Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Кудрявцева, Топология пространств функций
Морса на поверхностях, *Матем. заметки*, 2012, том 92,
выпуск 2, 241–261

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9140>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:21:16

Топология пространств функций Морса на поверхностях

Е. А. Кудрявцева

В настоящей работе изучается топология пространства $F = F(M)$ функций Морса на компактной гладкой ориентируемой двумерной поверхности M .

Библиография: 36 названий.

1. Введение. В настоящей работе изучается топология пространства $F = F(M)$ функций Морса, имеющих не менее $\chi(M) + 1$ отмеченных и пронумерованных критических точек, на компактной гладкой ориентируемой двумерной поверхности M . Предполагается, что у каждой функции $f \in F$ по меньшей мере $\chi(M) + 1$ критических точек помечены различными метками (пронумерованы). В работе [1] введено понятие оснащенной функции Морса, а в [1], [2] доказана гомотопическая эквивалентность $F \sim \mathbb{F}$ пространства F функций Морса и пространства $\mathbb{F} = \mathbb{F}(M)$ оснащенных функций Морса. В работе [3] построены комплекс $\mathbb{K}$ оснащенных функций Морса и содержащее его гладкое стратифицированное многообразие $\tilde{\mathcal{M}}$. Мы доказываем (теорема 2.5), что пространство F функций Морса гомотопически эквивалентно полиэдру $R \times \tilde{\mathcal{M}}$, где $R = R(M)$ – одно из следующих многообразий: $\mathbb{R}P^3$, S^1 , $S^1 \times S^1$ и точка (см. (2.1)). В работе [4] из утверждения 5.3 данной работы выводится, что комплекс $\mathbb{K}$ оснащенных функций Морса является сильным деформационным ретрактом многообразия $\tilde{\mathcal{M}}$. Таким образом, мы сводим изучение топологии пространства F функций Морса к комбинаторной задаче – изучению топологии многообразия $\tilde{\mathcal{M}}$ (или полиэдра $\mathbb{K}$). Гомологии многообразия $\tilde{\mathcal{M}}$ могут быть изучены с помощью свойств его естественной стратификации (см. утверждение 3.3). Этим методом мы получаем в случае $M = S^2$ неравенства Морса для чисел Бетти многообразия $\tilde{\mathcal{M}}$ и находим его эйлерову характеристику (следствие 2.6).

Вопросы о линейной связности пространств функций Морса на поверхности изучались в [5]–[10]. Исследовалось количество классов эквивалентности (см. определение 2.3) простых функций Морса на прямой [11] и на поверхности [12]–[14], а также топология классов изотопности функций Морса на поверхности [15]. В работах [16]–[25] функции Морса изучались в связи с задачей классификации (лиувиллевой, орбитальной) невырожденных интегрируемых гамильтоновых систем с двумя

Работа выполнена в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00748-а), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-1410.2012.1) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (грант № 14.740.11.0794).

степенями свободы. Васильев доказал параметрический h -принцип и изучил кольца когомологий пространств $\mathbb{R}^n$ -значных функций с “умеренными” особенностями на любом гладком многообразии (т.е. функций, не имеющих “слишком сложных” критических точек, где морсовская особенность и особенность типа рождение-уничтожение пары критических точек считаются не слишком сложными), см. работу [26] и ссылки в ней. Однако 1-параметрический h -принцип не выполнен для пространств функций Морса на некоторых компактных многообразиях размерности большей 5, см. [27], [28].

Статья имеет следующую структуру. В п. 2 формулируются основные результаты работы (теорема 2.5 и следствие 2.6). В п. 3 описывается конструкция из [3] гладкого стратифицированного $3q$ -мерного многообразия $\widetilde{\mathcal{M}}$, где q – количество седловых критических точек функций Морса из F (см. определение 2.1 и утверждение 3.3). В п. 4 доказывается, что многообразие $\widetilde{\mathcal{M}}$ гомеоморфно универсальному пространству модулей $\mathbb{F}^1/\mathcal{D}^0$ оснащенных функций Морса (определение 4.1 и утверждение 4.3). В п. 5 устанавливается гомеоморфизм $\mathbb{F}^1 \approx \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathcal{M}}$ (утверждение 5.3).

2. Основные понятия и формулировка основных результатов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 (обобщенное пространство функций Морса [1]). Пусть M – гладкая (т.е. класса C^∞) компактная связная поверхность, край которой пуст или не пуст, $\partial M = \partial^+ M \sqcup \partial^- M$, где $\partial^+ M$ – объединение некоторых граничных окружностей. Пусть $d^+, d^- \geq 0$ – число окружностей в $\partial^+ M$ и $\partial^- M$ соответственно.

(А) Обозначим через $C^\infty(M)$ пространство гладких (т.е. класса C^∞) вещественнозначных функций f на M . Обозначим через $C^\infty(M, \partial^+ M, \partial^- M) \subset C^\infty(M)$ подпространство, состоящее из таких функций $f \in C^\infty(M)$, что все их критические точки (т.е. такие точки $x \in M$, что $df|_x = 0$) принадлежат $\text{int } M$, а любая граничная точка $x \in \partial M$ имеет такую окрестность U в M , что $f(U \cap \partial M) = f(x)$, причем

$$\inf(f|_U) = f(x) \quad \text{при} \quad x \in \partial^- M \quad \text{и} \quad \sup(f|_U) = f(x) \quad \text{при} \quad x \in \partial^+ M.$$

(В) Пусть $\widetilde{F} := F_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ – пространство функций Морса f на поверхности $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, имеющих ровно p критических точек локальных минимумов, q седловых точек и r точек локальных максимумов. Обозначим через F^{num} пространство, полученное из $\widetilde{F}$ введением нумерации у некоторых из критических точек (называемых *отмеченными*) для функций Морса $f \in \widetilde{F}$. Обозначим количество отмеченных критических точек локальных минимумов, максимумов и седловых точек через $\widehat{p}$, $\widehat{r}$, $\widehat{q}$ соответственно, $0 \leq \widehat{p} \leq p$, $0 \leq \widehat{q} \leq q$, $0 \leq \widehat{r} \leq r$.

