle m \rangle \varphi \in \Delta \Leftrightarrow \langle m \rangle \varphi \in \Delta')$;
 (3) $\exists \varphi (\langle n \rangle \varphi \in \Delta' \& \langle n \rangle \varphi \notin \Delta)$;
 и $(\Gamma; \Delta) R_n^+(\Gamma'; \Delta')$ равносильно условиям
 (1₊) $\forall m \leq n (\langle m \rangle \varphi \in \Delta \Rightarrow (\varphi \in \Delta' \& \forall k \in [m, m(\Phi)] (\langle k \rangle \varphi \in \Delta'))$;
 (2₊) $\forall m < n (\langle m \rangle \varphi \in \Delta' \Rightarrow \langle m \rangle \varphi \in \Delta)$;
 (3₊) $\exists k \geq n \exists \varphi (\langle k \rangle \varphi \in \Delta')$.

ЛЕММА 3.4. Имеем

- 1) $\mathcal{F} = (W, \{R_n\}_{n < \omega})$ есть J -шкала;
 2) $\mathcal{F}^+ = (W, \{R_n^+\}_{n < \omega})$ есть J_+ -шкала.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $x = (\Gamma_x; \Delta_x)$ для любого $x \in W$.

1) Свойство (j1) следует из конечности W и (3).

(j2) Пусть $xR_n y$, $xR_m z$ и $m < n$. Проверим $yR_m z$.

- (1) Если $\langle m \rangle \varphi \in \Delta_y$, то $\langle m \rangle \varphi \in \Delta_x$ по (2) и $(\varphi \in \Delta_z \& \forall k \in [m, m(\Phi)] (\langle k \rangle \varphi \in \Delta_z))$ по (1).
 (2) Если $m' < m < n$, то $\langle m' \rangle \varphi \in \Delta_y \Leftrightarrow \langle m' \rangle \varphi \in \Delta_x \Leftrightarrow \langle m' \rangle \varphi \in \Delta_z$.
 (3) По (3) найдется $\langle m \rangle \varphi \in \Delta_z$, такая что $\langle m \rangle \varphi \notin \Delta_x$, и $\langle m \rangle \varphi \notin \Delta_y$ по (2).

Пусть $xR_n y$, $yR_m z$ и $m < n$. Проверим $xR_m z$.

- (1) Если $\langle m \rangle \varphi \in \Delta_x$, то $\langle m \rangle \varphi \in \Delta_y$ по (2) и $(\varphi \in \Delta_z \& \forall k \in [m, m(\Phi)] (\langle k \rangle \varphi \in \Delta_z))$ по (1).
 (2) Как выше.
 (3) По (3) найдется $\langle m \rangle \varphi \in \Delta_z$, такая что $\langle m \rangle \varphi \notin \Delta_y$, и $\langle m \rangle \varphi \notin \Delta_x$ по (2).

(j3) Пусть $xR_m y$, $yR_n z$ и $m \leq n$. Проверим $xR_m z$.

- (1) Пусть $\langle m \rangle \varphi \in \Delta_x$ и $k \in [m, m(\Phi)]$. По (3) $n \in \ell(\Phi)$. Имеем тогда $\langle k \rangle \varphi, \langle n \rangle \varphi \in \Delta_y$ и, далее, $\varphi \in \Delta_z$ по (1). Если $k < n$, то $\langle k \rangle \varphi \in \Delta_z$ по (2). Если же $k \geq n$, то $\langle k \rangle \varphi \in \Delta_z$ по (1).
 (2) Как выше.
 (3) По (3) найдется $\langle m \rangle \varphi \in \Delta_z$ такая, что $\langle m \rangle \varphi \notin \Delta_y$, и $\langle m \rangle \varphi \notin \Delta_x$ по (2), если $m < n$, или по (1), если $m = n$.

2)

(j1₊) Пусть $xR_n^+ y$ и $yR_n^+ z$. Докажем $xR_n^+ z$.

- (1₊) $\langle m \rangle \varphi \in \Delta_x \Rightarrow \langle m \rangle \varphi \in \Delta_y \Rightarrow (\varphi \in \Delta_z \& \forall k \in [m, m(\Phi)] (\langle k \rangle \varphi \in \Delta_z))$ по (1₊).
 (2₊) Если $m < n$, то $\langle m \rangle \varphi \in \Delta_z \Rightarrow \langle m \rangle \varphi \in \Delta_y \Rightarrow \langle m \rangle \varphi \in \Delta_x$ по (2₊).
 (3₊) Очевидно.

(j2₊) Очевидно.

(j3₊) Пусть $xR_n^+ y$, $xR_m^+ z$ и $m < n$. Докажем $yR_m^+ z$.

- (1₊) Пусть $m' \leq m < n$. Тогда $\langle m' \rangle \varphi \in \Delta_y$ влечет $\langle m' \rangle \varphi \in \Delta_x$ по (2₊), откуда по (1₊) получаем $\varphi \in \Delta_z$ и $\forall k \in [m', m(\Phi)] (\langle k \rangle \varphi \in \Delta_z)$.
 (2₊) Если $m' < m < n$, то $\langle m' \rangle \varphi \in \Delta_z \Rightarrow \langle m' \rangle \varphi \in \Delta_x \Rightarrow \langle m' \rangle \varphi \in \Delta_y$ по (2₊) и (1₊).
 (3₊) Очевидно.

Утверждение следующей леммы выполнено для шкал $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^+$. Ввиду значительного сходства доказательств мы станем параллельно рассуждать об обеих шкалах, употребляя в “параллельных местах” обозначения $\mathcal{F}^{(+)}$ и $R_n^{(+)}$. Для каждой пропозициональной переменной p положим $\mathcal{F}^{(+)}, (\Gamma; \Delta) \Vdash p \Leftrightarrow p \in \Gamma$.

ЛЕММА 3.5. Пусть $\varphi \in \Phi$. Тогда $\mathcal{F}^{(+)}, (\Gamma; \Delta) \Vdash \varphi$ равносильно $\varphi \in \Gamma$ для всех $(\Gamma; \Delta) \in W$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по построению формулы φ . Пусть $\varphi = \top$. Тогда $\top \in \Gamma$ по лемме 3.1. Утверждение для случая переменной следует из определения.

