Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Яшин, А. К. Кошечева, Новые константы в суперинтуicionистской логике $L2$, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 6, 918–932

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9139>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 11:59:20

Новые константы в суперинтуиционистской логике $L2$

А. Д. Яшин, А. К. Коцеева

Дана классификация всех полных по П. С. Новикову расширений суперинтуиционистской логики $L2$ в языке с несколькими дополнительными константами. Установлена разрешимость алгоритмической проблемы распознавания консервативности расширений вида $L2 + A(\overline{\varphi})$ над $L2$.

Библиография: 16 названий.

DOI: 10.4213/mzm9139

Введение. Пусть Fm – класс¹ формул языка логики высказываний, включающего множество пропозициональных переменных $Var = \{p_i, q_j, \dots\}$, стандартные связки $\vee, \wedge, \rightarrow, \neg$ и стандартные логические константы 0 (ложь) и 1 (истина).

Суперинтуиционистской логикой (с.и.л.) называется произвольное подмножество $L \subset Fm$, включающее интуиционистскую пропозициональную логику Int и замкнутое относительно правил *modus ponens* и подстановки.

Через $L + A$ обозначается наименьшая с.и.л., включающая логику L и содержащая формулу A .

Добавим к пропозициональному языку набор дополнительных логических констант $\overline{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$. Получим класс $Fm(\overline{\varphi})$ формул расширенного языка, при этом формулы из Fm назовем *чистыми*. Далее всюду индекс n резервируем для числа новых констант.

Явным соотношением для константы φ_i назовем формулу вида $\varphi_i \leftrightarrow B$, где подформула B не содержит φ_i (но может содержать константы, отличные от φ_i).

Подстановкой на $Fm(\overline{\varphi})$ называется отображение $s: Fm(\overline{\varphi}) \rightarrow Fm(\overline{\varphi})$, сохраняющее константы и согласованное со стандартными логическими связками:

$$s(A \circ B) = s(A) \circ s(B), \quad s(\varphi_i) = \varphi_i, \quad s(\neg A) = \neg s(A).$$

Следуя Скворцову [1], назовем $\overline{\varphi}$ -логикой множество $\mathcal{L}$ формул расширенного языка, включающее Int и замкнутое относительно правил *modus ponens* и подстановки.

$\overline{\varphi}$ -Логика $\mathcal{L}$ называется *консервативным расширением* с.и. логики L , если $L \subset \mathcal{L}$ и для класса чистых формул выполнено $Fm \cap \mathcal{L} = L$.

Проблема новых одноместных связок в с.и. логиках была поставлена П. С. Новиковым и впервые сформулирована в статьях Сметанича [2], [3].

¹Понятия *класс*, *множество*, *совокупность* будем считать синонимами.

Адаптируя подход Новикова к языку с дополнительными константами, скажем, что $\bar{\varphi}$ -логика $\mathcal{L}$ *определяет новые независимые логические константы в L* , если $\mathcal{L}$ консервативна над L и для любого явного соотношения $\varphi_i \leftrightarrow B$ $\bar{\varphi}$ -логика $\mathcal{L} + \varphi_i \leftrightarrow B$ является неконсервативной над L (другими словами, $\mathcal{L}$ не допускает присоединения никаких явных соотношений для φ_i).

$\bar{\varphi}$ -Логика $\mathcal{L}$ называется *полным по Новикову расширением* логики L , если $\mathcal{L}$ консервативна над L и для любой формулы $A \in \text{Fm}(\bar{\varphi})$, не принадлежащей $\mathcal{L}$, $\bar{\varphi}$ -логика $\mathcal{L} + A$ неконсервативна над L (т.е. $\mathcal{L}$ не допускает присоединения никакой новой формулы).

Под *проблемой Новикова для с.и. логики L* понимается описание класса всех полных по Новикову расширений (*пополнений*) L .

Известно, что в случае $L = \text{Int}$ в языке с одной дополнительной константой ($\bar{\varphi} = \{\varphi\}$) семейство всех полных $\bar{\varphi}$ -логик счетно [4], а в языке с двумя и более константами ($\bar{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$, $n > 1$) оно имеет мощность континуума [5].

В данной статье проблема Новикова рассматривается применительно к с.и. логике $L2$. Согласно Максимовой, *логикой $L2$* [6] называется с.и. логика, характеризующая классом шкал вида

где “крыша” (множество максимальных точек F_m) состоит из m точек ($m \in \omega$). Шкалы такого вида будем называть *веерами*.

Аксиоматика $L2$:

$$L2 = \text{Int} + bd_2,$$

где формула $bd_2 \Leftrightarrow p \vee (p \rightarrow (q \vee \neg q))$ (в [7] логика $L2$ имеет обозначение BD_2 – “логика шкал глубины не более 2”).

Основные результаты статьи состоят в следующем.

1. Получено исчерпывающее описание семейства всех полных по Новикову расширений с.и.л. $L2$ в языке с несколькими дополнительными константами.
2. Указан наглядный способ исследования каждой полной логики на наличие явных соотношений.
3. Доказано, что каждое из полных расширений является алгоритмически разрешимым.
4. Установлена алгоритмическая разрешимость массовой проблемы распознавания “является ли $\bar{\varphi}$ -логика $L2 + A(\bar{\varphi})$ консервативной над $L2$?”.

Для единственной дополнительной константы классификация полных по Новикову расширений логики $L2$ приведена в [8].

Обозначения:

- $\Leftrightarrow$ означает “по определению равносильно”;
- $:=$ означает “по определению равно”;
- $[1, m]$ – множество натуральных чисел от 1 до m включительно.

1. Предварительные сведения. В этом пункте приводим необходимые сведения из метаматематики с.и. логик.

Шкалой называется пара $(W, \leq)$, где W – непустое частично упорядоченное (ч.у.) множество, а $\leq$ – частичный порядок на нем. При этом в некоторых случаях мы

будем отождествлять ч.у.м. с его носителем. Элементы шкал называются *точками*, *вершинами*, *узлами*, *вынуждающими условиями*. При наличии наименьшего элемента он называется *корнем*, а шкала называется *корневой*. При $x < y$ говорят, что точка x “видит” точку y .