(С) Пусть $0 \leq p^* \leq \widehat{p}$, $0 \leq q^* \leq \widehat{q}$, $0 \leq r^* \leq \widehat{r}$. Обозначим

$$(p', p''; q', q''; r', r'') := (\widehat{p} - p^*, p - \widehat{p}; \widehat{q} - q^*, q - \widehat{q}; \widehat{r} - r^*, r - \widehat{r}).$$

Для каждой функции $f \in F^{\text{num}}$ обозначим через $\mathcal{C}_{f,\lambda}$ множество ее критических точек индекса λ и через $\widehat{\mathcal{C}}_{f,\lambda} \subseteq \mathcal{C}_{f,\lambda}$ – множество отмеченных критических точек, $\lambda = 0, 1, 2$. В множестве отмеченных (а потому занумерованных) критических точек обозначим через $\mathcal{C}_{f,0}^*$, $\mathcal{C}_{f,1}^*$, $\mathcal{C}_{f,2}^*$ подмножество, состоящее из первых p^* , q^* , r^* точек соответственно. Фиксируем “базисную” функцию $f_* \in F^{\text{num}}$. Пусть

$$F := F_{p',p'',q',q'',r',r''}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$$

– пространство функций Морса $f \in F^{\text{num}}$ на поверхности $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ таких, что $\mathcal{C}_{f,\lambda}^* = \mathcal{C}_{f_*,\lambda}^*$ для любого $\lambda = 0, 1, 2$. Пространство F мы наделим C^∞ -топологией, см. [1; § 4] и назовем его *обобщенным пространством функций Морса на поверхности* $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$. Обозначим через $F^1 \subset F$ подпространство в F , состоящее из таких функций Морса $f \in F$, что все локальные минимумы равны $f(\partial^- M) = -1$, а все локальные максимумы равны $f(\partial^+ M) = 1$.

Из теоремы Матвеева (см. [5]) и ее обобщения в [5] следует, что любое обобщенное пространство

$$F = F_{p^*, p', p''; 0, \hat{q}, q''; r^*, r', r''}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$$

функций Морса без закрепленных седловых точек (т.е. при $q^* = 0$) линейно связно.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 2.2. (А) Обозначим через $\mathcal{C}_\lambda := \mathcal{C}_{f,\lambda}^*$ множество фиксированных критических точек индекса λ (совпадающее для разных функций $f \in F$), $\lambda = 0, 1, 2$, положим $\mathcal{C} := \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$. Пусть

$$\mathcal{D}^\pm = \text{Diff}(M, \partial^+ M, \partial^- M, \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$$

– группа диффеоморфизмов поверхности M , переводящих каждое множество $\partial^\pm M$, $\partial^- M$, $\mathcal{C}_\lambda$ в себя, $\lambda = 0, 1, 2$.

Всюду далее поверхность M предполагается ориентируемой. Пусть $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}^\pm$ – группа сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов M , а $\mathcal{D}^0 = \text{Diff}^0(M, \mathcal{C})$ – множество всех диффеоморфизмов $h \in \mathcal{D}$, гомотопных id_M в классе гомеоморфизмов пары $(M, \mathcal{C})$. Пространства $\mathcal{D}^0 \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{D}^\pm$ наделим C^∞ -топологией, см. [1; § 4(б)].

(В) Обозначим через $\overline{M}$ замкнутую поверхность, полученную из поверхности M стягиванием в точку каждой граничной окружности. Обозначим через $\mathcal{T} \subset \mathcal{D}$ группу (называемую *группой Торелли*), состоящую из всех диффеоморфизмов $h \in \mathcal{D}$, переводящих в себя каждую компоненту края M и таких, что индуцированный гомеоморфизм $\bar{h}: \overline{M} \rightarrow \overline{M}$ индуцирует тождественный автоморфизм группы гомологий $H_1(\overline{M})$. Имеем $\mathcal{D}^0 \subset \mathcal{T}$.

Из результатов [29], [30] следует, что имеется гомотопическая эквивалентность

$$\mathcal{D}^0 \sim R_{\mathcal{D}^0}, \quad (2.1)$$

где $R_{\mathcal{D}^0}$ – одно из четырех многообразий, определяемое парой $(M, |\mathcal{C}|)$, а именно:

- $SO(3) = \mathbb{R}P^3$ (при $M = S^2$, $\mathcal{C} = \emptyset$);
- $SO(2) = S^1$ (при $0 \leq \chi(M) - |\mathcal{C}| \leq 1$ и $d^+ + d^- + |\mathcal{C}| > 0$);
- $T^2 = S^1 \times S^1$ (при $M = T^2$, $\mathcal{C} = \emptyset$);
- точка (при $\chi(M) < |\mathcal{C}|$)

(см., например, [31], [29]). В частности, $\mathcal{D}^0$ линейно связно. Кроме того,

$$\mathcal{D}^0 = \mathcal{T} \iff |\mathcal{C}| \leq \chi(M) + 1. \quad (2.2)$$

Импликация “ $\Leftarrow$ ” в (2.2) следует из [29], [30], а импликация “ $\Rightarrow$ ” следует из того, что в случае $|\mathcal{C}| \geq \chi(M) + 2$ существует диффеоморфизм $h \in \mathcal{T}$ (скручивание Дэна [32] вокруг разбивающей окружности), негомотопный id_M в пространстве гомеоморфизмов пары $(M, \mathcal{C})$, см. [33; лемма 2.1(1)] или [34].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. (А) Функции Морса $f, g \in F$ назовем *эквивалентными* (обозначение: $f \sim g$), если найдутся такие диффеоморфизмы $h_1 \in \mathcal{D}$ и $h_2 \in \text{Diff}^+(\mathbb{R})$, что $f = h_2 \circ g \circ h_1$ и h_1 сохраняет нумерацию критических точек. Пусть $[f]$ – класс эквивалентности.