Пусть $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$. Если $\varphi \in \Gamma$, то $\psi_1 \in \Gamma$ и $\psi_2 \in \Gamma$ в силу леммы 3.1. Используя предположение индукции, заключаем $(\Gamma; \Delta) \Vdash \psi_1 \wedge \psi_2$. Обратно. Предположим, что $\varphi \notin \Gamma$. Тогда по лемме 3.1 получаем $\varphi \in \Delta$, а затем $\psi_1 \in \Delta$ или $\psi_2 \in \Delta$. Без ограничения общности допустим $\psi_1 \in \Delta$. Отсюда $\psi_1 \notin \Gamma$. По предположению индукции это дает $(\Gamma; \Delta) \nVdash \psi_1$ и, следовательно, $(\Gamma; \Delta) \nVdash \varphi$.

Пусть $\varphi = \langle n \rangle \psi$. Предположим, что $(\Gamma; \Delta) \Vdash \langle n \rangle \psi$. Тогда существует пара $(\Gamma'; \Delta') \in W$ такая, что $(\Gamma'; \Delta') \Vdash \psi$ и $(\Gamma; \Delta) R_n^{(+)} (\Gamma'; \Delta')$. Допустим, что $\langle n \rangle \psi \notin \Gamma$. Тогда $\langle n \rangle \psi \in \Delta$ в силу леммы 3.1. Из определения $R_n^{(+)}$ следует, что $\psi \in \Delta'$. Отсюда $\psi \notin \Gamma'$. По предположению индукции это влечет $(\Gamma'; \Delta') \nVdash \psi$. Полученное противоречие доказывает, что $\langle n \rangle \psi \in \Gamma$.

В обратную сторону. Пусть $\langle n \rangle \psi \in \Gamma$. Достаточно указать пару $(\Gamma'; \Delta') \in W$ такую, что $(\Gamma'; \Delta') \Vdash \psi$ и $(\Gamma; \Delta) R_n^{(+)} (\Gamma'; \Delta')$. Положим $\Theta_1 = \{ \langle m \rangle \theta \mid \langle m \rangle \theta \in \Gamma, m < n \}$; $\Theta_2 = \{ \langle k \rangle \theta, \theta \mid \exists m \leq n (\langle m \rangle \theta \in \Delta \wedge k \in [m, m(\Phi)]) \}$. Мы утверждаем, что следующий вывод допустим в $\mathbf{GLP}_+^e$:

$$\frac{\Theta_1, \psi \leq \Theta_2, \langle n \rangle \psi}{\frac{\Theta_1, \langle n \rangle \psi \leq \{ \langle m \rangle \theta \mid \langle m \rangle \theta \in \Delta, m \leq n \}}{\Gamma \leq \Delta}}$$

Действительно, предположим, что $\Theta_1, \psi \leq \eta \in \Theta_2 \cup \{ \langle n \rangle \psi \}$ и разберем возможные случаи.

1) $\eta = \langle k \rangle \chi$, так что $\langle m \rangle \chi \in \Delta$ для некоторого $m \leq n$ и $k \geq m$; тогда

$$\bigwedge \Theta_1 \wedge \langle n \rangle \psi = \langle n \rangle \left(\bigwedge \Theta_1 \wedge \psi \right) \leq \langle n \rangle \langle k \rangle \chi \leq \langle m \rangle \langle m \rangle \chi \leq \langle m \rangle \chi \in \Delta;$$

2) $\eta = \chi$, так что $\langle m \rangle \chi \in \Delta$ для некоторого $m \leq n$; тогда

$$\bigwedge \Theta_1 \wedge \langle n \rangle \psi = \langle n \rangle \left(\bigwedge \Theta_1 \wedge \psi \right) \leq \langle n \rangle \chi \leq \langle m \rangle \chi \in \Delta;$$

3) $\eta = \langle n \rangle \psi$. Имеем $\Theta_1, \psi \leq \langle n \rangle \psi$. По лемме 2.3 этот случай невозможен.

Заключаем, что пара $(\Theta_1, \psi; \Theta_2, \langle n \rangle \psi)$ невыводима. По определению подходящего множества $\langle m \rangle \theta \in \Phi$ влечет $[m, m(\Phi)] \subseteq \ell(\Phi)$, поэтому эту пару можно дополнить до Φ -максимальной пары $(\Gamma'; \Delta') = (\Sigma_1, \Theta_1, \psi; \Theta_2, \langle n \rangle \psi, \Sigma_2)$. По предположению индукции $(\Gamma'; \Delta') \Vdash \psi$. Проверим, что $(\Gamma; \Delta) R_n^{(+)} (\Gamma'; \Delta')$.

Случай R_n^+ . Условия (1_+) , (3_+) , очевидно, выполнены.

(2_+) Допустим, что $\langle m \rangle \theta \in \Delta'$ для некоторого $m < n$. Тогда $\langle m \rangle \theta \in \Gamma$ или $\langle m \rangle \theta \in \Delta$ по лемме 3.1. Но в первом случае мы получим $\langle m \rangle \theta \in \Gamma'$, что противоречит невыводимости $(\Gamma'; \Delta')$.

Случай R_n . Условия (1)–(2) следуют из соответствующих условий для R_n^+ . Остается проверить (3). По лемме 3.1 из $\langle n \rangle \psi \in \Gamma$ следует $\langle n \rangle \psi \notin \Delta$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. Построенные модели являются *конечными* в следующем смысле:

- (1) множество точек конечно;
- (2) лишь конечное число отношений R_n (или R_n^+) непусты;
- (3) множество $\{p \in \text{Var} \mid y \Vdash p\}$ конечно для любой точки y .

Более того, $R_n^{(+)} \neq \emptyset$ влечет $n \leq m(\Phi)$.

ТЕОРЕМА 1. Для любых $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_+$ тогда и только тогда $\mathbf{GLP}_+^e \vdash \varphi \leq \psi$, когда в каждой (конечной) J_+ модели вынуждается $\varphi \rightarrow \psi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\varphi \not\leq \psi$. Рассматривая некоторое подходящее надмножество множества $\{\varphi, \psi\}$, строим J_+ -шкалу $\mathcal{F}^+$. Дополнив пару $(\varphi; \psi)$ до максимальной $(\Gamma'; \Delta')$, по леммам 3.5 и 3.1 получаем $\mathcal{F}^+, (\Gamma'; \Delta') \Vdash \bigwedge \Gamma$ и $\mathcal{F}^+, (\Gamma'; \Delta') \not\Vdash \bigvee \Delta$. Вместе с леммой 3.3 это дает требуемое.