Подмножество $X \subseteq W$ называется *конусом*, если оно замкнуто относительно увеличения: $x \in X, x \leq y \Rightarrow y \in X$. Например, W и $\emptyset$ являются конусами. Множество конусов шкалы W обозначаем через $\text{Con } W$. Конус вида $W^x = \{y \in W \mid x \leq y\}$ называется *конусом с корнем x* .

На $\text{Con } W$ рассматриваются теоретико-множественные операции $\cup, \cap$, а также операции *псевдодополнения* и *относительного псевдодополнения*

$$-X = \{x \in W \mid W^x \cap W = \emptyset\}, \quad X \supset Y = \{x \in W \mid X \cap W^x \subseteq Y \cap W^x\}.$$

Структура $(\text{Con } W, \cap, \cup, \supset, -)$ является примером *псевдобулевой алгебры* (алгебры Гейтинга). Псевдобулевы алгебры (п.б.а.) являются моделями интуиционистской логики высказываний так же, как булевы алгебры – моделями классической логики высказываний.

Известны следующие результаты о представлении п.б.а. (например, [9], [10]):

- всякая п.б.а. изоморфна подалгебре алгебры $\text{Con } W$ для некоторой шкалы W ;
- всякая конечная п.б.а. изоморфна алгебре $\text{Con } F$ для некоторой конечной шкалы F .

В связи с этими результатами о представлении п.б.а. широко применяется понятие обобщенной шкалы [7].

Обобщенной шкалой называется структура вида (W, S) , где W – шкала и S – подалгебра алгебры $\text{Con } W$.

Оценка переменных в обобщенной шкале $\mu = (W, S)$ – это функция $v: \text{Var} \rightarrow S$. Пара (μ, v) называется *моделью*.

На множество Fm формул оценка v распространяется по индукции:

$$\begin{aligned} v(A \wedge B) &:= v(A) \cap v(B), & v(A \vee B) &:= v(A) \cup v(B), & v(A \rightarrow B) &:= v(A) \supset v(B), \\ v(\neg A) &:= -v(A), & v(0) &:= \emptyset, & v(1) &:= W. \end{aligned}$$

Конус $v(A)$ называется *значением формулы A относительно оценки v* . Применяется также обозначение $x \Vdash_v A$ (точка x *вынуждает* формулу A) при $x \in v(A)$.

Формула *истинна в модели* (μ, v) , если $v(A) = W_\mu$, где W_μ – наибольший конус обобщенной шкалы μ . Формула *общезначима в шкале μ* , если для любой оценки переменных v на μ имеем $v(A) = W_\mu$. Обозначение $\mu \models A$.

Логика класса $\mathbf{M}$ обобщенных шкал – множество

$$L(\mathbf{M}) := \{A \in \text{Fm} \mid \forall \mu \in \mathbf{M}: \mu \models A\}$$

формул, общезначимых в каждой шкале этого класса.

Конус X шкалы W называется *плотным*, если выполнено следующее равенство: $--X = W$. Точечный эквивалент этого условия – $\forall x \exists y \geq x: y \in X$ [11].

Пусть $\mu = (W, S)$, $W_0 \in \text{Con } W$ (порядок на W_0 наследуется из порядка на W) и $S_0 = \{X \cap W_0 \mid X \in S\}$. Обобщенная шкала $\mu_0 = (W_0, S_0)$ называется *подшкалой*, порожденной из μ конусом W_0 . Обозначение $\mu_0 \subseteq \mu$.

Пусть $\mu = ((W, \leq), S)$ и $\mu' = ((W', \leq'), S')$ – обобщенные шкалы. Отображение $h: W \rightarrow W'$ называется *p-морфизмом* шкалы μ на μ' , если выполнены следующие условия:

- h – сюръективное отображение;
- $x \leq y \Rightarrow h(x) \leq' h(y)$ (монотонность);
- $z \geq' h(x) \Rightarrow \exists y \geq x: h(y) = z$ (конусность);
- $\forall X \in S' \ h^{-1}(X) \in S$ (непрерывность – по аналогии с “прообраз открытого множества открыт”); обозначение: $h: (W, S) \rightarrow (W', S')$.

Отношение *редуцируемости* $\mu' \succeq \mu$ между шкалами определяется так:

$$\mu' \succeq \mu \quad \Leftrightarrow \quad \exists \mu_0 \subseteq \mu \ \exists h: \mu_0 \rightarrow \mu'.$$

Отношение *редуцируемости на классах шкал* определяется так:

$$\mathbf{N} \succeq \mathbf{M} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \mu \in \mathbf{M} \ \exists \eta \in \mathbf{N}: \eta \succeq \mu.$$

Говорят также, что класс $\mathbf{M}$ *мажорируется* классом $\mathbf{N}$.

Следующие две теоремы вытекают из метаматематических результатов, приведенных, например, в [12].

ТЕОРЕМА 1 (Прямая теорема сравнения). *Пусть $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ – произвольные классы обобщенных шкал. Тогда из $\mathbf{N} \succeq \mathbf{M}$ следует $L(\mathbf{N}) \subseteq L(\mathbf{M})$.*

ТЕОРЕМА 2 (Обратная теорема сравнения). *Пусть $\mathbf{F}$ – некоторый класс конечных корневых шкал, $\mathbf{M}$ – произвольный класс обобщенных шкал. Тогда из $L(\mathbf{M}) \subseteq L(\mathbf{F})$ следует $\mathbf{M} \succeq \mathbf{F}$.*

2. О логике $L2$ и ее моделях. Напомним, что логикой $L2$ называется с.и. логика, характеризуемая классом вееров, описанным во введении.