(В) Две функции Морса f и g назовем *изотопными*, если они эквивалентны и $h_1 \in \mathcal{D}^0$ (т.е. h_1 изотопен тождественному), и обозначаем $f \sim_{\text{isot}} g$. Множество всех функций из F^1 , изотопных функции f , обозначим через $[f]_{\text{isot}}$.

Классификация функций Морса из F с точностью до (послойной) эквивалентности изучена в [22; гл. 2, теоремы 4 и 8], с точностью до изотопности в [2; лемма 1 и теорема 2] и [23; утверждение 1.1 и § 3].

ОБОЗНАЧЕНИЕ 2.4. Для любой функции Морса $f \in F$ рассмотрим граф G_f в поверхности $\text{int}(M)$, полученный из графа $f^{-1}(f(\mathcal{C}_{f,1}))$ выкидыванием всех компонент связности, не содержащих седловых критических точек (см. определение 2.1). Этот граф имеет q вершин (являющихся седловыми точками $y \in \mathcal{C}_{f,1}$), степени всех вершин равны 4, а значит, в графе $2q$ ребер. Если поверхность M ориентирована, то на ребрах графа G_f имеется естественная ориентация такая, что в любой внутренней точке ребра репер, составленный из положительно ориентированного касательного вектора к ребру и вектора $\text{grad } f$ (по отношению к какой-нибудь фиксированной римановой метрике), задает положительную ориентацию поверхности. Аналогично вводится ориентация на любой связной компоненте линии уровня $f^{-1}(a)$ функции f , не содержащей критическую точку, $a \in \mathbb{R}$. Обозначим через $s(f) := |f(\mathcal{C}_{f,1})|$ количество седловых критических значений функции f .

Пусть

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \widetilde{\mathcal{M}}_{p^*+d^-, p', p''; q^*, q', q''; r^*+d^+, r', r''}$$

– $3q$ -мерное многообразие, содержащее комплекс

$$\widetilde{\mathbb{K}} = \widetilde{\mathbb{K}}_{p^*+d^-, p', p''; q^*, q', q''; r^*+d^+, r', r''}$$

оснащенных функций Морса (см. п. 3 или [3; § 4]). Пусть

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{[f]_{\text{isot}}} \subset \widetilde{\mathcal{M}}_{\succeq [f]_{\text{isot}}}$$

– $(s([f]) + 2q)$ -мерный страт и его специальная окрестность в $\widetilde{\mathcal{M}}$, отвечающие классу изотопности $[f]_{\text{isot}}$ (см. утверждение 3.3 или [3; § 4]). Из [3] нетрудно выводится, что страт $\widetilde{\mathcal{M}}_{[f]_{\text{isot}}}$ имеет своим сильным деформационным ретрактом пространство орбит $(S^1)^{d([f])}/\Gamma_{[f]}$ соответствующего тора $(S^1)^{d([f])}$ по свободному действию конечной группы $\Gamma_{[f]}$ допустимыми автоморфизмами тора, см. [3; § 2].

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть M – связная компактная ориентируемая поверхность с разбиением края $\partial M = \partial^+ M \sqcup \partial^- M$ на положительные и отрицательные окружности. Рассмотрим обобщенные пространства

$$F = F_{p^*, p', p''; q^*, q', q''; r^*, r', r''}(M, \partial^+ M, \partial^- M), \quad F^1 \subset F$$

функций Морса на поверхности $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, см. определение 2.1. Пусть $\mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}$ – соответствующие пространства оснащенных функций Морса (см. определение 4.1). Предположим, что

$$\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r} > \chi(M) \quad (2.3)$$

(т.е. количество отмеченных критических точек превосходит $\chi(M)$). Тогда выполнены следующие утверждения.

(А) Имеются гомотопические эквивалентности и гомеоморфизм

$$F \sim F^1 \sim \mathbb{F} \sim \mathbb{F}^1 \approx \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathcal{M}} \quad (\sim R_{\mathcal{D}^0} \times \widetilde{\mathcal{M}}),$$

где $R_{\mathcal{D}^0}$ – одно из следующих многообразий: $\mathbb{R}P^3$, S^1 , $S^1 \times S^1$ и точка, см. (2.1).

(В) Для любой функции Морса $f \in F^1$ имеются гомотопические эквивалентности и гомеоморфизм

$$[f]_{\text{isot}} \sim \text{Forg}_1^{-1}([f]_{\text{isot}}) \approx \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathcal{M}}_{[f]_{\text{isot}}} \sim \mathcal{D}^0 \times ((S^1)^d / \Gamma_{[f]}) \quad (\sim R_{\mathcal{D}^0} \times ((S^1)^d / \Gamma_{[f]})),$$

где $\text{Forg}_1: \mathbb{F}^1 \rightarrow F^1$ – забывающее отображение, $\widetilde{\mathcal{M}}_{[f]_{\text{isot}}} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ и $(S^1)^d = (S^1)^{d([f])}$ – соответствующие $(s([f]) + 2q)$ -мерное подмногообразие и тор.