Пусть $\theta \in \mathcal{L}$. Положим

$$L(\theta) = \bigwedge_{i < s} \bigwedge_{m_i < k_{ij} \leq m(\theta)} (\langle k_{ij} \rangle \theta_i \rightarrow \langle m_i \rangle \theta_i),$$

где $\langle m_i \rangle \theta_i$ для $i < s$ суть все подформулы θ вида $\langle m \rangle \eta$. Считаем также

$$L^+(\theta) = L(\theta) \wedge \bigwedge_{l \leq m(\theta)} [l]L(\theta).$$

ЛЕММА 3.7 [13]. Имеем $\mathbf{GLP} \vdash \theta \Leftrightarrow \mathbf{J} \vdash L^+(\theta) \rightarrow \theta$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_+$. Тогда $\mathbf{GLP} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ равносильно $\mathbf{GLP}_+^e \vdash \varphi = \psi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом леммы 2.1 достаточно установить импликацию слева направо. Предположим $\mathbf{GLP}_+^e \not\vdash \varphi \leq \psi$. Рассматривая некоторое подходящее надмножество Φ множества $\{\varphi, \psi\}$, строим J -шкалу $\mathcal{F}$. Дополнив пару $(\varphi; \psi)$ до максимальной $(\Gamma'; \Delta')$, по леммам 3.5 и 3.1 получаем $\mathcal{F}, (\Gamma'; \Delta') \Vdash \varphi$ и $\mathcal{F}, (\Gamma'; \Delta') \not\Vdash \psi$. Положив $\theta = \varphi \rightarrow \psi$, имеем $\mathcal{F}, (\Gamma'; \Delta') \not\Vdash \theta$.

Применим лемму 3.7. Замечаем, что $\mathcal{F} \Vdash L^+(\theta)$. Действительно, для каждой пары $(\Gamma, \Delta) \in W$ и формулы $\langle m_i \rangle \theta_i \in \text{SFm}(\theta) \subseteq \Phi$ имеем: из $\mathcal{F}, (\Gamma; \Delta) \Vdash \langle k \rangle \theta_i$ для некоторого $k \in (m_i, m(\theta)]$ по определению подходящего множества следует, что $\langle k \rangle \theta_i \in \Phi$ и, по лемме 3.5, $\langle k \rangle \theta_i \in \Gamma$. Отсюда $\langle m_i \rangle \theta_i \in \Gamma$ по лемме 3.1 и $\mathcal{F}, (\Gamma; \Delta) \Vdash \langle m_i \rangle \theta_i$ по лемме 3.5.

Таким образом, имеем $\mathcal{F}, (\Gamma'; \Delta') \not\Vdash L^+(\theta) \rightarrow \theta$. Согласно лемме 3.2 это дает $\mathbf{J} \vdash L^+(\theta) \rightarrow \theta$, откуда $\mathbf{GLP} \not\vdash \theta$.

Итак, мы установили консервативность логики $\mathbf{GLP}$ над исчислением $\mathbf{GLP}_+^e$ и доказали, что это исчисление аксиоматизирует фрагмент $\mathbf{GLP}_+$.

4. Случай одной модальности. Определим исчисление $\mathbf{K4}_+^e$ в языке $\mathcal{L}_+(0)$ со связками $\top$, $\wedge$ и $\Diamond$: для этого в определении системы $\mathbf{GLP}_+^e$ ограничимся аксиомой и правилами для $=$, а также неравенствами (1)–(6); всюду в последних положим $n = 0$ и отождествим $\Diamond$ с $\langle 0 \rangle$. Для всякой мономодальной логики $\mathbf{L}$ определим ее позитивный фрагмент $\mathbf{L}_+ = \{\varphi = \psi \mid \mathbf{L} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \text{ и } \varphi, \psi \in \mathcal{L}_+(0)\}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathbf{L}$ есть произвольная логика, промежуточная между $\mathbf{K4}$ и $\mathbf{GL}$. Тогда $\mathbf{L}_+$ аксиоматизируется системой $\mathbf{K4}_+^e$.

Очевидно, что $\mathbf{K4}_+^e \vdash \varphi = \psi$ влечет $\varphi = \psi \in \mathbf{L}_+$. В другую сторону. Рассуждаем по аналогии с доказательством леммы 3.5, внося очевидные изменения. Для любого конечного подходящего множества $\Phi \subset \mathcal{L}_+(0)$ мы рассматриваем (конечное) множество W Φ -максимальных пар $(\Gamma; \Delta)$, невыводимых в смысле $\mathbf{K4}_+^e$. Определим отношение $R \subseteq W^2$. Полагаем $(\Gamma; \Delta)R(\Gamma'; \Delta')$ тогда и только тогда, когда

- 1) $\Diamond\varphi \in \Delta \Rightarrow \Diamond\varphi, \varphi \in \Delta'$,
- 2) $\exists\varphi(\Diamond\varphi \in \Delta' \& \Diamond\varphi \notin \Delta)$.

Для каждой пропозициональной переменной p положим $\mathcal{F}^{(+)}, (\Gamma; \Delta) \Vdash p \Leftrightarrow p \in \Gamma$ и установим следующую лемму.

ЛЕММА 4.1. Пусть $\varphi \in \Phi$. Тогда $\mathcal{F}, (\Gamma; \Delta) \Vdash \varphi$ равносильно $\varphi \in \Gamma$ для всех $(\Gamma; \Delta) \in W$.

Заимствуя прочие рассуждения из доказательства леммы 3.5, покажем, что если $\Diamond\psi \in \Gamma$, то найдется пара $(\Gamma'; \Delta') \in W$ такая, что $(\Gamma'; \Delta') \Vdash \psi$ и $(\Gamma; \Delta)R(\Gamma'; \Delta')$.

Положим $\Theta = \{\Diamond\theta, \theta \mid \Diamond\theta \in \Delta\}$. Мы утверждаем, что следующий вывод допустим в $\mathbf{K4}_+^e$:

$$\frac{\psi \leq \Theta, \Diamond\psi}{\frac{\Diamond\psi \leq \{\Diamond\theta \mid \Diamond\theta \in \Delta\}}{\Gamma \leq \Delta}}$$

Действительно, предположим, что $\psi \leq \eta \in \Theta \cup \{\Diamond\psi\}$. Если $\eta = \Diamond\chi \in \Delta$, то $\Diamond\psi \leq \Diamond\Diamond\chi \leq \Diamond\chi \in \Delta$. Если $\eta = \chi$, так что $\Diamond\chi \in \Delta$, то $\Diamond\psi \leq \Diamond\chi \in \Delta$. Наконец, пусть $\eta = \Diamond\psi$. Тогда $\mathbf{K4}_+^e \vdash \psi \leq \Diamond\psi$ и, тем более, $\mathbf{GL} \vdash \psi \rightarrow \Diamond\psi$. С помощью аксиомы Лёба отсюда легко получить $\mathbf{GL} \vdash \neg\Diamond\psi$. Используя хорошо известную теорему о полноте $\mathbf{GL}$ [14] относительно класса нетеровых транзитивных шкал Крипке, мы, однако, можем построить для всякой формулы $\theta \in \mathcal{L}_+(0)$ модель, где θ истинна в некоторой точке (например, можно рассмотреть транзитивное замыкание конечного дерева $T(\theta)$, определенного ниже), и опровергнуть таким образом допущение $\mathbf{GL} \vdash \neg\theta$. Следовательно, случай $\eta = \Diamond\psi$ невозможен.

