Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Абанин, Г. А. Семенова, Об одном обобщении ряда
Лорана, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 1, 3–12

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm914>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 13:22:40

УДК 517.5

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ РЯДА ЛОРАНА

А. В. Абанин, Г. А. Семенова

В статье исследуется вопрос о том, при каких условиях на область G в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ и последовательность точек $\Lambda = \{\lambda_k\}$ в дополнении $G^c = \overline{\mathbb{C}} \setminus G$ к области G любая функция $f(z)$, голоморфная в G и равная нулю в бесконечно удаленной точке $z = \infty$, если $\infty \in G$, допускает (возможно неединственное) представление в виде равномерно и абсолютно сходящегося внутри G ряда

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{k,j}}{(z - \lambda_k)^j}, \quad z \in G.$$

Если $\overline{G} \subset \mathbb{C}$ или $G^c \subset \mathbb{C}$, то такое разложение имеет место тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ система кругов $\{K(\lambda_k, \text{dist}(\lambda_k, \partial G) + \varepsilon)\}_{\lambda_k \in \Lambda}$ покрывает ∂G .

Библиография: 15 названий.

1. Введение. Возможность представления аналитических функций рядами простейших дробей вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z - \lambda_k}, \quad a_k, \lambda_k \in \mathbb{C}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty, \quad (1)$$

а также различные задачи, связанные с такими представлениями, исследовались многими авторами (см., например, [1]–[6]). Известно [5], что ни для одной области G расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ не существует такой последовательности $\{\lambda_k\}$, чтобы каждую функцию из $H_0(G)$ можно было представить в виде суммы ряда (1) (здесь и далее $H_0(G)$ – пространство всех функций, аналитических в G и исчезающих в бесконечно удаленной точке, если она принадлежит G). Более того, последнее невозможно также ни для одной системы дробей вида $\{(z - \lambda_k)^{-j} : j = 1, 2, \dots, j_k; k \in \mathbb{N}\}$, если $\sup\{j_k : k \in \mathbb{N}\} < +\infty$. С другой стороны, в [7], [8] установлен следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть F – континуум в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, G – открытое дополнение F до расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, $\{\lambda_k\}$ – плотная в F последовательность точек. Если $f(z)$ аналитична в G и $f(\infty) = 0$, то существуют функции $f_1(z), \dots, f_k(z), \dots$ такие, что $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$, причем ряд сходится

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00178.

равномерно на каждом замкнутом в G множестве, а функция $f_k(z)$ регулярна всюду, кроме λ_k ($k = 1, 2, \dots$).

В процессе доказательства в [8] установлено фактически, что

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{k,j}}{(z - \lambda_k)^j}, \quad z \in G, \quad (2)$$

причем ряд сходится абсолютно в пространстве $H_0(G)$ при наделении его естественной топологией пространства Фреше. В случае, когда F состоит из одной точки $a \in \mathbb{C}$, имеем разложение произвольной функции, аналитической в $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{a\}$ и исчезающей в бесконечности, в ряд Лорана.

В настоящей работе устанавливаются связывающие между собой область G расширенной комплексной плоскости $\hat{\mathbb{C}}$ и распределение точек $\{\lambda_k\}$ в ее дополнении до $\mathbb{C}$ критерии того, что для каждой функции f из $H_0(G)$ справедливо абсолютно сходящееся в $H_0(G)$ разложение типа (2).

2. Формулировка основного результата. Пусть G – область в $\hat{\mathbb{C}}$, отличная от всей расширенной плоскости $\hat{\mathbb{C}}$; $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность областей в $\hat{\mathbb{C}}$, исчерпывающая G изнутри (т. е. $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = G$ и $\overline{G_n} \subset G_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, где замыкание берется в $\hat{\mathbb{C}}$). Символом $H_{c,0}(G_n)$ обозначим пространство всех функций, аналитических в G_n , непрерывных в $\overline{G_n}$ и исчезающих в бесконечно удаленной точке, если она принадлежит G_n . $H_{c,0}(G_n)$ наделяется топологией, задаваемой нормой $\|f\|_n := \max\{|f(z)| : z \in \partial G_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $H_0(G)$ плотно в каждом $H_{c,0}(G_n)$, то $H_0(G)$ – так называемый (см. [9]) приведенный проективный предел банаховых пространств $H_{c,0}(G_n)$ относительно операций сужения. Как известно, введенная топология не зависит от выбора исчерпывающей G последовательности областей $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ и может быть задана набором преднорм $p_T(f) := \max\{|f(z)| : z \in T\}$, где T – произвольный компакт в G . В силу этого обстоятельства мы имеем возможность проводить рассуждения для какой-либо фиксированной последовательности областей $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$, исчерпывающей G изнутри, подчиняя ее, если потребуется, дополнительным ограничениям.