Пусть $\mathbb{k}$ – поле (например, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{Z}_p$). Для топологического пространства X рассмотрим его числа Бетти

$$\beta_j(X) := \dim_{\mathbb{k}} H_j(X; \mathbb{k})$$

и полином Пуанкаре

$$P(X, t) := \sum_{j=0}^{\infty} t^j \beta_j(X).$$

Следующее утверждение (аналогичное [3; следствие 2.7]) выводится из теоремы 2.5 и определения 3.2 стратифицированного многообразия $\widetilde{\mathcal{M}}$ стандартными методами теории Морса (см., например, [35; § 45]) при помощи фильтрации

$$\emptyset = \widetilde{\mathcal{M}}_{\geq q+1} \subset \widetilde{\mathcal{M}}_{\geq q} \subset \dots \subset \widetilde{\mathcal{M}}_{\geq 1} = \widetilde{\mathcal{M}}$$

и рассмотрения индуцированной стратификации специальной окрестности $\widetilde{\mathcal{M}}_{\geq [f]_{\text{isot}}}$ каждого страта $\widetilde{\mathcal{M}}_{[f]_{\text{isot}}}$ в $\widetilde{\mathcal{M}}$ (см. утверждение 3.3), где

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\geq s} := \bigcup_{s([f]) \geq s} \widetilde{\mathcal{M}}_{\geq [f]_{\text{isot}}} = \bigcup_{s([f]) \geq s} \widetilde{\mathcal{M}}_{[f]_{\text{isot}}}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.6. (А) Если количество $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r}$ отмеченных критических точек превосходит $\chi(M)$, то $\beta_j(F) = 0$ при любом $j \geq 3q + 2$.

(В) Пусть $\overline{M} = S^2$ (см. обозначение 2.2(В)), $p^* + q^* + r^* \leq \chi(M) + 1 \leq \widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r}$. Тогда $\mathcal{D} = \mathcal{D}^0$; стратифицированное $3q$ -мерное многообразие $\mathcal{M} := \widetilde{\mathcal{M}}$ состоит из конечного числа стратов $\mathcal{M}_{[f]} := \widetilde{\mathcal{M}}_{[f]_{\text{isot}}}$; имеется гомотопическая эквивалентность $F \sim R \times \mathcal{M}$, где R – одно из многообразий $\mathbb{R}P^3$, S^1 , S^1 и точка в зависимости

от значения $\chi(M) - (p^* + q^* + r^*) = 2, 1, 0, -1$; числа Бетти $\beta_j = \beta_j(\mathcal{M})$ многообразия $\mathcal{M}$ удовлетворяют неравенствам Морса–Смейла:

$$\beta_j - \beta_{j-1} + \beta_{j-2} - \beta_{j-3} + \cdots \leq q_j - q_{j-1} + q_{j-2} - q_{j-3} + \cdots, \quad j \geq 0,$$

где

$$Q(t) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j q_j := \sum_{[f] \in F^1/\sim} t^{q-s(f)} P(\mathcal{M}_{[f]}, t).$$

В частности, справедливы неравенства Морса:

$$\chi(\mathcal{M}) = (-1)^{q-1} |\{[f] \in F^1/\sim \mid s(f) = 1\}|, \quad \beta_j \leq q_j, \quad j \geq 0.$$

3. Комбинаторное построение многообразия $\widetilde{\mathcal{M}}$ согласно [3].

ОБОЗНАЧЕНИЕ 3.1. (А) Аналогично определению 2.1 и обозначению 2.2 обозначим через

$$\mathcal{C}_f := \mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,1} \cup \mathcal{C}_{f,2}, \quad \widehat{\mathcal{C}}_f := \widehat{\mathcal{C}}_{f,0} \cup \widehat{\mathcal{C}}_{f,1} \cup \widehat{\mathcal{C}}_{f,2}$$

множество всех критических точек и множество всех отмеченных критических точек соответственно функции $f \in F$. Имеем включения

$$\mathcal{C} \subseteq \widehat{\mathcal{C}}_f \subseteq \mathcal{C}_f \quad \text{и} \quad \mathcal{C}_\lambda \subseteq \widehat{\mathcal{C}}_{f,\lambda} \subseteq \mathcal{C}_{f,\lambda}$$

множеств фиксированных критических точек, отмеченных критических точек и всех критических точек (соответственно индекса λ) функции f , $\lambda = 0, 1, 2$.

(В) Пусть $\sigma, \tau \subset X$ – два непересекающихся подмножества топологического пространства X (например, две открытые клетки клеточного комплекса). Будем говорить, что σ *примыкает* к τ , и писать $\tau \prec \sigma$ (и $\bar{\tau} \prec \bar{\sigma}$), если $\tau \subset \partial\sigma := \bar{\sigma} \setminus \sigma$. Пишем $\tau \preceq \sigma$, если $\tau \prec \sigma$ или $\tau = \sigma$.