Закключаем, что пара $(\psi; \Theta, \Diamond\psi)$ невыводима. По определению подходящего множества эту пару можно дополнить до Φ -максимальной пары $(\Gamma'; \Delta')$. По предположению индукции $(\Gamma'; \Delta') \Vdash \psi$. Из построения и свойств максимальных пар (аналог леммы 3.1) вытекает $(\Gamma; \Delta)R(\Gamma'; \Delta')$.

Теперь предположим, что $\mathbf{K4}_+^e \not\vdash \varphi \leq \psi$. Из множества подформул φ и ψ образуем подходящее множество Φ , строим шкалу $\mathcal{F} = (W, R)$ и дополняем пару $(\varphi; \psi)$ до Φ -максимальной пары $(\Gamma; \Delta) \in W$. Лемма 4.1 дает $\mathcal{F}, (\Gamma; \Delta) \not\Vdash \varphi \rightarrow \psi$. Легко видеть, что шкала $\mathcal{F}$ нетерова и транзитивна. Отсюда по теореме о полноте $\mathbf{GL}$ заключаем $\mathbf{GL} \not\vdash \varphi \rightarrow \psi$. Окончательно, имеем $\mathbf{L} \not\vdash \varphi \rightarrow \psi$.

5. Сложность фрагмента $\mathbf{GLP}_+$. Покажем, что позитивный фрагмент $\mathbf{GLP}_+$ разрешим за полиномиальное время. Для этого мы сведем неравенство $\varphi \leq \psi$ к вынуждению формулы ψ в J_+ -модели, связанной с деревом, представляющим формулу φ .

Всюду ниже рассматриваются лишь конечные (в смысле замечания 3.6) модели Крипке вида $M = (V, \{R_n\}_{n \in \omega}, \Vdash)$. Для моделей M и M' назовем отображение $\rho: V \rightarrow V'$ *вложением M в M'* , если (1) $x \Vdash p \Rightarrow \rho(x) \Vdash' p$ и (2) $xR_n y \Rightarrow \rho(x)R'_n \rho(y)$ для любых $x, y \in V$, $n \in \omega$ и $p \in \text{Var}$. Если ρ является вложением, будем писать $M \xrightarrow{\rho} M'$.

ЛЕММА 5.1. Пусть $\varphi \in \mathcal{L}_+$ и $M \xrightarrow{p} M'$. Тогда $M, x \models \varphi$ влечет $M', \rho(x) \models \varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по построению формулы φ .

Мы будем рассматривать J_+ -модели как частный случай ориентированных графов с размеченными ребрами и вершинами. Назовем *ро-графом* тройку $G = (V, R, B)$, где

- (1) V есть непустое конечное множество;
- (2) $R: V^2 \rightarrow \omega \cup \{-1\}$;
- (3) $B: V \rightarrow 2^{\text{Var}}$;
- (4) множество $B(V)$ конечно.

Определив множество ребер $E = \{(x, y) \mid R(x, y) \geq 0\}$, будем толковать G как ориентированный граф с размеченными ребрами и вершинами. Если ро-граф содержит вершину r такую, что для всякой вершины $x \neq r$ существует единственный (ориентированный) путь из r в x , то граф называется *ро-деревом с корнем r* . Ясно, что неориентированный вариант любого ро-дерева является деревом.

Пусть задан ро-граф $G = (V, R, B)$. Для всех $n \in \omega$ определим отношения $R_n \subseteq V^2$:

$$xR_n y \iff \exists k \geq n R(x, y) = k$$

и положим $x \models p \iff p \in B(x)$. Полученную модель $(V, \{R_n\}, \models)$ обозначим $M(G)$. Для произвольной модели M положим

$$R(x, y) = \max\{-1, n \mid xR_n y\}, \quad B(x) = \{p \mid x \models p\}$$

и получим ро-граф $G(M) = (V, R, B)$.

Назовем ро-граф G *насыщенным*, если он удовлетворяет следующим условиям для всех $x, y, z \in V$ и $n, m \in \omega$:

- (T) $R(x, y) = n \& R(y, z) = m \Rightarrow R(x, z) \geq \min(m, n)$;
- (J) $R(x, y) = n \& R(x, z) = m \Rightarrow R(y, z) \geq \min(m, n - 1)$.

ЛЕММА 5.2. Для всякого насыщенного ро-графа G модель $M(G)$ есть J_+ -модель и $G(M(G)) = G$. Обратно, для всякой J_+ -модели M ро-граф $G(M)$ насыщен и $M(G(M)) = M$.

Всякой формуле $\varphi \in \mathcal{L}_+$ поставим в соответствие следующее ро-дерево $T(\varphi) = (V, R, B)$ с корнем r :

- если $\varphi = \top$, то $T(\varphi) = (\{r\}, \emptyset, \{(r, \emptyset)\})$;
- если $\varphi = p \in \text{Var}$, то $T(\varphi) = (\{r\}, \emptyset, \{(r, \{p\})\})$;
- если $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$, склеиваем корни: $V = (V_1 \sqcup V_2 \sqcup \{r\}) \setminus \{r_1, r_2\}$,

$$R = R_1|_{V_1 \setminus \{r_1\}} \cup R_2|_{V_2 \setminus \{r_2\}} \cup \{(r, y), n \mid R_1(r_1, y) = n \vee R_2(r_2, y) = n\},$$

$$B = B_1|_{V_1 \setminus \{r_1\}} \cup B_2|_{V_2 \setminus \{r_2\}} \cup \{(r, B_1(r_1) \cup B_2(r_2))\},$$

то полагаем $T(\varphi) = (V, R, B)$;

- если $\varphi = \langle n \rangle \varphi_1$, то $T(\varphi) = (V_1 \sqcup \{r\}, R_1 \cup \{(r, r_1), n\}, B_1 \cup \{(r, \emptyset)\})$.