Для произвольной точки $\lambda \in \mathbb{C}$ и множества $D \subset \hat{\mathbb{C}}$ обозначим через $\rho(\lambda, D)$ евклидово расстояние от λ до $D \setminus \{\infty\}$, а через $K(\lambda, r)$, где $0 < r < \infty$, – открытый круг с центром в λ радиуса r . Далее, символом $M(\lambda, D)$ будем обозначать множество точек из D , “реализующих” расстояние от λ до D , т. е. $M(\lambda, D) := \{z \in D : \rho(\lambda, D) = |z - \lambda|\}$. Если $\Lambda \subset \mathbb{C}$, то полагаем $M(\Lambda, D) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} M(\lambda, D)$.

Основной результат работы составляет

ТЕОРЕМА 2. Пусть G – конечносвязная область в $\hat{\mathbb{C}}$, отличная от $\hat{\mathbb{C}}$ и от $\mathbb{C}$, $\Lambda = \{\lambda_k\}$ – не более чем счетное множество точек из $\mathbb{C} \setminus G$. Следующие условия эквивалентны:

- (i) каждую функцию $f(z)$ из $H_0(G)$ можно представить в виде суммы ряда (2), абсолютно сходящегося в $H_0(G)$, (т. е. $\sum_k \sum_{j=1}^{\infty} |a_{k,j}| (\rho(\lambda_k, T))^{-j}$ сходится для любого компакта T из G);
- (ii) для любого компакта $S \subset G$ найдется такой компакт $T \subset G$, что система кругов $\{K(\lambda_k, \rho(\lambda_k, S))\}_{\lambda_k \in \Lambda}$ покрывает $G \setminus T$.

В случае, когда G ограничена или содержит бесконечно удаленную точку, (i) и (ii) равносильны такому условию:

(iii) для любого $\varepsilon > 0$ система кругов $\{K(\lambda_k, \rho(\lambda_k, \partial G) + \varepsilon)\}_{\lambda_k \in \Lambda}$ покрывает ∂G .

А если дополнительно ко всему известно, что Λ ограничено, то еще и такому условию:

(iv) $M(\overline{\Lambda}, \partial G) = \partial G$, где $\overline{\Lambda}$ – замыкание Λ в $\mathbb{C}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Ниже будет показано, что все дополнительные требования (конечности, ограниченности G или ее дополнения до $\widehat{\mathbb{C}}$, а также ограниченности Λ) существенны для справедливости соответствующих эквивалентностей.

3. Функциональный критерий. Доказательство теоремы 2 базируется на применении теории абсолютно представляющих систем [10], которая позволяет свести задачу о представлениях вида (2) к двойственной задаче аналитического продолжения с равномерными оценками. Для формулировки и доказательства соответствующего критерия потребуются некоторые вспомогательные обозначения, определения и результаты.

Пусть G – область в $\widehat{\mathbb{C}}$, G^c – ее дополнение до $\widehat{\mathbb{C}}$, $H_0(G^c)$ – пространство ростков аналитических на замкнутом множестве G^c функций, исчезающих в бесконечно удаленной точке, если она принадлежит G^c , наделенное топологией индуктивного предела относительно операций вложения в него банаховых пространств $H_{c,0}(\overline{G}_n^c)$.

Символом $H'_0(G)$ обозначим сильное сопряженное с $H_0(G)$ пространство. Топологически оно представляет собой внутренний индуктивный предел банаховых пространств

$$E_n = \{\Phi \in H'_0(G) : \|\Phi\|'_n = \sup\{|\Phi(f)| : f \in H_0(G), \|f\|_n \leq 1\} < \infty\},$$

где $n \in \mathbb{N}$. Как известно [11] (см. также [12]), преобразование Коши

$$L: \Phi \in H'_0(G) \rightarrow \Phi_z \left(\frac{1}{z - \lambda} \right) =: \varphi(\lambda), \quad \lambda \in G^c,$$

является топологическим изоморфизмом $H'_0(G)$ на $H_0(G^c)$. При этом в силу факторизационной теоремы Гротендика [13, теорема 6.5.1]

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} \mid L: E_n \rightarrow H_{c,0}(\overline{G}_m^c) \quad \text{и} \quad L^{-1}: H_{c,0}(\overline{G}_n^c) \rightarrow E_m \quad (3)$$

– непрерывные операторы.

Для системы $F(\Lambda) := \{(z - \lambda_k)^{-j} : j \in \mathbb{N}, \lambda_k \in \Lambda\}$ введем в рассмотрение подпространства в $H_0(G^c)$

$$F_{\Lambda,n} = \left\{ \varphi \in H_0(G^c) : |\varphi|_{\Lambda,n} = \sup_k \sup_{j \in \mathbb{N}} \frac{|\varphi^{(j-1)}(\lambda_k)|}{(j-1)!} (\rho(\lambda_k, \partial G_n))^j < \infty \right\},$$

и в $H'_0(G)$

$$E_{\Lambda,n} := \left\{ \Phi \in H'_0(G) : |\Phi|'_{\Lambda,n} := \sup_k \sup_{j \in \mathbb{N}} \frac{|\Phi_z((z - \lambda_k)^{-j})|}{\|(z - \lambda_k)^{-j}\|_n} < \infty \right\},$$

где $n = 1, 2, \dots$.