Шаг 1. Пусть $J = (J_1, \dots, J_s)$ – упорядоченное разбиение множества $\{1, \dots, q\}$ на s непустых подмножеств $J_1, \dots, J_s$ (т.е. $\{1, \dots, q\} = J_1 \sqcup \dots \sqcup J_s$), где $1 \leq s \leq q$. Определим числа $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_{s-1} < r_s = q$ и перестановку $\pi \in \Sigma_q$ условиями

$$J_1 = \{\pi_1, \dots, \pi_{r_1}\}, \quad J_2 = \{\pi_{r_1+1}, \dots, \pi_{r_2}\}, \quad \dots, \quad J_s = \{\pi_{r_{s-1}+1}, \dots, \pi_{r_s}\}, \quad (3.1)$$

$$\pi_1 < \dots < \pi_{r_1}, \quad \pi_{r_1+1} < \dots < \pi_{r_2}, \quad \dots, \quad \pi_{r_{s-1}+1} < \dots < \pi_{r_s}.$$

Если разбиение $\widehat{J}$ получается из разбиения $J = (J_1, \dots, J_s)$ путем измельчения (т.е. разбиения некоторых множеств J_k на несколько подмножеств), будем писать $\widehat{J} \prec J$.

Шаг 2. Для каждой функции Морса $f \in F$ рассмотрим множество

$$\mathcal{C}_{f,1} =: \{y_j\}_{j=1}^q \approx \{1, \dots, q\}$$

ее седловых критических точек (см. обозначение 3.1) и евклидово векторное пространство 0-коцепей

$$H_f^0 := C^0(\mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathcal{C}_{f,1}} \cong \mathbb{R}^q \quad (3.2)$$

со стандартной евклидовой метрикой. Рассмотрим в пространстве H_f^0 внутренность куба:

$$(-1; 1)^{\mathcal{C}_{f,1}} \approx (-1; 1)^q \subset \mathbb{R}^q.$$

Рассмотрим “вычисляющую” 0-коцепь

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}(f) := f|_{\mathcal{C}_{f,1}} = (c_1, \dots, c_q) \in (-1; 1)^{\mathcal{C}_{f,1}} \subset H_f^0,$$

т.е. функцию $\mathbf{c}: \mathcal{C}_{f,1} \rightarrow \mathbb{R}$, сопоставляющую любой седловой точке $y_j \in \mathcal{C}_{f,1}$ значение $c_j := f(y_j)$ функции f в этой точке, $1 \leq j \leq q$. Сопоставим 0-коцепи $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_q)$ число $s(\mathbf{c}) := |\{c_1, \dots, c_q\}|$ различных седловых значений и упорядоченное разбиение $J = J(\mathbf{c}) = (J_1, \dots, J_s)$ множества седловых точек $\mathcal{C}_{f,1} \approx \{1, \dots, q\}$, определяемое свойствами (3.1) и

$$c_{\pi_1} = \dots = c_{\pi_{r_1}} < c_{\pi_{r_1}+1} = \dots = c_{\pi_{r_2}} < \dots < c_{\pi_{r_{s-1}+1}} = \dots = c_{\pi_{r_s}}.$$

(То есть J – это отношение частичного порядка на множестве $\mathcal{C}_{f,1}$ седловых критических точек функции f , построенное по значениям функции $f|_{\mathcal{C}_{f,1}}$.)

В каждом классе изотопности $[f]_{\text{isot}} \in F^1 / \sim_{\text{isot}}$ отметим ровно одну функцию Морса f этого класса. Сопоставим классу изотопности $[f]_{\text{isot}}$ и любому разбиению J соответствующие страт и звездообразную область в кубе $(-1; 1)^{\mathcal{C}_{f,1}}$:

$$\begin{aligned} S_{f,J} &:= \{\mathbf{c}' \in (-1; 1)^{\mathcal{C}_{f,1}} \mid J(\mathbf{c}') = J\}, & S_{f,\leq J} &:= \{\mathbf{c}' \in (-1; 1)^{\mathcal{C}_{f,1}} \mid J(\mathbf{c}') \preceq J\}, \\ S_{[f]_{\text{isot}}} &= S_f := S_{f,J(\mathbf{c}(f))}, & S_{\succeq [f]_{\text{isot}}} &:= S_{f,\preceq J(\mathbf{c}(f))}. \end{aligned}$$

Рассмотрим также двойственные друг другу векторные пространства относительных 1-гомологий и относительных 1-когомологий над полем $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} H_{f,1} &:= H_1(M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}), \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{2q}, \\ H_f^1 &:= H^1(M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}), \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{R}}(H_{f,1}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{2q}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Рассмотрим ориентированный граф $G_f \subset M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$, см. обозначение 2.4. Он имеет $2q$ ребер, которые обозначим $e_1, \dots, e_{2q}$. Обозначим относительный гомологический класс ориентированного ребра e_i через $[e_i] \in H_{f,1}$, $1 \leq i \leq 2q$. Определим в векторном пространстве $H_f^1 \cong \mathbb{R}^{2q}$ выпуклое подмножество

$$U_{[f]_{\text{isot}}}^\infty = U_f^\infty := \{u \in H_f^1 \mid u([e_i]) > 0, 1 \leq i \leq 2q\}. \quad (3.4)$$

Через $\text{stab}_{\mathcal{D}^0} g$ обозначим группу изотропии элемента $g \in F^1$ относительно естественного правого действия группы $\mathcal{D}^0$ на F^1 , а через $(\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0$ обозначим ее подгруппу, состоящую из всех диффеоморфизмов поверхности M , сохраняющих функцию f и гомотопных id_M в классе гомеоморфизмов M , сохраняющих функцию f . Рассмотрим покомпонентное правое действие дискретной группы

$$\tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{isot}}} = \tilde{\Gamma}_f := (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f) / (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0 \quad (3.5)$$

на прямом произведении $S_{\succeq [f]_{\text{isot}}} \times U_{[f]_{\text{isot}}}^\infty$ индуцированными автоморфизмами пространств (3.2), (3.3). Согласно [3; 3.3] в случае (2.3) это действие свободно и дискретно, а пространства орбит

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\succeq [f]_{\text{isot}}}^{\text{st}} := (S_{\succeq [f]_{\text{isot}}} \times U_f^\infty) / \tilde{\Gamma}_f, \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{[f]_{\text{isot}}}^{\text{st}} := (S_{[f]_{\text{isot}}} \times U_f^\infty) / \tilde{\Gamma}_f \subset \widetilde{\mathcal{M}}_{\succeq [f]_{\text{isot}}}^{\text{st}} \quad (3.6)$$

являются $3q$ -мерным открытым многообразием и его $(s(f) + 2q)$ -мерным подмногообразием соответственно.