ЛЕММА 5.3. Для любых модели M' и формулы $\varphi \in \mathcal{L}_+$

- 1) $M(T(\varphi)), r \models \varphi$, где r есть корень ро-дерева $T(\varphi)$.
- 2) если $M', x \models \varphi$ для некоего $x \in V'$, то существует вложение ρ такое, что $M(T(\varphi)) \xrightarrow{p} M'$ и $\rho(r) = x$ для корня r ро-дерева $T(\varphi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для п. 1) проведем индукцию по построению φ с учетом леммы 5.1: замечаем, что $M(T(\psi_1))$ вкладывается в $M(T(\psi_1 \wedge \psi_2))$ и в $M(T(\langle n \rangle \psi_1))$. Докажем п. 2). Индукция по построению φ . Пусть $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$. Тогда по предположению индукции существуют вложения ρ_1 модели $M(T(\psi_1))$ и ρ_2 модели $M(T(\psi_2))$ в M' , причем $\rho_1(r_1) = \rho_2(r_2) = x$. Полагаем $\rho = \rho_1|_{V_1 \setminus \{r_1\}} \cup \rho_2|_{V_2 \setminus \{r_2\}} \cup \{(r, x)\}$. Свойства вложения следуют из определения $T(\psi_1 \wedge \psi_2)$. В случае $\varphi = \langle n \rangle \psi_1$ имеем вложение ρ_1 модели $M(T(\psi_1))$ в M' такое, что $\rho_1(r_1) = y$ и $xR'_n y$. Полагаем $\rho = \rho_1 \cup \{(r, x)\}$.

Если для ро-графов G и G' верно

- (1) $V = V'$;
- (2) $\forall x, y \in V \ R(x, y) \leq R'(x, y)$;
- (3) $B = B'$,

то будем писать $G \preceq G'$. Назовем G' *наименьшей насыщенной мажорантой* (ННМ) ро-графа G , если

- (1) $G \preceq G'$;
- (2) G' насыщен;
- (3) для любого насыщенного ро-графа G'' из $G \preceq G''$ следует $G' \preceq G''$.

ЛЕММА 5.4. Для всякого ро-графа G существует и единственна ННМ $\tilde{G}$.

Единственность очевидна. В доказательстве леммы 5.7 будет указан алгоритм, позволяющий построить ННМ для произвольного ро-графа.

ЛЕММА 5.5. Для произвольных ро-графов G, G' и J_+ -модели M'

- 1) если $G \preceq G'$, то $M(G) \xrightarrow{\text{id}_V} M(G')$;
- 2) пусть $M(G) \xrightarrow{\rho} M'$ для некоторого ρ ; тогда $M(\tilde{G}) \xrightarrow{\rho} M'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение очевидно. Докажем 2). Пусть $M(G) = (V, \{R_n\}, \models)$. Положим $xR''_n y \Leftrightarrow \rho(x)R'_n \rho(y)$ и рассмотрим $M'' = (V, \{R''_n\}, \models)$. Легко убедиться, что M'' есть J_+ -модель и $M'' \xrightarrow{\rho} M'$. По лемме 5.2 ро-граф $G'' = G(M'')$ насыщен, причем, очевидно, $G \preceq G''$. По определению ННМ $\tilde{G} \preceq G''$. Тогда из 1) вытекает

$$M(\tilde{G}) \xrightarrow{\text{id}_V} M(G(M'')) = M''.$$

ЛЕММА 5.6. Пусть даны формулы $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_+$. Тогда $\mathbf{GLP}_+^e \vdash \varphi \leq \psi$ равносильно $M(\tilde{T}(\varphi)), r \models \psi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 $\varphi \leq \psi$ равносильно вынуждению формулы $\varphi \rightarrow \psi$ во всех J_+ -моделях. Из леммы 5.3 вытекает, что $M(\tilde{T}(\varphi)), r \models \varphi$ для корня r дерева $T(\varphi)$. Если $M(\tilde{T}(\varphi)), r \not\models \psi$, то мы нашли контрмодель для $\varphi \rightarrow \psi$, и $\varphi \not\leq \psi$. Пусть теперь $M(\tilde{T}(\varphi)), r \models \psi$. Предположим $M', x \models \varphi$ для некоторой точки x некоторой J_+ -модели M' . Тогда по леммам 5.3 и 5.5 $M(\tilde{T}(\varphi))$ вкладывается в M' , причем r переходит в x . Значит, $M', x \models \psi$ по лемме 5.1. Таким образом, $M' \models \varphi \rightarrow \psi$ для каждой J_+ -модели M' . Отсюда $\varphi \leq \psi$.

Теперь мы укажем алгоритм проверки $M(\tilde{T}(\varphi)), r \models \psi$ для данных φ, ψ и получим оценку его сложности.

ЛЕММА 5.7. Для каждого ро-графа $G = (V, R, B)$ можно построить ННМ $\tilde{G}$ за время $O(MN^5)$, где $N = |V|$ и $M = \max R(V^2)$.

Пусть $V = \{x_1, \dots, x_N\}$. Представим ро-граф G с помощью матрицы смежности $(m_{ij})_{i,j \in [1,N]}$, где $m_{ij} = R(x_i, x_j)$. Рассмотрим следующий алгоритм $\mathcal{A}$:

- 1) $(m_{ij}^0) := (m_{ij})$; $a := 0$;
- 2) $(m_{ij}^{a+1}) := (m_{ij}^a)$;
- 3) для всех $(i, j, k) \in [1, N]^3$
 - (T) если $m_{ij}^a = n$ и $m_{jk}^a = m$, то $m_{ik}^{a+1} := \max(\min(m, n), m_{ik}^{a+1})$;
 - (J) если $m_{ij}^a = n$ и $m_{ik}^a = m$, то $m_{jk}^{a+1} := \max(\min(m, n-1), m_{jk}^{a+1})$;
- 4) если $(m_{ij}^a) = (m_{ij}^{a+1})$, то $A := a$ и завершаем алгоритм;
- 5) $a := a + 1$; переходим к шагу 2.

Из описания алгоритма легко усматривается следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Имеем*

- 1) $m_{ij}^0 \leq m_{ij}^a \leq \max\{m_{ij}^0 \mid i, j \in [1, N]\} = M$;
- 2) если $a < a'$, то $m_{ij}^a \leq m_{ij}^{a'}$ для всех $i, j \in [1, N]$;
- 3) если $a < a' \leq A$, то $m_{ij}^a < m_{ij}^{a'}$ для некоторых $i, j \in [1, N]$.