Напомним еще, что система $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ элементов локально выпуклого пространства H называется *абсолютно представляющей* в H [10], если каждый элемент x из H можно представить (не обязательно единственным способом) в виде суммы ряда $x = \sum_{m=1}^{\infty} c_m x_m$ (c_m – скаляры), абсолютно сходящегося в H . В соответствии с этим определением условие (i) теоремы 2 означает, что $F(\Lambda)$ – абсолютно представляющая в $H_0(G)$ система.

ТЕОРЕМА 3. *Для того чтобы система $F(\Lambda)$ была абсолютно представляющей в $H_0(G)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $n \in \mathbb{N}$ нашлись такие $m = m(n) \in \mathbb{N}$ и $A = A(n) > 0$, чтобы каждая функция φ из $F_{\Lambda,n}$ обладала аналитическим продолжением в $\overline{G}_m^c$, непрерывным в G_m^c , и для этого продолжения имела место равномерная по φ оценка*

$$\|\varphi\|_m \leq A|\varphi|_{\Lambda,n}. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с теоремой 3 главы 1 из [10] $F(\Lambda)$ – абсолютно представляющая в $H_0(G)$ система в том и только том случае, когда

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists p \in \mathbb{N} \mid E_{\Lambda,n} \hookrightarrow E_p \quad (5)$$

(здесь и далее $\hookrightarrow$ – символ непрерывного вложения). Прямой подсчет показывает, что если φ из $H_0(G^c)$ и Φ из $H'_0(G)$ связаны преобразованием Коши $\varphi = L(\Phi)$, то для любых $\lambda \in \mathbb{C} \setminus G$, $j \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$

$$\Phi_z((z - \lambda)^{-j}) = \frac{\varphi^{(j-1)}(\lambda)}{(j-1)!} \quad \text{и} \quad \|(z - \lambda)^{-j}\|_n = (\rho(\lambda, \partial G_n))^{-j}.$$

Поэтому $L: E_{\Lambda,n} \rightarrow F_{\Lambda,n}$ – изоморфный оператор, сохраняющий норму, и, следовательно, (5) можно переписать так:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists p \in \mathbb{N} \mid L^{-1}(F_{\Lambda,n}) \hookrightarrow E_p.$$

Применив (3), получим отсюда, что $F(\Lambda)$ тогда и только тогда является абсолютно представляющей в $H_0(G)$ системой, когда

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} \mid F_{\Lambda,n} \hookrightarrow H_{c,0}(\overline{G}_m^c),$$

а это эквивалентно тому, что каждая функция φ из $F_{\Lambda,n}$ обладает аналитическим продолжением в $\overline{G}_m^c$, непрерывным в G_m^c , и для этого продолжения справедлива равномерная по φ оценка (4).

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 3 имеет место также и для более общих систем, чем $F(\Lambda)$, а именно для $F_J(\Lambda) := \{(z - \lambda_k)^{-j} : j \in J_k, \lambda_k \in \Lambda\}$, где $J = \{J_k\}$, а J_k – произвольные подмножества натуральных чисел. Ясно, что при этом в формулировке следует естественным образом изменить определение $F_{\Lambda,n}$ и $|\varphi|_{\Lambda,n}$, а доказательство остается прежним. Мы ограничились здесь случаем $F(\Lambda) = F_{\{\mathbb{N}\}}(\Lambda)$, поскольку содержательные результаты удалось установить лишь для таких систем. Следует отметить, что это ограничение вызвано также существом дела. Например, если G – внешность замкнутого круга $\{z : |z - \lambda| \leq R\}$, $0 \leq R < \infty$, Λ состоит ровно из одной точки $\lambda \in \mathbb{C}$ (центра круга), то по теореме Лорана система степеней $\{(z - \lambda)^{-j} : j \in J\}$ является абсолютно представляющей в $H_0(G)$ в том и только том случае, когда $J = \mathbb{N}$ (очевидно, в этой ситуации она будет базисом).

4. Доказательство теоремы 2. Пусть выполнено условие (i). Зафиксируем произвольный компакт $S \subset G$ и найдем такое $n \in \mathbb{N}$, чтобы $S \subset \overline{G}_n$. При каждом z из $G \setminus \bigcup_k K(\lambda_k, \rho(\lambda_k, S))$ рассмотрим функцию $\varphi_z(\lambda) = (z - \lambda)^{-1} \in H_0(G^c)$. Так как $|z - \lambda_k| \geq \rho(\lambda_k, S) \geq \rho(\lambda_k, \partial G_n)$, то

$$\sup_k \sup_{j \in \mathbb{N}} \frac{|\varphi_z^{(j-1)}(\lambda_k)|}{(j-1)!} (\rho(\lambda_k, \partial G_n))^j = \sup_k \sup_{j \in \mathbb{N}} \left(\frac{\rho(\lambda_k, \partial G_n)}{|z - \lambda_k|} \right)^j \leq 1.$$

Тогда в соответствии с теоремой 3 каждая функция $\varphi_z(\lambda)$ обладает аналитическим продолжением в некоторое $\overline{G}_m^c$, являющимся к тому же непрерывным в G_m^c . А для этого необходимо и достаточно, чтобы рассматриваемые z лежали в G_m . Таким образом, $G \setminus \bigcup_k K(\lambda_k, \rho(\lambda_k, \partial G_n))$ вложено в G_m и, тем более, $G \setminus \overline{G}_m$ вложено в $\bigcup_k K(\lambda_k, \rho(\lambda_k, S))$. Остается положить $T = \overline{G}_m$ и условие (ii) выполнено.