Пусть $\mu = (W, S)$ – обобщенная шкала. Определим отношение *отделенности* на множестве W следующим образом (см. [13]):

$$x \prec y \quad \Leftrightarrow \quad x < y \ \& \ \exists X \in S: x \notin X \ \& \ y \in X.$$

Высотой шкалы μ назовем максимум длин $\prec$ -цепей в W (если длины таких цепей в совокупности неограничены, высота принимается за ∞).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (Строение $L2$ -шкал). *Обобщенная шкала $\mu = (W, S)$ является моделью логики $L2$ тогда и только тогда, когда ее высота не превосходит 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \prec y \prec z$, $x \notin Y$, $y \in Y$, $z \notin Y$, $z \in Z$ для некоторых $Y, Z \in S$. Положим $v(p) := Y$, $v(q) := Z$. При этой оценке в точке x опровергается основополагающая аксиома логики $L2$.

И наоборот, если в модели $(W, S; v)$ формула bd_2 опровергается, то это влечет наличие $\prec$ -цепи из трех элементов.

Шкалы, являющиеся моделями логики $L2$, будем называть *$L2$ -шкалами*.

Класс $L2$ -шкал $\mathbf{M}$ назовем *характеристическим* (для $L2$), если $L(\mathbf{M}) = L2$ (в дальнейшем пишем просто “характеристический” без упоминания $L2$).

Заметим, что при $1 \leq k < t$ веер F_k является p -морфным образом веера F_t . Отсюда следует, что любой конфинальный подкласс $\mathbf{F}'$ класса $\mathbf{F}$ также является характеристическим (подкласс *конфинален*, если он содержит вееры F_k сколь угодно большой ширины).

В общем случае имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Класс $\mathbf{M}$ обобщенных $L2$ -шкал является характеристическим тогда и только тогда, когда $\mathbf{F}' \preceq \mathbf{M}$ для некоторого конфинального подкласса $\mathbf{F}' \subseteq \mathbf{F}$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть $\mu = (W, S)$ – обобщенная корневая $L2$ -шкала, $X, Y \in S$ и $Y \subseteq X \subsetneq W$. Тогда $X \setminus Y = X \cap -Y$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $X \setminus Y \supseteq X \cap -Y$ очевидно.

Проверим обратное включение от противного. Пусть нашлась точка $x \in X \setminus Y$ такая, что $x \notin X \cap -Y$. Тогда $x \notin -Y$, т.е. существует точка $z > x$ такая, что $z \in Y$. Получаем $o \prec x \prec z$, что противоречит строению $L2$ -шкал.

3. $\overline{\varphi}$ -Шкалы и $\overline{\varphi}$ -логики. *Обобщенной $\overline{\varphi}$ -шкалой называется структура вида $(W, S; \overline{\Phi})$, где (W, S) – обобщенная шкала, $\overline{\Phi} = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ – набор конусов из S .*

Оценкой в обобщенной $\overline{\varphi}$ -шкале $\mu = (W, S; \overline{\Phi})$ называется отображение

$$v: \text{Var} \cup \overline{\varphi} \rightarrow S.$$

На стандартные связки оценка распространяется, как описано выше. Для новых констант полагаем $v(\varphi_i) := \Phi_i$, $i \in [1, n]$.

Понятия *модели, истинности формулы в модели, общезначимости формулы в $\overline{\varphi}$ -шкале* и в классе $\overline{\varphi}$ -шкал определяются аналогично.

Конусы для интерпретации констант на обобщенной $\overline{\varphi}$ -шкале $\mu = (W, S; \overline{\Phi})$ можно задавать также с помощью понятия цвета [14]. *Цветом* называется произвольное подмножество множества $\overline{\varphi}$. Всего существует 2^n цветов. *Цветом точки x обобщенной $\overline{\varphi}$ -шкалы μ называется множество $\text{col}(x) := \{\varphi_i \in \overline{\varphi} \mid x \Vdash \varphi_i\}$.*

$\overline{\varphi}$ -Логикой класса $\mathbf{M}$ обобщенных $\overline{\varphi}$ -шкал называется множество

$$\mathcal{L}(\mathbf{M}) \rightleftharpoons \{A \in \text{Fm}(\overline{\varphi}) \mid \forall \mu \in \mathbf{M}: \mu \models A\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Из вышесказанного следует, что для с.и.л. L по крайней мере одно консервативное расширение существует. В самом деле, L характеризуется некоторым классом обобщенных шкал. Задавая на этих шкалах цвета вершин каким-либо способом, получим класс $\overline{\varphi}$ -шкал и его $\overline{\varphi}$ -логику $\mathcal{L}$. При этом чистый фрагмент $\mathcal{L}$ совпадает с L .

Пусть $\mu = (W, S; \overline{\Phi})$ – обобщенная $\overline{\varphi}$ -шкала. *Порожденная конусом W' $\overline{\varphi}$ -подшкала* определяется так: $\mu' = (W', S'; \overline{\Phi}')$, где S' – то же, что и выше, $\Phi'_i = \Phi_i \cap W'$, $i \in [1, n]$. Обозначение $\mu' \stackrel{\overline{\varphi}}{\subseteq} \mu$.

Для обобщенных $\overline{\varphi}$ -шкал $\mu = (W, S; \overline{\Phi})$ и $\mu' = (W', S'; \overline{\Phi}')$ определение $p_{\overline{\varphi}}$ -морфизма (понятие и обозначение взяты из [1]) получается из определения p -морфизма добавлением пункта о согласовании констант:

$$h^{-1}(\Phi'_i) = \Phi_i.$$

Обозначение $h: \mu \stackrel{\overline{\varphi}}{\twoheadrightarrow} \mu'$.

Формулы без переменных называются *константными*, $\text{Fm}_c(\overline{\varphi})$ – класс константных формул.

Для $\overline{\varphi}$ -логики $\mathcal{L}$ через $\mathcal{L}_c$ будем обозначать ее *константный фрагмент*, т.е. $\mathcal{L}_c = \mathcal{L} \cap \text{Fm}_c(\overline{\varphi})$.

ЛЕММА 1. Пусть $\mu \xrightarrow{\bar{\varphi}} \mu'$. Тогда $\mathcal{L}_c(\mu) = \mathcal{L}_c(\mu')$.