Пункты 1)–3) обеспечивают завершение алгоритма после конечного числа шагов. Матрица смежности (m_{ij}^A) и разметка вершин B задают некоторый граф G' . Легко видеть, что он насыщен и $G \preceq G'$. Докажем, что $G' = \tilde{G}$. Предложим, что ро-граф G'' насыщен и $G \preceq G''$. Пусть для всех $a \in [0, A]$ матрица (m_{ij}^a) совместно с разметкой B задает ро-граф G_a . Из утверждения следует

$$G = G_0 \preceq G_1 \preceq \dots \preceq G_A = G'.$$

Допустим, что $G_{c+1} \not\preceq G''$ для некоторого $c \in [0, A]$ и возьмем наименьшее такое c . Тогда найдутся i, j такие, что $m_{ij}^{c+1} > R''(x_i, x_j)$ и $m_{ij}^c \leq R''(x_i, x_j)$. Это значит, что на шаге c значение на паре (i, j) было увеличено применением (J) или (T). В первом случае для некоторого k имеем

$$R''(x_i, x_j) < m_{ij}^{c+1} = \min(m_{kj}^c, m_{ki}^c - 1) \leq \min(R''(x_k, x_j), R''(x_k, x_i) - 1),$$

что противоречит насыщенности G'' . Аналогично приходим к противоречию и во втором случае. Заключаем, что $G_a \preceq G''$ для всех $a \in [0, A]$; в частности, $G' \preceq G''$. Поэтому G' есть ННМ ро-графа G .

Остается получить требуемую оценку времени выполнения алгоритма $\mathcal{A}$. Из п. 1) утверждения 1 видно, что возможно не более $(M+1)N^2$ различных матриц (m_{ij}^a) , соответствующих итерациям внешнего цикла $\mathcal{A}$. С помощью п. 3) утверждения 1 заключаем, что $A = O(MN^2)$. Так как каждая итерация выполнима за время $O(N^3)$, получаем желаемую оценку $O(MN^5)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.8. Можно показать, что для произвольного ро-графа $G = (V, R, B)$ ННМ строится за время $O(|R(V^2)| \cdot |V|^7)$, а следовательно, и за $O(|V|^9)$.

Определим сложность $|\varphi|$ позитивной формулы φ как ее длину в алфавите $\text{Var} \cup \{\top, \wedge\} \cup \{\langle n \rangle\}_{n \in \omega}$.

Оценка, полученная в лемме 5.7, зависит от $M = \max R(V^2)$, в частности, в случае применения алгоритма $\mathcal{A}$ к ро-графу $T(\varphi)$ – от $M = m(\varphi)$. Однако, для решения вопроса о выводимости импликации $\varphi \leq \psi$ мы сможем, по существу, избавиться от этой зависимости, отобразив номера всех модальностей формул φ, ψ в начальный

отрезок ω длиной не более $|\varphi| + |\psi|$. При этом получатся формулы φ^* , ψ^* , для которых мы установим $\varphi \leq \psi \Leftrightarrow \varphi^* \leq \psi^*$ (лемма 5.12). В случае позитивного фрагмента логики **J** семантическое доказательство этого утверждения, опирающееся на лемму 3.2, было бы несложно, однако для **GLP**₊ вследствие принципа монотонности мы не можем непосредственно использовать теорему 1, но должны прежде доказать ряд вспомогательных утверждений.

В ро-графе $G = (V, R, B)$ путь p между двумя вершинами называется n -путем, если $R(e) \geq n$ для всякого ребра $e \in p$. Скажем, что в G существует n -обход пары вершин (x, y) , если найдется вершина $z \in V$ такая, что существуют n -пути из z в x и из z в y , причем последний содержит хотя бы одно ребро.

ЛЕММА 5.9. Пусть G является ро-деревом и к нему применен алгоритм $\mathcal{A}$ из доказательства леммы 5.7. Тогда для любого a , если $R_{G_a}(x, y) = n \geq 0$, то в G существует n -обход пары вершин (x, y) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $R_a = R_{G_a}$ и проведем индукцию по a . В случае $G_0 = G$ в качестве обхода можно взять ребро (x, y) . Пусть наше утверждение установлено для всех $b < a$ и $R_a(x, y) = n \geq 0$. Ясно, что либо $R_0(x, y) = n$ и все доказано, либо значение R на паре (x, y) возросло вследствие применения операций (T) или (J) . Допустим, что последнее увеличение произошло на шаге $b + 1 \leq a$ после применения (J) . Тогда найдется $z \in V$ такая, что $n = \min(R_b(z, y), R_b(z, x) - 1)$. По предположению индукции в G существует $R_b(z, x)$ -обход (z, x) и $R_b(z, y)$ -обход (z, y) . Однако тогда в ро-дереве G имеются два пути с общим концом z , что возможно, лишь если один из этих путей является надпутем другого. Ясно, что из начала w этого надпути в G проходят содержащие не менее чем по одному ребру $\min(R_b(z, x), R_b(z, y))$ -пути в вершины x и y , очевидно, образующие искомый n -обход. Случай (T) рассматривается аналогично.

Для произвольного множества $\Sigma \subseteq \omega$ функция $\sigma: \{-1\} \cup \omega \rightarrow \{-1\} \cup \omega$ такая, что $\sigma|_{\bar{\Sigma}} = \text{id}_{\bar{\Sigma}}$ и $\sigma|_{\Sigma}$ строго возрастает и неотрицательна на множестве Σ , называется Σ -разрежением. Положим $G^\sigma = (V, \sigma \circ R, B)$ для произвольного ро-графа $G = (V, R, B)$.

ЛЕММА 5.10. Пусть $R_G(V^2) \subseteq \Sigma$ для ро-дерева G и Σ -разрежения σ . Тогда $R_{\tilde{G}}(x, y) \geq t \in \Sigma$ влечет $R_{\tilde{G}^\sigma}(x, y) \geq \sigma(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим алгоритм $\mathcal{A}$ из доказательства леммы 5.7 и применим его к ро-графу G , получая на промежуточных шагах ро-графы G_a с матрицами (m_{ij}^a) . Считаем, что ро-граф $\tilde{G}^\sigma$ имеет матрицу (M_{ij}) . Достаточно показать, что для всех i, j , a и всех $t \in \Sigma$, если $m_{ij}^a \geq t$, то $M_{ij} \geq \sigma(t)$.