Пусть имеет место (ii). По условию G имеет конечную связность, которую мы обозначим через s . Тогда в соответствии с [14, с. 21, следствие] можно считать, что каждая область G_n имеет ту же связность и ограничена попарно непересекающимися контурами $\Gamma_{n,1}, \dots, \Gamma_{n,s}$, которые ограничивают также соответствующие компоненты связности $Q_{n,1}, \dots, Q_{n,s}$ замкнутого множества G_n^c , упорядоченные в соответствии с правилом $Q_{n+1,r} \subset Q_{n,r}$ ($r = 1, \dots, s; n = 1, 2, \dots$).

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим компакт ∂G_n . По условию (ii) найдется компакт T из G такой, что $\{K(\lambda_k, \rho(\lambda_k, \partial G_n))\}_{\lambda_k \in \Lambda}$ покрывает $G \setminus T$. Выберем $m \in \mathbb{N}$ так, чтобы $T \subset G_m$. Тогда эта система кругов покрывает также $G \setminus G_m$. Поскольку $\partial G_m \subset G$ и $\partial G_m \cap G_m = \emptyset$, то

$$\bigcup_k K(\lambda_k, \rho(\lambda_k, \partial G_n)) \supset \partial G_m. \quad (6)$$

Теперь рассмотрим произвольную функцию $\varphi \in F_{\Lambda,n}$. При любом фиксированном k и произвольном $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{|\varphi^{(j-1)}(\lambda_k)|}{(j-1)!} |z - \lambda_k|^{j-1} \leq \frac{|\varphi|_{\Lambda,n}}{\rho(\lambda_k, \partial G_n)} \left(\frac{|z - \lambda_k|}{\rho(\lambda_k, \partial G_n)} \right)^{j-1}, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (7)$$

Отсюда следует, что ряд Тейлора функции φ с центром в точке λ_k сходится по крайней мере в круге $K(\lambda_k, \rho(\lambda_k, \partial G_n))$. Обозначим через $r(k)$ номер (по r) той компоненты $Q_{n,r}$, в которую попало λ_k . Этот номер, очевидно, не зависит от n . Далее, поскольку $\varphi \in H_0(G^c)$, имеется такое $p = p(\varphi) \in \mathbb{N}$, что $\varphi \in H_{c,0}(G_p^c)$. Пусть φ_r – сужение φ на $Q_{p,r}$, являющееся аналитической внутри $Q_{p,r}$ и непрерывной вплоть до $\Gamma_{p,r}$ функцией ($r = 1, \dots, s$). Тогда, так как круг $K(\lambda_k, \rho(\lambda_k, \partial G_n))$ попадает только в область $\text{int } Q_{n,r(k)}$ и так как $(\text{int } Q_{p,r}) \cup (\bigcup_{k, r(k)=r} K(\lambda_k, \rho(\lambda_k, \partial G_n)))$ – область, которую мы обозначим символом $D_{p,r,n}$, то функция

$$\tilde{\varphi}_r(z) = \begin{cases} \varphi_r(z), & z \in Q_{p,r}, \\ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_r^{(j-1)}(\lambda_k)}{(j-1)!} (z - \lambda_k)^{j-1}, & z \in K(\lambda_k, \rho(\lambda_k, \partial G_n)), \end{cases}$$

где k пробегает множество $\{k: r(k) = r\}$, определена корректно и является аналитическим продолжением φ_r в область $D_{p,r,n}$. В соответствии с (6) $D_{p,r,n}$ содержит контур $\Gamma_{m,r}$ при некотором $m = m(n)$. Тогда функция

$$\psi_r(z) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{m,r}} \frac{\tilde{\varphi}_r(t)}{t-z} dt, & z \in \text{int } Q_{m,r}, \\ \tilde{\varphi}_r(z), & z \in \Gamma_{m,r}, \end{cases}$$

где обход $\Gamma_{m,r}$ в интеграле осуществляется в положительном относительно $Q_{m,r}$ направлении, будет аналитическим продолжением φ_r в область $\text{int } Q_{m,r}$, непрерывным вплоть до $\Gamma_{m,r}$, а $\psi(z) := \psi_r(z)$, $z \in Q_{m,r}$, $r = 1, \dots, s$, – аналитическим продолжением φ в $\overline{G}_m^c$, непрерывным в G_m^c .