Отношение $\bar{\varphi}$ -редуцируемости между шкалами определяется так:

$$\mu \preceq^{\bar{\varphi}} \eta \iff \exists \eta' \subseteq^{\bar{\varphi}} \eta \exists h: \eta' \xrightarrow{\bar{\varphi}} \mu.$$

Отношение $\bar{\varphi}$ -редуцируемости на классах $\bar{\varphi}$ -шкал определяется так:

$$\mathbf{M} \preceq^{\bar{\varphi}} \mathbf{N} \iff \forall \mu \in \mathbf{M} \exists \eta \in \mathbf{N}: \mu \preceq^{\bar{\varphi}} \eta.$$

Для классов $\bar{\varphi}$ -шкал выполняется следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3 (Прямая теорема сравнения $\bar{\varphi}$ -логик). Для любых классов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ обобщенных $\bar{\varphi}$ -шкал из $\mathbf{M} \preceq^{\bar{\varphi}} \mathbf{N}$ следует $\mathcal{L}(\mathbf{N}) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{M})$.

Эта теорема аналогична прямой теореме о сравнениях для чистых с.и. логик и доказывается подобным же образом.

Следующую теорему можно трактовать как формальное обоснование естественности понятия полноты по Новикову.

ТЕОРЕМА 4. Пусть L – некоторая с.и. логика. Любая консервативная над L $\bar{\varphi}$ -логика включена в некоторую максимальную консервативную над L $\bar{\varphi}$ -логику.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество всех консервативных над L $\bar{\varphi}$ -логик (как отмечено выше, непустое), частично упорядоченное по включению. Возьмем в нем произвольную цепь $\dots \subseteq \mathcal{L}_{\alpha_1} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{L}_{\alpha_2} \subseteq \dots \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{L}_{\alpha}$. Обозначим

$$\mathcal{L}_I = \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{L}_{\alpha}.$$

Проверим три утверждения относительно $\mathcal{L}_I$.

1) Логика $\mathcal{L}_I$ замкнута относительно правила *modus ponens*.

Пусть $A, A \rightarrow B \in \mathcal{L}_I$. Найдутся такие $\alpha_1, \alpha_2 \in I$, что $A \in \mathcal{L}_{\alpha_1}, A \rightarrow B \in \mathcal{L}_{\alpha_2}$. Пусть $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Тогда в силу монотонности $A, A \rightarrow B \in \mathcal{L}_{\alpha}$, а в силу замкнутости $\mathcal{L}_{\alpha}$ относительно *modus ponens* получаем $B \in \mathcal{L}_{\alpha}$.

2) Логика $\mathcal{L}_I$ замкнута относительно правила подстановки.

Пусть $A \in \mathcal{L}_I$ и s – подстановка на $\text{Fm}(\bar{\varphi})$. Для некоторого индекса $\alpha \in I$ имеем $A \in \mathcal{L}_{\alpha}$, тогда и $s(A) \in \mathcal{L}_{\alpha}$, поскольку $\mathcal{L}_{\alpha}$ замкнуто относительно подстановки. Тогда, по определению $\mathcal{L}_I$, получаем $s(A) \in \mathcal{L}_I$.

3) Логика $\mathcal{L}_I$ консервативна над L .

От противного. Предположим, что нашлась чистая формула $D \in \mathcal{L}_I \setminus L$. Тогда найдется индекс $\alpha \in I$ такой, что $D \in \mathcal{L}_{\alpha}$, что противоречит предположению о консервативности $\mathcal{L}_{\alpha}$.

Итак, объединение любой возрастающей цепи консервативных $\bar{\varphi}$ -логик также является консервативной $\bar{\varphi}$ -логикой. Следовательно, по лемме Цорна всякая консервативная $\bar{\varphi}$ -логика включена в некоторую максимальную консервативную ($\equiv$ полную по Новикову) $\bar{\varphi}$ -логику.

4. Редукция к классам $\bar{\varphi}$ -вееров.

ЛЕММА 2 (Основная). Пусть $(W, S; \bar{\Phi})$ – обобщенная $\bar{\varphi}$ -шкала с корнем o такая, что $(W, S) \models L2$, F_m – веер и $h: (W, S) \rightarrow F_m$. Тогда существуют $\bar{\varphi}$ -веер $\mathcal{F}_l$, где $m \leq l \leq m \cdot 2^n$, и $p_{\bar{\varphi}}$ -морфизм $f: (W, S; \bar{\Phi}) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}_l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ЛЕММЫ. Пусть a_0 – корень F_m , $a_1, a_2, \dots, a_m$ – “крыша” веера F_m . Обозначим полные прообразы точек a_i через

$$W_0 := h^{-1}(\{a_0\}), \quad W_i := h^{-1}(\{a_i\}) \quad \text{для } i = [1, m].$$

Прообраз “крыши” F_m обозначим через $\bar{W} := \bigcup_{i=1}^m W_i$. Отметим, что $W_i \in S$ для $i = [1, m]$, также $\bar{W} \in S$ (при этом W_0 не является конусом).

Для продолжения доказательства основной леммы нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 3. Пусть $W_0 \cap \Phi_j \neq \emptyset$. Тогда $W_0 \subset \Phi_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in W_0 \cap \Phi_j$ и $W_0 \not\subset \Phi_j$. Тогда $o \notin \Phi_j$. Получили $o \prec x$. Далее, конус $\bar{W}$ плотен в W , поэтому найдется точка $y \in \bar{W}$ такая, что $y \geq x$. Поскольку $x \in W_0$, получаем $x < y$. Отсюда $x \prec y$.

Получили $\prec$ -цепь $o \prec x \prec y$, что противоречит строению $L2$ -шкал.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любых $x, y \in W_0$ имеем $\text{col}(x) = \text{col}(y)$.

Пусть $i > 0$. Рассмотрим на W_i отношение “равноцветности”

$$x \simeq y \iff \text{col}(x) = \text{col}(y).$$

Поскольку число возможных цветов равно 2^n , множество W_i разбивается на дизъюнктные непустые компоненты в количестве от 1 до 2^n . Компоненту, содержащую точку $x \in W_i$, можно записать так:

$$[x] = W_i \cap \bigcap_{\varphi_j \in \text{col}(x)} \Phi_j \cap \bigcap_{\varphi_j \notin \text{col}(x)} \bar{\Phi}_j$$

(здесь $\bar{\Phi}_j$ обозначает теоретико-множественное дополнение).