Проведем индукцию по a . Имеем $M_{ij} \geq M_{ij}^0 = \sigma(m_{ij}^0) \geq \sigma(t)$, так как $m_{ij}^0 \in \Sigma$. Пусть $m_{ij}^{a+1} \geq t$. Тогда $m_{ij}^a \geq t$, откуда по предположению индукции $M_{ij} \geq \sigma(t)$, или же $m_{ij}^{a+1} \geq t > m_{ij}^a$ и на $a + 1$ -м шаге m_{ij}^a было увеличено применением операций (T) и (J) . Рассмотрим ту из операций, которая последней привела к росту m_{ij}^{a+1} в цикле (3). В случае (T) имеем $t \leq m_{ij}^{a+1} = \min(m_{ik}^a, m_{kj}^a)$ для некоторого k , но тогда условие (T) насыщенности ро-графа $\tilde{G}^\sigma$ и предположение индукции обеспечат $M_{ij} \geq \min(M_{ik}, M_{kj}) \geq \sigma(t)$. В случае (J) получаем $t \leq m_{ij}^{a+1} = \min(m_{kj}^a, m_{ki}^a - 1)$ для некоторого k . Имеем $m_{kj}^a \geq t$ и $m_{ki}^a > t$. По предположению индукции $M_{kj} \geq \sigma(t)$.

Применив лемму 5.9 к G_a , получаем, что в G существует m_{ki}^a -обход пары вершин (x_k, x_i) с началом в вершине x_l . В этом обходе все ребра помечены элементами Σ , большими t . Значит, в ро-графе G^σ ему соответствует s -обход пары (x_k, x_i) с началом x_l такой, что $s > \sigma(t)$. Поскольку $G^\sigma \preceq \tilde{G}^\sigma$, этот s -обход сохраняется и в $\tilde{G}^\sigma$. Обозначим его B .

Присоединим к содержащемуся в B s -пути из x_l в x_k ребро (x_k, x_j) и получим $\sigma(t)$ -путь P_1 из x_l в x_j в ро-графе $\tilde{G}^\sigma$. Многократно применяя условие насыщенности (T) к ребрам P_1 , имеем $M_{lj} \geq \sigma(t)$. Поступив аналогично с содержащимся в B s -путем P_2 из вершины x_l в x_i , который по определению обхода содержит хотя бы одно ребро, заключаем $M_{li} \geq s > \sigma(t)$. Окончательно, по условию насыщенности (J) получаем $M_{ij} \geq \sigma(t)$.

ЛЕММА 5.11. *Для произвольных Σ -разрежения σ , ро-дерева G и формулы $\varphi \in \mathcal{L}_+$ такой, что $\ell(\varphi) \subseteq \Sigma$, для любой $x \in V$ равносильны $M(\tilde{G}), x \Vdash \varphi$ и $M(\tilde{G}^\sigma), x \Vdash \varphi^\sigma$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукцией по построению φ докажем импликацию слева направо. Не тривиален лишь случай модальности: $\varphi = \langle n \rangle \psi$. Допустим $M(\tilde{G}), x \Vdash \langle n \rangle \psi$. Тогда для некоторой вершины $y \in V$ имеем $R_{\tilde{G}}(x, y) \geq n$ и $M(\tilde{G}), y \Vdash \psi$. По лемме 5.10 получаем $R_{\tilde{G}^\sigma}(x, y) \geq \sigma(n)$, а предположение индукции дает $M(\tilde{G}^\sigma), y \Vdash \psi^\sigma$. Отсюда $M(\tilde{G}^\sigma), x \Vdash \langle \sigma(n) \rangle \psi^\sigma$.

Чтобы получить импликацию справа налево, достаточно рассмотреть Σ' -разрежение σ' такое, что $\Sigma' = \sigma(\Sigma)$ и $\sigma'|_{\Sigma'} = (\sigma|_{\Sigma})^{-1}$. Очевидно, $(G^\sigma)^{\sigma'} = G$ и $(\varphi^\sigma)^{\sigma'} = \varphi$.

ЛЕММА 5.12. *Для произвольных Σ -разрежения σ и позитивных формул φ, ψ таких, что $\ell(\varphi \wedge \psi) \subseteq \Sigma$, равносильны $\mathbf{GLP}_+^e \vdash \varphi \leq \psi$ и $\mathbf{GLP}_+^e \vdash \varphi^\sigma \leq \psi^\sigma$.*

Легко видеть, что $T(\varphi^\sigma) = (T(\varphi))^\sigma$. Далее применяем леммы 5.6 и 5.11.

ЛЕММА 5.13. *Для всякой формулы $\varphi \in \mathcal{L}_+$ ро-дерево $T(\varphi)$ можно построить за время $O(|\varphi|^3)$, причем $|V| = O(|\varphi|)$, $R(V^2) = \ell(\varphi)$ и $|B(V)| = O(|\varphi|)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим список всех подформул φ , упорядоченных по сложности. Такой список длины $O(|\varphi|)$ можно получить за время $O(|\varphi|^2)$: за время $O(|\varphi|)$ находим главную связку φ вместе со сложностью соответствующих подформул и заносим последние в список; аналогично поступаем с каждой из $O(|\varphi|)$ подформул. Сортировка списка выполнима за время $O(|\varphi|^2)$.

Начиная с подформул наименьшей сложности, строим матрицы смежности и таблицы значений B в соответствии с определением $T(\varphi)$. Например, для $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ берем матрицу

$$\begin{pmatrix} M_1 & -1 \\ -1 & M_2 \end{pmatrix};$$

добавляем снизу строку – конкатенацию r_1 -й строки M_1 и r_2 -й строки M_2 ; удаляем строки и столбцы для r_1 и r_2 ; добавляем справа столбец, где всюду стоят -1 . Принимая размер каждой из матриц M_i за $O(|\varphi|^2)$, мы можем проделать описанное за время $O(|\varphi|^2)$. Для B объединяем таблицы значений B_1 и B_2 в некорневых точках, размером $O(|\varphi|^2)$ каждая, а $B(r)$ получаем слиянием списков $B_1(r_1)$ и $B_2(r_2)$ за время $O(|\varphi|^2)$. Выполняя такие операции для всех $O(|\varphi|)$ подформул, получаем требуемую оценку.

ЛЕММА 5.14. Пусть заданы формула $\varphi \in \mathcal{L}_+$, ро-граф G такой, что $|B(y)| \leq |V|$ для всех $y \in V$, и некоторая точка $x \in V$. Тогда свойство $M(G), x \Vdash \varphi$ разрешимо за время $O(|\varphi||V|^2 + |\varphi|^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Укажем требуемый алгоритм. Пусть $V = \{x_i\}$ и G задан матрицей смежности (m_{ij}) . Построим список всех подформул φ , упорядоченных по сложности. Как и в лемме 5.13, его можно получить за время $O(|\varphi|^2)$. Для каждой подформулы ψ , начиная с подформул наименьшей сложности, построим множество $L_\psi \subseteq V$ следующим способом:

- (1) $L_\top := V$;
- (2) $L_p := \{x \mid B(x_i) \in p\}$;
- (3) $L_{\psi_1 \wedge \psi_2} := L_{\psi_1} \cup L_{\psi_2}$;
- (4) $L_{\langle n \rangle \psi_1} := \{x_i \mid m_{ij} \geq n \text{ и } x_j \in L_{\psi_1}\}$.