Выделим конечное подпокрытие: $\bigcup_{k=1}^l K(\lambda_k, \rho(\lambda_k, \partial G_n)) \supset \partial G_m$ (это возможно, так как ∂G_m – компакт в $\mathbb{C}$). Функция

$$\gamma(t) := \min\{|t - \lambda_k|/\rho(\lambda_k, \partial G_n): 1 \leq k \leq l\}$$

непрерывна в $\mathbb{C}$ и принимает на ∂G_m значения, строго меньшие 1. Тогда

$$q_n := \max\{\gamma(t): t \in \partial G_m\} < 1$$

и, используя (7), получим для любой функции φ из $F_{\Lambda,n}$

$$\|\varphi\|_m \leq |\varphi|_{\Lambda,n} \left(\min_{1 \leq k \leq l} \rho(\lambda_k, \partial G_n) \right)^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} q_n^{j-1} = A |\varphi|_{\Lambda,n},$$

где $A = (1 - q_n)^{-1} (\min_{1 \leq k \leq l} \rho(\lambda_k, \partial G_n))^{-1}$ зависит только от n . По теореме 3 отсюда следует, что $F(\Lambda)$ – абсолютно представляющая в $H_0(G)$ система, т.е. выполнено (i). Таким образом, (ii) $\iff$ (i), и, значит, первые два условия теоремы равносильны между собой.

Предположим, что G ограничена или содержит бесконечно удаленную точку. Ясно, что это предположение эквивалентно ограниченности ∂G . Покажем, что (ii) $\implies$ (iii).

Допустим, что выполнено (ii). Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как ∂G – компакт в $\mathbb{C}$, имеется компакт S из G , для которого

$$\rho(z, S) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall z \in \partial G. \quad (8)$$

Пусть $\xi = \xi(k) \in \partial G$ таково, что $|\lambda_k - \xi| = \rho(\lambda_k, \partial G)$. В силу (8) имеется $\eta = \eta(k) \in S$ с $|\xi - \eta| < \varepsilon/2$. Отсюда $|\lambda_k - \eta| < \rho(\lambda_k, \partial G) + \varepsilon/2$ и, следовательно, $\rho(\lambda_k, S) < \rho(\lambda_k, \partial G) + \varepsilon/2$. То есть, для любого λ_k из Λ имеет место вложение

$$K(\lambda_k, \rho(\lambda_k, S)) \subset K\left(\lambda_k, \rho(\lambda_k, \partial G) + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

По условию (ii) для рассматриваемого компакта S найдется такой компакт T из G , что система кругов $\{K(\lambda_k, \rho(\lambda_k, S)): \lambda_k \in \Lambda\}$ покрывает $G \setminus T$ (можно считать, что $T \supset S$). Тем более этим свойством обладает $\{K(\lambda_k, \rho(\lambda_k, \partial G) + \varepsilon/2): \lambda_k \in \Lambda\}$. Отсюда, очевидно, следует справедливость (iii).

Пусть, обратно, имеет место (iii). Возьмем любой компакт $S \subset G$ и обозначим $\rho(S, \partial G) = \delta$. Из компактности ∂G в $\mathbb{C}$ следует, что существует компакт T , $S \subset T \subset G$, для которого

$$\rho(z, \partial G) \leq \frac{\delta}{2} \quad \forall z \in G \setminus T. \quad (9)$$

По условию (iii) $\{K(\lambda_k, \rho(\lambda_k, \partial G) + \delta/2) : \lambda_k \in \Lambda\}$ покрывает ∂G . Тогда из (9) заключаем, что $\{K(\lambda_k, \rho(\lambda_k, \partial G) + \delta) : \lambda_k \in \Lambda\}$ покрывает $G \setminus T$. Оценим теперь $\rho(\lambda_k, S)$. Пусть $\xi \in S$ такова, что $|\lambda_k - \xi| = \rho(\lambda_k, S)$. Так как $\xi \in G$, а $\lambda_k \in \mathbb{C} \setminus G$, существует точка $\eta \in \partial G$, лежащая на отрезке, соединяющем ξ и λ_k . Отсюда $|\lambda_k - \xi| = |\lambda_k - \eta| + |\eta - \xi| \geq \rho(\lambda_k, \partial G) + \delta$ и, значит, $\rho(\lambda_k, S) \geq \rho(\lambda_k, \partial G) + \delta$. Следовательно, для любого k круг $K(\lambda_k, \rho(\lambda_k, S))$ содержит $K(\lambda_k, \rho(\lambda_k, \partial G) + \delta)$. Тогда в соответствии с предыдущим система кругов $\{K(\lambda_k, \rho(\lambda_k, S)) : \lambda_k \in \Lambda\}$ покрывает $G \setminus T$, т. е. выполнено (ii). Таким образом, (iii) $\implies$ (ii) и, окончательно, (iii) $\implies$ (ii) $\implies$ (i).

Предположим, наконец, что ∂G и Λ ограничены и покажем, что в этом случае (iii) эквивалентно (iv).

Условие (iv) можно переписать в таком виде: $\forall \xi \in \partial G \exists \lambda \in \bar{\Lambda} \mid \rho(\lambda, \partial G) = |\lambda - \xi|$. Тогда его отрицание равносильно тому, что $\exists \xi \in \partial G \mid \rho(\lambda, \partial G) < |\lambda - \xi|, \forall \lambda \in \bar{\Lambda}$. Так как $\bar{\Lambda}$ – компакт в $\mathbb{C}$, для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ $\rho(\lambda, \partial G) + \varepsilon_0 < |\lambda - \xi| \quad \forall \lambda \in \bar{\Lambda}$. Отсюда следует, что система кружков $\{K(\lambda_k, \rho(\lambda_k, \partial G) + \varepsilon_0) : \lambda_k \in \Lambda\}$ не содержит ξ и, значит, не покрывает ∂G . Таким образом, если не выполняется (iv), то неверно и (iii). Итак, (iii) $\implies$ (iv).