Шаг 3. Опишем взаимосвязь $3q$ -мерных многообразий $\widetilde{\mathcal{M}}_{\succeq[f]_{\text{isot}}}^{\text{st}}, \widetilde{\mathcal{M}}_{\succeq[g]_{\text{isot}}}^{\text{st}}$ для примыкающих классов изотопности $[f]_{\text{isot}} \prec [g]_{\text{isot}}$ (см. обозначение 3.1(B)). Пусть $f \in F^1$ – отмеченная функция своего класса изотопности, и пусть функция $\tilde{f} \in F^1$ получена малым возмущением функции $f \in F^1$, причем $\mathcal{C}_{\tilde{f}} = \mathcal{C}_f$. Обозначим через g отмеченную функцию класса изотопности $[\tilde{f}]_{\text{isot}}$, $J' := J(c(\tilde{f}))$, и через

$$h_{[f]_{\text{isot}}, J'} = h_{f, J'} := h_{\tilde{f}, g} \in \mathcal{D}^0$$

– диффеоморфизм, переводящий линии уровня функции g в линии уровня функции $\tilde{f}$ с сохранением направления роста (он существует ввиду изотопности функций $\tilde{f}, g$). Согласно [23; утверждение 1.1 и § 3] или [3] выполнено $J' \preceq J := J(c(f))$ и имеется сюръекция $\delta[f]_{\text{isot}}$ множества всех упорядоченных разбиений $J' \preceq J$ на множество всех классов изотопности $[g]_{\text{isot}} \succeq [f]_{\text{isot}}$ (см. обозначение 3.1(B)) такая, что

$$\delta[f]_{\text{isot}} : J' = J(c(\tilde{f})) = J((h_{f, J'}^{-1})^*(c(g))) \mapsto \delta_{J'}[f]_{\text{isot}} := [\tilde{f}]_{\text{isot}}. \quad (3.7)$$

Хотя сопоставление $([f]_{\text{isot}}, J') \mapsto h_{f, J'}$ не является однозначным (т.е. диффеоморфизм $h_{f, J'}$ зависит, вообще говоря, от возмущенной функции $\tilde{f}$ такой, что $\mathcal{C}_{\tilde{f}} = \mathcal{C}_f$ и $J(c(\tilde{f})) = J'$), но в силу [2; лемма 1] смежный класс $h_{f, J'}(\text{stab}_{\mathcal{D}^0} g)(\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_g))$ определен корректно, где через $\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_g) \subset \mathcal{D}^0$ обозначена группа диффеоморфизмов пары $(M, \mathcal{C}_g)$, гомотопных id_M в классе гомеоморфизмов пары.

Рассмотрим индуцированные изоморфизмы векторных пространств:

$$h_{f, J'}^* : H_f^0 \rightarrow H_g^0, \quad h_{f, J'}^* : H_f^1 \rightarrow H_g^1, \quad (3.8)$$

см. (3.2), (3.3). Рассмотрим в $(-1; 1)^{\mathcal{C}_{f, 1}}$ открытые $\tilde{\Gamma}_f$ -инвариантные подмножества

$$\partial_g S_{\succeq[f]_{\text{isot}}} = \partial_{[g]_{\text{isot}}} S_{\succeq[f]_{\text{isot}}} := \bigcup_{J' \in (\delta[f]_{\text{isot}})^{-1}([g]_{\text{isot}})} S_{f, \preceq J'} \subset S_{\succeq[f]_{\text{isot}}}.$$

Согласно [3; § 3], прямое произведение изоморфизмов в (3.8) индуцирует корректно определенное вложение $3q$ -мерных открытых многообразий:

$$\begin{aligned} \chi_{[f]_{\text{isot}}, [g]_{\text{isot}}} &= \chi_{f, g} : \partial_{[g]_{\text{isot}}} \widetilde{\mathcal{M}}_{\succeq[f]_{\text{isot}}}^{\text{st}} := ((\partial_g S_{\succeq[f]_{\text{isot}}}) \times U_f^\infty) / \tilde{\Gamma}_f \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{\succeq[g]_{\text{isot}}}^{\text{st}}, \\ \tilde{\Gamma}_f(c, u) &\mapsto \tilde{\Gamma}_g(h_{f, J'}^*(c), h_{f, J'}^*(u)), \quad (c, u) \in S_{f, \preceq J'} \times U_f^\infty, \end{aligned}$$

где $\delta_{J'}[f]_{\text{isot}} = [g]_{\text{isot}}$ (см. (3.5), (3.7)).