Для любой ψ множество L_ψ строится за время $O(|V|^2)$ с использованием уже построенных множеств для подформул меньшей сложности. Действительно, в п. 2 мы производим поиск p в таблице значений B размером $O(|V|^2)$; в п. 3 можно проверять для всех элементов одного множества, входят ли они в другое; для п. 4 мы можем последовательно просмотреть $|L_{\psi_1}| \leq |V|$ столбцов (m_{ij}) , каждый из которых содержит $|V|$ элементов. Поскольку всего имеется не более $|\varphi|$ подформул, то возможно построить все наши множества за время $O(|\varphi||V|^2)$. Индукцией по построению ψ легко установить, что $M(G), x_i \Vdash \psi \Leftrightarrow x_i \in L_\psi$. Поэтому исходная задача сводится к проверке $x \in L_\varphi$.

Для произвольного Σ -разрежения σ определим φ^σ индукцией по построению позитивной формулы φ :

- (0) $\top^\sigma = \top, p^\sigma = p$;
- (1) $(\psi \wedge \theta)^\sigma = \psi^\sigma \wedge \theta^\sigma$;
- (2) $(\langle n \rangle \psi)^\sigma = \langle \sigma(n) \rangle \psi^\sigma$.

ТЕОРЕМА 4. Множество $\mathbf{GLP}_+$ разрешимо за время $O(N^6)$, где $N = |\varphi| + |\psi|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть заданы формулы $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_+$ и требуется проверить $(\varphi = \psi) \in \mathbf{GLP}_+$. Согласно теореме 2 задача сводится к проверке выводимости неравенств $\varphi \leq \psi$ и $\psi \leq \varphi$ в системе $\mathbf{GLP}_+^e$. Будем рассматривать первое неравенство.

Положим $\Sigma = \ell(\varphi \wedge \psi)$ и определим Σ -разрежение σ так: $\sigma|_\Sigma(n) = |\{m \in \Sigma \mid m \leq n\}|$. Получаем по лемме 5.12, что $\varphi \leq \psi$ равносильно $\varphi^\sigma \leq \psi^\sigma$. При этом $m(\varphi^\sigma \wedge \psi^\sigma) = |\ell(\varphi \wedge \psi)|$, $|\varphi^\sigma| = |\varphi|$ и $|\psi^\sigma| = |\psi|$. В свою очередь, согласно лемме 5.6 $\varphi^\sigma \leq \psi^\sigma$ равносильно $M(\tilde{T}(\varphi^\sigma)), r \Vdash \psi^\sigma$ для корня r дерева $T(\varphi^\sigma)$.

Проверим последнее утверждение за требуемое время. Формулы φ^σ и ψ^σ строятся за $O(N^2)$: сортируем Σ . Для формулы φ^σ за время $O(N^3)$ построим ро-дерево $T(\varphi^\sigma) = (V, R, B)$ с корнем r по лемме 5.13, так что $|V| = O(N)$, $R(V^2) = \ell(\varphi^\sigma)$ и $|B(V)| = O(N)$, а затем, поскольку $m(\varphi^\sigma) \leq m(\varphi^\sigma \wedge \psi^\sigma) = |\ell(\varphi \wedge \psi)| \leq N$, по лемме 5.7 построим насыщенный ро-граф $\tilde{T}(\varphi^\sigma)$ за время $O(N^6)$. Наконец, проверяем $M(\tilde{T}(\varphi^\sigma)), r \Vdash \psi^\sigma$ за время $O(N^3)$, используя лемму 5.14.

Автор признателен своему научному руководителю чл.-корр. РАН Л.Д. Беклемишеву за постоянное внимание к этой работе и ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. D. Beklemishev, “Provability algebras and proof-theoretic ordinals, I”, *Ann. Pure Appl. Logic*, **128**:1-3 (2004), 103–123.
- [2] Г. К. Джапаридзе, *Модально-логические средства исследования доказуемости*, Дис. ... канд. филос. наук, МГУ, М., 1986.
- [3] K. N. Ignatiev, “On strong provability predicates and the associated modal logics”, *J. Symbolic Logic*, **58**:1 (1993), 249–290.
- [4] L. D. Beklemishev, “The Worm Principle”, *Logic Colloquium '02*, Lect. Notes Log., **27**, Assoc. Symbol. Logic, La Jolla, CA, 2006, 75–95.
- [5] I. Shapировsky, “PSPACE-decidability of Japaridze’s polymodal logic”, *Advances in Modal Logic*, Vol. 7, College Publ., London, 2008, 289–304.
- [6] J. Dunn, “Positive modal logic”, *Studia Logica*, **55**:2 (1995), 301–317.
- [7] S. Celani, R. Jansana, “A new semantics for positive modal logic”, *Notre Dame J. Formal Logic*, **38**:1 (1997), 1–18.
- [8] F. Baader, S. Brandt, C. Lutz, “Pushing the $\mathcal{EL}$ envelope”, *Proceedings of the Nineteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence IJCAI-05*, Morgan-Kaufmann Publ., Edinburgh, 2005, 364–369.
- [9] F. Baader, S. Brandt, C. Lutz, “Pushing the $\mathcal{EL}$ envelope further”, *Proceedings of the OWLED 2008 DC Workshop on OWL: Experiences and Directions*, 2008.
- [10] A. Kurucz, F. Wolter, M. Zakharyashev, “Islands of tractability for relational constraints: towards dichotomy results for the description logic $\mathcal{EL}$ ”, *Advances in Modal Logic*, Vol. 8, College Publ., London, 2010, 271–291.
- [11] V. Sofronie-Stokkermans, “Locality and subsumption testing in $\mathcal{EL}$ and some of its extensions”, *Advances in Modal Logic*, Vol. 7, College Publ., London, 2008, 315–339.
- [12] L. D. Beklemishev, J. J. Joosten, M. Vervoort, “A finitary treatment of the closed fragment of Japaridze’s provability logic”, *J. Logic Comput.*, **15**:4 (2005), 447–463.
- [13] L. D. Beklemishev, “Kripke semantics for provability logic GLP”, *Ann. Pure Appl. Logic*, **161**:6 (2010), 756–774.
- [14] A. Chagrov, M. Zakharyashev, *Modal Logic*, Oxford Logic Guides, **35**, Clarendon Press, Oxford, 1997.

Е. В. Дашков

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: edashkov@gmail.com

Поступило

24.04.2011

Исправленный вариант

17.07.2011