Предположим теперь, что (iv) справедливо. Тогда для каждой точки $\xi \in \partial G$ имеется $\lambda \in \bar{\Lambda}$ с $\rho(\lambda, \partial G) = |\lambda - \xi|$. Далее, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\lambda_k \in \Lambda$ с $|\lambda_k - \lambda| < \varepsilon/2$. Для этого λ_k в круге $K(\lambda_k, |\lambda - \xi| - \varepsilon/2)$ нет точек из ∂G (сюда включается и случай, когда $|\lambda - \xi| \leq \varepsilon/2$, т. е. когда этот круг пуст). Поэтому $\rho(\lambda_k, \partial G) \geq |\lambda - \xi| - \varepsilon/2$. Значит, ξ попадает в кружок $K(\lambda_k, \rho(\lambda_k, \partial G) + \varepsilon)$ и, следовательно, выполнено (iii). Теорема доказана.

5. Следствия. Примеры. Обсуждение результатов. В этом пункте приводятся более простые, чем в основном критерии (теореме 2), достаточные, а при дополнительных ограничениях на область G и множество Λ и необходимые, условия того, что по системе степеней простейших дробей $F(\Lambda)$ можно представить абсолютно сходящимся в $H_0(G)$ рядом произвольную функцию из $H_0(G)$. Кроме того, обсуждается взаимосвязь полученных результатов с цитированной во введении теоремой В. П. Хавина и строятся примеры, показывающие существенность предположений, фигурирующих в теореме 2.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть G конечносвязная область в $\hat{\mathbb{C}}$ ($G \neq \hat{\mathbb{C}}$), которая либо является ограниченной в $\mathbb{C}$, либо содержит бесконечно удаленную точку. Если множество $M(\Lambda, \partial G)$ плотно в ∂G , то выполнено условие (i) теоремы 2 о разложении.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $M(\Lambda, \partial G)$ плотно в ∂G и ∂G – компакт в $\mathbb{C}$, имеется такая конечная совокупность точек $\{z_k : k = 1, \dots, m\}$ из $M(\Lambda, \partial G)$, что кружки $K(z_k, \varepsilon)$ покрывают ∂G . По определению $M(\Lambda, \partial G)$ найдутся $\lambda_k \in \Lambda$ с $\rho(\lambda_k, \partial G) = |\lambda_k - z_k|$, $k = 1, \dots, m$ (возможно, разным z_k соответствует одна и та же точка из Λ). Так как $K(\lambda_k, \rho(\lambda_k, \partial G) + \varepsilon) \supset K(z_k, \varepsilon)$, система $\{K(\lambda_k, \rho(\lambda_k, \partial G) + \varepsilon)\}_{\lambda_k \in \Lambda}$ покрывает ∂G . Следовательно, выполнено условие (iii) теоремы 2, в соответствии с которой получаем требуемое.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть G – та же, что и в следствии 1, а $\Lambda \subset \partial G$. Тогда условие (i) теоремы 2 эквивалентно плотности Λ в ∂G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В рассматриваемом случае $M(\Lambda, \partial G) = \Lambda$. Поэтому достаточность плотности Λ в ∂G для (i) вытекает непосредственно из следствия 1. Аналогично, $M(\bar{\Lambda}, \partial G) = \bar{\Lambda}$ и необходимость плотности Λ в ∂G для (i) следует из теоремы 2 (см. условие (iv)).

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) В случае, когда G представляет собой внешность замкнутого круга произвольного радиуса $R \geq 0$ с центром в точке $\lambda \in \mathbb{C}$, следствие 1 – не что иное, как теорема Лорана о разложении любой функции, аналитической вне этого круга и исчезающей в бесконечности, в абсолютно сходящийся в $H_0(G)$ ряд вида $\sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - \lambda)^{-k}$. Ясно, что получить этот результат из теоремы 1 Хавина при $R > 0$ не удастся, так как в ней требуется, чтобы множество Λ , образующее систему дробей, было плотным в круге $\{z: |z - \lambda| \leq R\}$.

2) Для односвязных областей, когда в качестве континуума выступает ∂G , достаточная часть следствия 2 совпадает с утверждением теоремы 1, а необходимая представляет собой ее обращение.

3) Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, k = 1, \dots, m\}$, а область G представляет собой одну из компонент связности внешности в $\bar{\mathbb{C}}$ объединения замкнутых кругов $\bar{K}(\lambda_k, r_k)$, где $r_k \geq 0$, $k = 1, \dots, m$. Нетрудно видеть, что в данной ситуации $M(\Lambda, \partial G) = \partial G$ и по следствию 1 каждую функцию из $H_0(G)$ можно представить в виде суммы ряда (2) (k при этом изменяется в пределах от 1 до m). Отметим, что этот пример был указан авторам Ю.Ф. Коробейником в связи с одним неточным утверждением, анонсированным в [15]. Именно, в теореме 3 из [15] утверждалось, в частности, что в случае односвязной ограниченной области в $\mathbb{C}$ условие плотности Λ в ∂G (Λ не обязательно содержится в ∂G) необходимо для того, чтобы система $F(\Lambda)$ была абсолютно представляющей в $H_0(G)$. А это, как мы убедились, неверно. Следует сказать, что при доказательстве возможности представления каждой функции из $H_0(G)$ абсолютно сходящимся рядом (2) Коробейник исходил из других соображений, существенно учитывающих специфику рассмотренных в этом примере области G и множества Λ и основанных на использовании теоремы Пуанкаре–Ароншайна, которые не удастся применить в общей ситуации.