Шаг 4. Предположим, что отмеченные функции f всех классов изотопности $[f]_{\text{isot}}$ имеют одно и то же множество критических точек $\mathcal{C}_{f, \lambda} = \mathcal{C}_{f^*, \lambda}$ с учетом меток, $\lambda = 0, 1, 2$ (см. определение 2.1 (B, C) и шаг 2). Рассмотрим топологическое пространство

$$(F^1 / \sim_{\text{isot}})^{\text{discr}} \times (-1; 1)^{\mathcal{C}_{f^*, 1}} \times H_{f^*}^1 \approx (F^1 / \sim_{\text{isot}})^{\text{discr}} \times (-1; 1)^q \times \mathbb{R}^{2q},$$

где $(F^1 / \sim_{\text{isot}})^{\text{discr}} := F^1 / \sim_{\text{isot}}$ с дискретной топологией, и его подпространства

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbb{X}}_{\succeq} &:= \bigcup_{[f]_{\text{isot}} \in F^1 / \sim_{\text{isot}}} \{[f]_{\text{isot}}\} \times S_{\succeq[f]_{\text{isot}}} \times U_{[f]_{\text{isot}}}^\infty, \\ \widetilde{\mathbb{X}} &:= \bigcup_{[f]_{\text{isot}} \in F^1 / \sim_{\text{isot}}} \{[f]_{\text{isot}}\} \times S_{[f]_{\text{isot}}} \times U_{[f]_{\text{isot}}}^\infty \subset \widetilde{\mathbb{X}}_{\succeq}. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2 (МНОГООБРАЗИЕ $\widetilde{\mathcal{M}}$). Пусть $\widetilde{\mathcal{M}} := (\widetilde{\mathbb{X}}_{\geq}/\sim)/\sim_{\text{glue}}$ – пространство с фактортопологией, где отношения эквивалентности $\sim$, $\sim_{\text{glue}}$ на множествах $\widetilde{\mathbb{X}}_{\geq}$, $\widetilde{\mathbb{Y}}_{\geq} := \widetilde{\mathbb{X}}_{\geq}/\sim$ порождены следующими отношениями:

- (отношение $\sim$ на $\widetilde{\mathbb{X}}_{\geq}$) для каждого класса изотопности $[f]_{\text{isot}}$ рассмотрим проекцию

$$\{[f]_{\text{isot}}\} \times S_{\geq[f]_{\text{isot}}} \times U_{[f]_{\text{isot}}}^{\infty} \rightarrow \{[f]_{\text{isot}}\} \times \widetilde{\mathcal{M}}_{\geq[f]_{\text{isot}}}^{\text{st}} =: \mathbf{v}_{\geq[f]_{\text{isot}}}$$

(см. (3.6)) и назовем точки множества $\{[f]_{\text{isot}}\} \times S_{\geq[f]_{\text{isot}}} \times U_{[f]_{\text{isot}}}^{\infty} \sim$ -эквивалентными, если их образы при этой проекции совпадают; обозначим

$$\mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}} := \{[f]_{\text{isot}}\} \times \widetilde{\mathcal{M}}_{[f]_{\text{isot}}}^{\text{st}} \subset \mathbf{v}_{\geq[f]_{\text{isot}}} \subset \widetilde{\mathbb{Y}}_{\geq};$$

- (отношение $\sim_{\text{glue}}$ на $\widetilde{\mathbb{Y}}_{\geq}$; отображения инцидентности) для каждой пары примыкающих классов $[f]_{\text{isot}} \prec [g]_{\text{isot}}$ (см. обозначение 3.1) рассмотрим вложение соответствующих $3q$ -мерных открытых многообразий, называемое *отображением инцидентности* этой пары:

$$\chi_{[f]_{\text{isot}}, [g]_{\text{isot}}} : \partial_{[g]_{\text{isot}}} \widetilde{\mathcal{M}}_{\geq[f]_{\text{isot}}}^{\text{st}} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{\geq[g]_{\text{isot}}}^{\text{st}};$$

рассмотрим индуцированное вложение

$$\partial_{[g]_{\text{isot}}} \mathbf{v}_{\geq[f]_{\text{isot}}} := \{[f]_{\text{isot}}\} \times (\partial_{[g]_{\text{isot}}} \widetilde{\mathcal{M}}_{\geq[f]_{\text{isot}}}^{\text{st}}) \hookrightarrow \mathbf{v}_{\geq[g]_{\text{isot}}}$$

(которое тоже обозначим $\chi_{[f]_{\text{isot}}, [g]_{\text{isot}}}$); любую точку из $\partial_{[g]_{\text{isot}}} \mathbf{v}_{\geq[f]_{\text{isot}}} \subset \widetilde{\mathbb{Y}}_{\geq}$ и ее образ в $\mathbf{v}_{\geq[g]_{\text{isot}}} \subset \widetilde{\mathbb{Y}}_{\geq}$ при данном вложении назовем $\sim_{\text{glue}}$ -эквивалентными.

Пусть

$$p_X : \widetilde{\mathbb{X}}_{\geq} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}, \quad p_Y : \widetilde{\mathbb{Y}}_{\geq} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$$

– канонические проекции. Положим

$$\widetilde{\mathbb{Y}} := \widetilde{\mathbb{X}}_{\geq}/\sim \subset \widetilde{\mathbb{Y}}_{\geq}, \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{\geq[f]_{\text{isot}}} := p_Y(\mathbf{v}_{\geq[f]_{\text{isot}}}),$$

назовем $\widetilde{\mathcal{M}}_{[f]_{\text{isot}}} := p_Y(\mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}})$ *стратом* в $\widetilde{\mathcal{M}}$.