ЛЕММА 4. Имеет место равенство

$$W_i \setminus \Phi_j = W_i \cap (-\Phi_j) \quad \forall i \in [1, m] \quad \forall j \in [1, n].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $\supseteq$ следует из того, что $-\Phi_j \subseteq \bar{\Phi}_j$ (согласно определению операции псевдодополнения на конусах).

Докажем обратное включение. Рассмотрим точку $x \in W_i$ такую, что $x \notin \Phi_j$. Допустим, что, напротив, $x \notin -\Phi_j$. Тогда найдется точка $y \in \Phi_j$ такая, что $y \geq x$. Получаем $x < y$, поэтому $x \prec y$. Кроме того, $x \in W_i$, $o \notin W_i$, т.е. $o \prec x$. Как и в доказательстве леммы 3, получили $\prec$ -цепь $o \prec x \prec y$, что невозможно.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любого $i \in [1, m]$ для любого $x \in W_i$ компонента $[x]$ разбиения конуса W_i является элементом п.б.а. S .

ЛЕММА 5. Пусть $y \in W_0$. Для любого $i \in [1, m]$, для любой компоненты X разбиения конуса W_i имеем $W^y \cap X \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. От противного. Пусть нашлась точка $y \in W_0$, которая не видит ни одной точки из X . Тогда $y \in -X$ (в силу предыдущего следствия $X \in S$).

Корень o видит компоненту X (она непуста), поэтому $o \notin -X$. Получили $o \prec y$.

Далее, конус $\overline{W}$ плотен в W , поэтому найдется $z \in \overline{W}$ такая, что $y \leq z$. Так как $y \in W_0$, имеем $y < z$ и $y \notin \overline{W}$, т.е. $y \prec z$.

Снова получили $\prec$ -цепь $o \prec y \prec z$, что невозможно.

Пусть конус W_i разбит на k_i компонент $X_i^1, X_i^2, \dots, X_i^{k_i}$.

В веере F_m каждую максимальную точку a_i размножим в k_i точек $a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^{k_i}$. Получим l -веер F_l , где $l = k_1 + k_2 + \dots + k_m$ (корень F_l по-прежнему обозначен через a_0).

Зададим отображение $f: W \rightarrow F_l$ по следующему правилу:

$$\begin{aligned} f(W_0) &= a_0, \\ f(X_i^s) &= a_i^s \quad \text{для } s \in [1; k_i]. \end{aligned}$$

Отображение f сюръективно по построению.

ЛЕММА 6. *Отображение f монотонно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x < y$ в W . Разберем возможные случаи отдельно.

Если $x, y \in W_0$, то $f(x) = a_0 = f(y)$.

Если $x \in W_0$ и $y \in W_i$, то $f(x) = a_0$, $f(y) \in \{a_i^1, \dots, a_i^{k_i}\}$, поэтому $f(x) < f(y)$.

Если $x, y \in X_i^j$, то $f(x) = f(y)$.

Наконец, в предположении $x < y$ точки x и y не могут принадлежать разным компонентам разбиения конуса $\overline{W}$. В самом деле, если $y \in X_i^j$ и $x \notin X_i^j$, то $x \prec y$ (напомним, что компоненты являются элементами п.б.а. S). При этом $x \in \overline{W}$, $o \notin \overline{W}$. Получили $\prec$ -цепь $o \prec x \prec y$, что невозможно.

ЛЕММА 7. *Отображение f удовлетворяет условию конусности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(x) < b$ в веере F_l . Это означает, что $f(x) = a_0$, т.е. $x \in W_0$ и b совпадает с некоторым a_i^s . В силу леммы 5 точка x видит компоненту X_i^s , т.е. $W \cap X_i^s \neq \emptyset$. Значит, найдется $y > x$ такая, что $f(y) = a_i^s = b$.

ЛЕММА 8. *Для любого $X \in \text{Con } F_l$ выполнено $f^{-1}(X) \in S$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для конуса $\{a_i^s\}$ имеем $h^{-1}(\{a_i^s\}) = X_i^s \in S$ в силу леммы 2. Для конуса F_l имеем $h^{-1}(F_l) = W \in S$.

Превратим веер F_l в $\overline{\varphi}$ -веер, перенося раскраску из $(W, S; \overline{\Phi})$:

$$\text{col}(a_0) := \text{col}(W_0) \quad \text{и} \quad \text{col}(a_i^s) := \text{col}(X_i^s).$$

Корректность этого определения следует из следствия 1 и из определения отношения равноцветности.

Таким образом получили $\overline{\varphi}$ -веер $\mathcal{F}_l$ и желаемый $p_{\overline{\varphi}}$ -морфизм. Основная лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть $\mathbf{M}$ – произвольный L_2 -характеристический класс обобщенных $\overline{\varphi}$ -шкал. Тогда существует конфинальный класс $\mathbf{F}$ $\overline{\varphi}$ -вееров такой, что $\mathbf{F} \stackrel{\overline{\varphi}}{\leq} \mathbf{M}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем натуральное число m . В силу $L2$ -характеристичности класса $\mathbf{M}$ найдутся порожденная из некоторой шкалы этого класса корневая подшкала $(W, S; \overline{\Phi})$ и p -морфизм $h: (W, S) \rightarrow F_m$. По основной лемме найдется $\overline{\varphi}$ -веер $\mathcal{F}_l$, где $m \leq l \leq m \cdot 2^n$, и $p_{\overline{\varphi}}$ -морфизм $(W, S; \overline{\Phi}) \xrightarrow{\overline{\varphi}} \mathcal{F}_l$.

Натуральный ряд содержит бесконечное число попарно не пересекающихся интервалов вида $[m, m \cdot 2^n]$. Для каждого из этих интервалов существует $\overline{\varphi}$ -веер $\mathcal{F}_l$, где $l \in [m, m \cdot 2^n]$. Все такие $\mathcal{F}_l$ и образуют искомый класс $\mathbf{F}$.