Рассмотрим теперь примеры, показывающие существенность дополнительных ограничений в теореме 2 для ее справедливости. Прежде чем привести первый из них, отметим, что из доказательства теоремы 2 следует, что импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) справедлива для произвольных, не обязательно конечносвязных, областей.

ПРИМЕР 1. Пусть G – бесконечносвязная область, полученная из единичного круга $K_1 = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ удалением точек $z_n = 1 - 1/n$ ($n = 1, 2, \dots$). Рассмотрим произвольное счетное всюду плотное в ∂K_1 множество Λ_1 и положим $\Lambda = \Lambda_1 \cup \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. Нетрудно видеть, что для G и Λ выполнено условия (ii) теоремы 2. Покажем теперь с помощью теоремы 3, что $F(\Lambda)$ не является абсолютно представляющей в $H(G)$.

В качестве исчерпывающей G последовательности областей возьмем $G_n = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1 - (n+1)^{-1} - (n+1)^{-2}\} \setminus \bigcup_{k=1}^n \bar{K}_n(z_k)$, где $\bar{K}_n(z_k) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_k| \leq (n+1)^{-3}\}$, $n = 1, 2, \dots$.

Рассмотрим последовательность функций

$$\varphi_l(\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda \in K_l(z_k), \quad k \leq l, \\ 0, & \text{если } |\lambda| > 1 - (l+1)^{-1} - (l+1)^{-2}, \end{cases}$$

$l = 1, 2, \dots$. Ясно, что для любого $l \in \mathbb{N}$ функция φ_l принадлежит $H_0(G^c)$ и

$$\sup_{\lambda_k \in \Lambda} \sup_{j \geq 1} \frac{|\varphi_l^{(j-1)}(\lambda_k)|}{(j-1)!} \rho^j(\lambda_k, \partial G_1) < 1.$$

Тогда если бы для G и Λ имело место условие (i) теоремы 2, то по теореме 3 каждая функция φ_l обладала бы аналитическим продолжением в некоторое $\overline{G}_m^c$, непрерывным в G_m^c , где m одно и то же для всех $l \in \mathbb{N}$. Последнее, однако, неверно хотя бы для функции φ_{m+1} , которая тождественно равна соответственно 1 и 0 в областях $K_{m+1}(z_{m+1})$ и $\{\lambda: |\lambda| > 1 - (m+2)^{-1} - (m+2)^{-2}\}$, лежащих в одной компоненте связности $\{\lambda: |\lambda| > 1 - (m+1)^{-1} - (m+1)^{-2}\}$ множества $\overline{G}_m^c$.

Итак, мы приходим к выводу, что условие конечной связности G существенно для справедливости импликации (ii) $\Rightarrow$ (i). Отметим, что, практически не меняя проведенных рассуждений, можно доказать, что для рассматриваемой в примере области G нет ни одной системы вида $F(\Lambda)$, являющейся абсолютно представляющей в $H(G)$.

ПРИМЕР 2. Пусть G – полоса $\{z \in \mathbb{C}: |\operatorname{Im} z| < 1\}$. В качестве Λ возьмем последовательность $\{\pm ik: k \in \mathbb{N}\}$. Так как при любом натуральном k верно равенство $\rho(\pm ik, \partial G) = k - 1$ и при любом $\varepsilon > 0$

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} K(\pm ik, k - 1 + \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}: |\operatorname{Im} z| > 1 - \varepsilon\},$$

для G и Λ выполнено условие (iii) теоремы 2. С другой стороны, условие (ii), а следовательно, и (i) этой теоремы места не имеют. В самом деле, достаточно в качестве S взять, например, отрезок мнимой оси $\{iy: |y| \leq 1/2\}$. Тогда $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} K(\pm ik, S) = \{z \in \mathbb{C}: |\operatorname{Im} z| > 1/2\}$ и условие (ii) нарушается. Таким образом, требование ограниченности ∂G существенно для справедливости импликации (iii) $\Rightarrow$ (i).

ПРИМЕР 3. Пусть G – квадрат $\{z \in \mathbb{C}: |\operatorname{Re} z| < 1, |\operatorname{Im} z| < 1\}$. Расположим λ_k на осях координат: $\Lambda := \{\pm k, \pm ik \mid k \in \mathbb{N}\}$. Легко видеть, что $\overline{\Lambda} = \Lambda$, $M(\overline{\Lambda}, \partial G)$ состоит всего из четырех точек $\pm 1, \pm i$, значит, условие (iv) теоремы 2 не выполняется. Тем не менее, ясно, что (iii), а тогда и (i) в данном случае выполнены. То есть, дополнительное требование ограниченности Λ в теореме 2 необходимо для эквивалентности (i) и (iv).

В заключение остановимся коротко на вопросах существования абсолютно представляющих в $H_0(G)$ систем вида $F(\Lambda)$ и единственности представлений вида (2) для элементов из $H_0(G)$.

В соответствии со следствием 2 для любой конечносвязной области $G \neq \widehat{\mathbb{C}}$, либо являющейся ограниченной в $\mathbb{C}$, либо содержащей бесконечно удаленную точку, всегда имеется система $F(\Lambda)$, по которой можно представить в виде абсолютно сходящегося в $H_0(G)$ ряда (2) произвольную функцию из $H_0(G)$. Для этого достаточно взять всюду плотное в ∂G не более чем счетное множество Λ . Однако если G не содержит бесконечно удаленную точку, но является неограниченной в $\mathbb{C}$, то для нее уже может и не существовать абсолютно представляющей в $H(G)$ (в данном случае $H_0(G) = H(G)$) системы $F(\Lambda)$. Например, допустим, что область G в $\mathbb{C}$, отличная от всей плоскости, содержит полуплоскость. Для определенности пусть $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z > 0\} \subset G$. Тогда для компакта $\Pi = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2, |\operatorname{Im} z| \leq 1\}$ в G $\rho(\lambda, \partial \Pi) = \rho(\lambda, I)$, где

$I = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 1, |\operatorname{Im} z| \leq 1\}$, $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$. Поэтому ни одна точка вещественной оси, лежащая правее $z = 1$, не покрывается системой кругов $\{K(\lambda, \rho(\lambda, \partial\Pi))\}$, когда λ пробегает полуплоскость $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ и, тем более, когда $\lambda \in \mathbb{C} \setminus G$. Это означает, что для всего $\mathbb{C} \setminus G$ не выполнено условие (ii) теоремы 2, а следовательно, ни для одного не более чем счетного множества из $\mathbb{C} \setminus G$ не имеет места и условие (i) этой теоремы.

Единственность представления (2) произвольной функции из $H_0(G)$ существенно зависит от области G и структуры Λ . Например, если G – внешность некоторого круга, а Λ состоит лишь из одной точки – центра этого круга, то по теореме Лорана имеем единственность подобных представлений. С другой стороны, если, к примеру, G – внешность объединения двух кругов: $\{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 1\}$ и $\{z \in \mathbb{C}: |z - 1| \leq 1\}$, то по следствию 1 система $\{z^{-j}, (z - 1)^{-j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ является абсолютно представляющей в $H_0(G)$. При этом функция $f(z) = 1/z$ имеет, по крайней мере, два различных представления по этой системе: $1/z$ и $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} (z - 1)^{-j}$, абсолютно сходящихся в $H_0(G)$. Другие примеры подобной неединственности хорошо известны и приведены, например, в [5]–[7].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Wolff J. Sur les séries $\sum_{k=1}^{\infty} A_k/(z - \alpha_k)$ // C. R. Acad. Sci. 1921. V. 173. P. 1327–1328.
- [2] Denjoy A. Sur les séries de fractions rationnelles // Bull. Soc. Math. France. 1924. V. 52. P. 418–434.
- [3] Гончар А. А. О квазианалитическом продолжении аналитических функций через жорданову дугу // Докл. АН СССР. 1966. Т. 166. № 5. С. 1028–1031.
- [4] Леонтьева Т. А. Представление функций, аналитических в замкнутой области, рядами рациональных функций // Матем. заметки. 1968. Т. 4. № 2. С. 191–200.
- [5] Коробейник Ю. Ф. К вопросу о разложении аналитических функций в ряды по рациональным функциям // Матем. заметки. 1982. Т. 31. № 5. С. 723–737.
- [6] Сибилев Р. В. Теорема единственности для рядов Вольфа–Данжуа // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7. № 1. С. 170–199.
- [7] Хавин В. П. Об одной задаче В. В. Голубева // Докл. АН СССР. 1959. Т. 126. № 3. С. 511–513.
- [8] Хавин В. П. Один аналог ряда Лорана // Исследования по совр. пробл. теории функций компл. переменного. М.: ГИФМЛ, 1961. С. 121–131.
- [9] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: Физматгиз, 1959.
- [10] Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы // УМН. 1981. Т. 36. № 1. С. 73–126.
- [11] Köthe G. Dualität in der Funktionentheorie // J. Reine Angew. Math. 1953. V. 191. P. 30–49.
- [12] Хавин В. П. Пространства аналитических функций // Итоги науки. Матем. анализ. М.: Инст. научн. информ., 1966. С. 76–164.
- [13] Эдвардс Р. Функциональный анализ. М.: Мир, 1969.
- [14] Уолш Дж. Л. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М.: ИЛ, 1961.
- [15] Семенова Г. А. К вопросу о представлении аналитических функций рядами рациональных функций // Совр. методы в теории краевых задач. Тезисы докл. школы. Воронеж: ВГУ, 1997. С. 136.