В заключение этого пункта сформулируем следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Полные по Новикову расширения логики $L2$ в языке с несколькими константами характеризуются конфинальными классами $\overline{\varphi}$ -вееров.

5. Прототипы и классификация полных расширений $L2$. Прототипом будем называть $\overline{\varphi}$ -веер $\mathcal{F} = (F; \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)$, все максимальные точки которого имеют разные цвета:

$\text{col}(a_i) \neq \text{col}(a_j)$ при $i \neq j$. Далее максимальные точки $\overline{\varphi}$ -веера $\mathcal{F}$ будем рассматривать вместе с их цветами.

ПРИМЕР. В случае двух констант один из прототипов выглядит так:

Пусть $\mathcal{F}$ – прототип и a – точка “крыши” веера $\mathcal{F}$. Обозначим через $\mathbf{F}[\mathcal{F}, a]$ класс $\overline{\varphi}$ -вееров, полученный из $\mathcal{F}$ размножением точки a с сохранением цвета. Например, при размножении левой точки в веере из предыдущего примера $\overline{\varphi}$ -вееры этого класса будут иметь такой вид:

ЛЕММА 9. Любой $\overline{\varphi}$ -веер $p_{\overline{\varphi}}$ -морфно отображается на некоторый прототип.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Склеивание всех равноцветных точек в одну является искомым $p_{\overline{\varphi}}$ -морфизмом.

Сразу получаем, что в прототипе $\mathcal{F}$ и классах вида $\mathbf{F}[\mathcal{F}, a]$ истинны одни и те же константные формулы. То есть имеет место

СЛЕДСТВИЕ 4. Выполнено равенство $\mathcal{L}_c(\mathcal{F}) = \mathcal{L}_c(\mathbf{F}[\mathcal{F}, a])$ для каждой a – точки “крыши” веера $\mathcal{F}$.

Для каждой точки a введем константную формулу $\text{Col}(a)$, описывающую ее цвет:

$$\text{Col}(a) \Rightarrow \bigwedge \{\varphi_j \mid a \Vdash \varphi_j\} \wedge \bigwedge \{\neg\varphi_s \mid a \nVdash \varphi_s\}.$$

ЛЕММА 10. Для неизоморфных прототипов $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ имеем $\mathcal{L}_c(\mathcal{F}_1) \neq \mathcal{L}_c(\mathcal{F}_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если “крыши” прототипов неизоморфны, то в одной из них, например, в “крыше” веера $\mathcal{F}_1$, найдется точка a , не имеющая цветового аналога в “крыше” веера $\mathcal{F}_2$. Тогда получаем

$$\mathcal{F}_2 \models \neg \text{Col}(a) \quad \text{и} \quad \mathcal{F}_1 \not\models \neg \text{Col}(a).$$

Если же “крыши” изоморфны, то различны цвета корней этих шкал, т.е. найдется константа, истинная в одной из них и не истинная в другой.

ЛЕММА 11. Выполнено соотношение $\mathcal{L}(\mathbf{F}[\mathcal{F}, a]) \neq \mathcal{L}(\mathbf{F}[\mathcal{F}, b])$ для всех a, b – точек “крыши” веера $\mathcal{F}$, $a \neq b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аксиомой неразложимости для точки a назовем формулу

$$\text{Irr}(a) \Rightarrow (\text{Col}(a) \rightarrow (p \vee q)) \rightarrow ((\text{Col}(a) \rightarrow p) \vee (\text{Col}(a) \rightarrow q)).$$

Для двух классов $\mathbf{F}[\mathcal{F}, a]$ и $\mathbf{F}[\mathcal{F}, b]$ аксиома неразложимости $\text{Irr}(b)$ выполнена в первом классе и не выполнена во втором, и наоборот, $\text{Irr}(a)$ выполнена во втором и не выполнена в первом. Таким образом, $\bar{\varphi}$ -логики классов, полученных размножением разных точек одного прототипа, различны.

ПРИМЕР. Рассмотрим прототип

Тогда

– один из $\bar{\varphi}$ -вееров класса $\mathbf{F}[\mathcal{F}, a_1]$,

$$\models ((\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) \rightarrow (p \vee q)) \rightarrow ((\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) \rightarrow p) \vee (\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) \rightarrow q);$$

– один из $\bar{\varphi}$ -вееров класса $\mathbf{F}[\mathcal{F}, a_2]$,

$$\not\models ((\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) \rightarrow (p \vee q)) \rightarrow ((\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) \rightarrow p) \vee (\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) \rightarrow q).$$

Отметим, что для набора из n констант множество всех прототипов конечно, поскольку число всевозможных цветов точек $\bar{\varphi}$ -шкалы равно 2^n .

Теперь перечислим все попарно неизоморфные прототипы $\bar{\varphi}$ -вееров с одной и с двумя константами.

1. С одной константой $\bar{\varphi} = \{\varphi\}$. Имеем следующие прототипы:

2. С двумя константами $\bar{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2\}$.

Во-первых, есть прототип с обеими пустыми константами, изоморфный прототипу 1 из предыдущей группы.

Во-вторых, прототипы, изоморфные прототипам 2, 3, 4 из предыдущей группы, где φ заменено на φ_1 (пустое φ_2).

В-третьих, прототипы, изоморфные предыдущим 2, 3, 4, где φ заменено на φ_2 (пустое φ_1).

И наконец, есть прототипы с обеими непустыми константами. Они представлены на следующей схеме:

ТЕОРЕМА 5 (Классификация полных по Новикову расширений $L2$). Семейство полных расширений логики $L2$ состоит из всевозможных $\bar{\varphi}$ -логик вида $\mathcal{L}(\mathbf{F}[\mathcal{F}, a])$, где $\mathcal{F}$ – прототип и a – точка “крыши” веера $\mathcal{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 4 полные расширения $L2$ определяются конфинальными классами $\bar{\varphi}$ -вееров.

Рассмотрим произвольный конфинальный класс $\mathbf{F}_1$ $\bar{\varphi}$ -вееров. По лемме 9 каждый $\bar{\varphi}$ -веер этого класса $p_{\bar{\varphi}}$ -морфно отображается на некоторый прототип. Поскольку число прототипов конечно, найдется конфинальный подкласс $\mathbf{F}_2 \subseteq \mathbf{F}_1$, в котором все члены имеют один и тот же прототип $\mathcal{F}$.

Теперь работаем с $\mathbf{F}_2$: в его прототипе конечное число точек, поэтому для этого класса существует конфинальный подкласс $\mathbf{F}_3 \subseteq \mathbf{F}_2$ и точка a такие, что $\mathbf{F}_3$ содержит шкалы со сколь угодно большими прообразами точки a .

В каждом веере из $\mathbf{F}_3$ склеим все равноцветные точки в одну, кроме тех точек, которые являются прообразами a . Получим класс $\mathbf{F}_4 \stackrel{\varphi}{\preceq} \mathbf{F}_3$. Кроме того, имеем $\mathbf{F}_4 \subseteq \mathbf{F}[\mathcal{F}, a]$. С другой стороны, $\mathbf{F}[\mathcal{F}, a] \stackrel{\varphi}{\preceq} \mathbf{F}_4$. Поэтому $\mathcal{L}(\mathbf{F}[\mathcal{F}, a]) = \mathcal{L}(\mathbf{F}_4)$.

Таким образом, любая консервативная над $L2$ $\bar{\varphi}$ -логика включена в какую-то $\bar{\varphi}$ -логику вида $\mathcal{L}(\mathbf{F}(\mathcal{F}, a))$. Все $\bar{\varphi}$ -логики такого вида различны. Тем самым, классификация полностью описана.

6. Явные соотношения в пополнениях $L2$. Материал этого пункта основан на работе [15].

Напомним, что *явным соотношением для константы φ_i* называется формула вида $\varphi_i \leftrightarrow B$, где B не содержит φ_i (но может содержать другие константы).

Набор конусов $\{X_1, \dots, X_s\}$ называется *системой образующих* п.б.а. $\text{Con } F$, если наименьшая подалгебра этой алгебры, содержащая указанные конусы, совпадает с $\text{Con } F$.

Минимальной называют систему образующих, у которой никакая собственная подсистема не порождает всю алгебру $\text{Con } F$. В $\bar{\varphi}$ -шкале $\mathcal{F} = (F; \bar{\Phi})$ нас интересует набор $\bar{\Phi}$ и его поднаборы как возможные системы образующих.

Для произвольной конечной корневой $\bar{\varphi}$ -шкалы $\mathcal{F} = (F; \bar{\Phi})$ имеет место

ЛЕММА 12. *Набор $\bar{\Phi}$ является системой образующих п.б.а. $\text{Con } F$ тогда и только тогда, когда $\bar{\varphi}$ -шкала $\mathcal{F}$ является $\bar{\varphi}$ -несжимаемой, т.е. не существует $p_{\bar{\varphi}}$ -морфизма на меньшую $\bar{\varphi}$ -шкалу.*

Если $\bar{\varphi}$ -логика $\mathcal{L}$ имеет явное соотношение для φ_i , то, подставляя в него вместо переменных константы, отличные от φ_i , получим явное соотношение для φ_i с константной правой частью. Наличие явного константного соотношения для φ_i в $\bar{\varphi}$ -логике класса $\mathbf{F}[\mathcal{F}, a]$ можно проверить на прототипе $\mathcal{F}$:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *В прототипе $\mathcal{F}$ существует явное соотношение для φ_i тогда и только тогда, когда при удалении Φ_i из $\mathcal{F}$ веер $(F; \Phi_1, \dots, \Phi_{i-1}, \Phi_{i+1}, \dots, \Phi_n)$ по-прежнему остается несжимаемым, т.е. не существует $p_{\bar{\varphi}}$ -морфизма на $\bar{\varphi}$ -веер с меньшим числом точек.*

ПРИМЕР. Если в прототипе 9 из классификации попарно неизоморфных прототипов $\bar{\varphi}$ -вееров с двумя константами (см. предыдущий пункт):

“стереть” любое из φ_1, φ_2 , то веер легко можно сжать и получить прототип 4 из группы прототипов $\bar{\varphi}$ -вееров с одной константой. Таким образом, для прототипа 9 не существует явных соотношений.

Таблица 1. Явные соотношения для одной константы

Прототип №	Соотношение	Прототип №	Соотношение
1	$\varphi \leftrightarrow 0$	3	нет
2	$\varphi \leftrightarrow 1$	4	нет

Таблица 2. Явные соотношения для двух констант в прототипах с непустыми φ_1 и φ_2

Прототип №	Соотношение	Прототип №	Соотношение
1	$\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$	9	нет
2	$\varphi_1 \leftrightarrow (\varphi_2 \vee \neg \varphi_2)$	10	нет
3	$\varphi_2 \leftrightarrow (\varphi_1 \vee \neg \varphi_1)$	11	$\varphi_1 \leftrightarrow 1, \varphi_2 \leftrightarrow 1$
4	$\varphi_1 \leftrightarrow \neg \varphi_2$	12	$\varphi_1 \leftrightarrow 1$
5	нет	13	$\varphi_2 \leftrightarrow 1$
6	$\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$	14	$\varphi_1 \leftrightarrow 1$
7	нет	15	$\varphi_2 \leftrightarrow 1$
8	нет	—	—

С помощью этой методики авторами проанализированы прототипы для одной и для двух констант. Результаты приведены в таблицах 1, 2.

7. О некоторых алгоритмических вопросах. $\overline{\varphi}$ -Логика $\mathcal{L}$ называется *разрешимой*, если существует алгоритм, который по произвольной формуле $A \in \text{Fm}(\overline{\varphi})$ определяет, $A \in \mathcal{L}$ или $A \notin \mathcal{L}$.

ТЕОРЕМА 6. *Каждая $\overline{\varphi}$ -логика вида $\mathcal{L}(\mathbf{F}[\mathcal{F}, a])$ является разрешимой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (Упрощенный вариант известного метода фильтрации). Пусть $A \in \text{Fm}(\overline{\varphi})$ и $\text{var}(A) = \{p_1, \dots, p_k\}$.

Расширим понятие цвета точки $\overline{\varphi}$ -шкалы до понятия *цвета точки в модели*. Цветом точки x в данной модели назовем множество

$$\text{Col}(x) \rightleftharpoons \text{col}(x) \cup \{p \in \text{var}(A) \mid x \Vdash p\}.$$

То есть цвет формируется не только константами, но и переменными, входящими в A .

Общее число атомарных подформул формулы A не превосходит $n + k$. Поэтому в крыше данной модели реализуется не более 2^{k+n} цветов. Склеивая одноцветные некорневые точки в одну, получим новую модель, эквивалентную первоначальной относительно подкласса формул, содержащих только переменные списка $\{p_1, \dots, p_k\}$. Отсюда: если формула A опровергается на каком-нибудь-прообразе прототипа $\mathcal{F}$, то она опровергается и на прообразе прототипа, содержащем не более 2^k прообразов точки a .

Общезначимость данной формулы в данной конечной $\overline{\varphi}$ -шкале проверяется за конечное число шагов.

Под проблемой *распознавания консервативности* будем понимать следующую массовую проблему:

ПРОБЛЕМА. Пусть $A \in \text{Fm}(\bar{\varphi})$; является ли $\bar{\varphi}$ -логика $L2 + A$ консервативным расширением логики $L2$?

ТЕОРЕМА 7. Проблема распознавания консервативности расширений $L2$ в языке с несколькими константами алгоритмически разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. φ -Логика $L2 + A$ консервативна над $L2$ тогда и только тогда, когда она включена в какую-то из полных над $L2$ логик (прямая импликация – по теореме 4, обратная – очевидна). Далее, $L2 + A$ включена в какую-то из полных над $L2$ логик тогда и только тогда, когда формула A содержится в какой-либо полной по Новикову $\bar{\varphi}$ -логике над $L2$. И наконец, формула A содержится в какой-либо полной по Новикову $\bar{\varphi}$ -логике над $L2$ тогда и только тогда, когда $A \in \mathcal{L}(\mathbf{F}[\mathcal{F}, a])$ для некоторого прототипа $\mathcal{F}$ и точки a – точки крыши $\mathcal{F}$ (в силу классификационной теоремы для семейства полных $\bar{\varphi}$ -логик).

Семейство пополнений $L2$ является конечным, все эти пополнения разрешимы (согласно предыдущей теореме), следовательно, вопрос о консервативности $L2 + A$ решается за конечное число шагов.

Отметим, что разрешимость проблемы консервативности $\bar{\varphi}$ -логик над Int зависит от числа дополнительных констант:

- для одной константы проблема алгоритмически разрешима [4];
- для двух или более констант – неразрешима [16].

Авторы благодарны чл.-корр. РАН Л. Д. Беклемишеву, проф. Л. Л. Максимовой и проф. С. П. Одинцову за внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Д. П. Скворцов, “Об интуиционистском исчислении высказываний с дополнительной логической связкой”, *Исследования по неклассическим логикам и формальным системам*, Наука, М., 1983, 154–173.
- [2] Я. С. Сметанич, “О полноте исчисления высказываний с дополнительной операцией от одной переменной”, *Тр. ММО*, **9**, ГИФМЛ, М., 1960, 357–371.
- [3] Я. С. Сметанич, “Об исчислениях высказываний с дополнительной операцией”, *Докл. АН СССР*, **139**:2 (1961), 309–312.
- [4] А. Д. Яшин, “О новой константе в интуиционистской логике высказываний”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **5**:3 (1999), 903–926.
- [5] А. Д. Яшин, “Континуальность семейства полных по Новикову логик с новой одноместной связкой”, *Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1997, № 3, 22–25.
- [6] Л. Л. Максимова, “Предтабличные суперинтуиционистские логики”, *Алгебра и логика*, **11**:5 (1972), 558–570.
- [7] A. Chagrov, M. Zakharyashev, *Modal Logic*, Oxford Logic Guides, **35**, Clarendon Press, New York, 1997.
- [8] А. Д. Яшин, “О новых константах в двух предтабличных суперинтуиционистских логиках”, *Алгебра и логика*, **50**:2 (2011), 246–267.
- [9] Л. Л. Эсакиа, *Алгебры Гейтинга. I. Теория двойственности*, Медниереба, Тбилиси, 1985.
- [10] D. P. Dubhashi, “On decidable varieties of Heyting algebras”, *J. Symbolic Logic*, **57**:3 (1992), 988–991.
- [11] Е. Расёва, Р. Сикорский, *Математика метаматематики*, Математическая логика и основания математики, Наука, М., 1972.

- [12] N. Bezhanishvili, D. de Jongh, *Intuitionistic Logic*, <http://www.illc.uva.nl/Research/Reports/PP-2006-25.text.pdf>.
- [13] R. I. Goldblatt, “Metamathematics of modal logic. I”, *Rep. Math. Logic*, **6** (1976), 41–77; “Metamathematics of modal logic. II”, *Rep. Math. Logic*, **7** (1976), 41–78, 21–52.
- [14] Р. Ш. Григория, “Свободные S4.3-алгебры с конечным числом образующих”, *Исследования по неклассическим логикам и формальным системам*, Наука, М., 1983, 281–287.
- [15] A. Yashin, “New intuitionistic logical constants and Novikov completeness”, *Studia Logica*, **63**:2 (1997), 151–180.
- [16] A. D. Yashin, “New intuitionistic logical constants: undecidability of the conservativeness problem”, *Computer Science Logic*, Lecture Notes in Comput. Sci., **1258**, Springer-Verlag, Berlin, 1997, 460–471.

А. Д. Яшин

Московский городской психолого-педагогический
университет

E-mail: yashin.alexandr@ya.ru

Поступило

15.04.2011

Исправленный вариант

15.01.2013

А. К. Кощеева

Удмуртский государственный университет,
г. Ижевск,

Московский городской психолого-педагогический
университет

E-mail: kannakst@mail.ru