Так как $\widetilde{\mathbb{X}}_{\geq}$ – гладкое открытое $3q$ -мерное многообразие с естественной плоской аффинной связностью и группы $\widehat{\Gamma}_{[f]_{\text{isot}}}$ действуют на нем с сохранением связности, то $\widetilde{\mathbb{Y}}_{\geq}$ тоже является гладким открытым $3q$ -мерным многообразием с плоской аффинной связностью, причем пересечение любой его связной компоненты $\mathbf{v}_{\geq[f]_{\text{isot}}}$ с подмножеством $\widetilde{\mathbb{Y}} \subset \widetilde{\mathbb{Y}}_{\geq}$ является плоским $(s([f]) + 2q)$ -мерным подмногообразием.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3 [3; теорема 4.3]. В случае (2.3) пространство $\widetilde{\mathcal{M}} := \widetilde{\mathbb{Y}}_{\geq}/\sim_{\text{glue}}$ обладает структурой гладкого $3q$ -мерного многообразия и плоской аффинной связностью, гладкой относительно этой структуры. Для каждого класса изотопности $[f]_{\text{isot}}$ отображение

$$p_Y|_{\mathbf{v}_{\geq[f]_{\text{isot}}}} : \mathbf{v}_{\geq[f]_{\text{isot}}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$$

является гладким регулярным вложением гладких $3q$ -мерных многообразий, сохраняющим аффинную связность, а потому подмножество

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\succeq[f]_{\text{isot}}} = p_Y(\mathbf{v}_{\succeq[f]_{\text{isot}}}) \subset \widetilde{\mathcal{M}}$$

открыто. Отображение $p_Y|_{\widetilde{\mathcal{Y}}}: \widetilde{\mathcal{Y}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ биективно. В частности, страты $\widetilde{\mathcal{M}}_{[f]_{\text{isot}}} \subset \widetilde{\mathcal{M}}_{\succeq[f]_{\text{isot}}}$ попарно не пересекаются, являются плоскими $(s([f]) + 2q)$ -мерными подмногообразиями и покрывают все $\widetilde{\mathcal{M}}$. Дискретная группа $\mathcal{D}^\pm/\mathcal{D}^0$ действует на $\widetilde{\mathcal{M}}$ справа диффеоморфизмами, сохраняющими аффинную связность, стратификацию и систему открытых подмножеств $\widetilde{\mathcal{M}}_{\succeq[f]_{\text{isot}}} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ (называемых специальными окрестностями стратов), причем индуцированное действие на множестве стратов согласовано с естественным действием на множестве $F^1/\sim_{\text{isot}}$ классов изотопности.

4. Гомеоморфизм между универсальным пространством модулей $\mathbb{F}^1/\mathcal{D}^0$ оснащенных функций Морса и многообразием $\mathcal{M}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1 [1; § 9]. Оснащенной функцией Морса на ориентированной поверхности $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ назовем пару (f, α) , где $f \in F$ – функция Морса на $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, α – замкнутая 1-форма на $M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$ такие, что 2-форма $df \wedge \alpha$ не имеет нулей в $M \setminus \mathcal{C}_f$ и задает положительную ориентацию, и в окрестности любой критической точки $x \in \mathcal{C}_f$ существуют локальные координаты u, v , в которых либо

$$f = u^2 - v^2 + f(x), \quad \alpha = d(2uv),$$

либо

$$f = \varkappa_{f,x}(u^2 + v^2) + f(x), \quad \alpha = \varkappa_{f,x} \frac{udv - vdu}{u^2 + v^2},$$

где $\varkappa_{f,x} = \text{const} \neq 0$. Обозначим через $\mathbb{F}^1$ пространство оснащенных функций Морса (f, α) таких, что $f \in F^1$. Снабдим его C^∞ -топологией (см. [1; § 4]).

Сформулируем без доказательства техническую лемму.

ЛЕММА 4.2. Для любой функции Морса $f \in F^1$ существует гладкое $3q$ -параметрическое семейство оснащенных функций Морса $(f_{c'}, \alpha_{f,u}) \in \mathbb{F}^1$ с параметрами $(c', u) \in S_{f, \preceq J(c(f))} \times U_f^\infty$ такое, что

$$f_{c(f)} = f, \quad \mathcal{C}_{f_{c'}} = \mathcal{C}_f, \quad c(f_{c'}) = c', \quad [\alpha_{f,u}] = u \in H_f^1.$$

Определим “вычисляющее” отображение $\text{Ev}: \mathbb{F}^1 \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ формулой

$$\text{Ev}(f, \alpha) := p_X([f]_{\text{isot}}, h_{f,f_0}^{*0}(c(f)), h_{f,f_0}^*[\alpha]), \quad (f, \alpha) \in \mathbb{F}^1, \quad (4.1)$$

где $f_0 \in F^1$ – отмеченная функция Морса класса изотопности $[f]_{\text{isot}}$, $h_{f,f_0} \in \mathcal{D}^0$ – какой-нибудь диффеоморфизм, переводящий линии уровня функции f_0 в линии уровня функции f с сохранением направления роста и нумерации отмеченных критических точек (см. (3.7)), а

$$h_{f,f_0}^{*0}: H_f^0 \rightarrow H_{f_0}^0 \quad \text{и} \quad h_{f,f_0}^*: H_f^1 \rightarrow H_{f_0}^1$$

– индуцированные изоморфизмы (см. (3.2), (3.3), (3.7)). Группа $\mathcal{D}^\pm$ действует на $\mathbb{F}^1$ справа (см. [1; § 2]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.3. *Отображение $\text{Ev}: \mathbb{F}^1 \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ однозначно, $\mathcal{D}^0$ -инвариантно, непрерывно, индуцирует $\mathcal{D}^\pm/\mathcal{D}^0$ -эквивариантный гомеоморфизм $\overline{\text{Ev}}: \mathbb{F}^1/\mathcal{D}^0 \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Проверим однозначность отображения Ev . Образ

$$p_X([f]_{\text{isot}}, h_{f,f_0}^{*0}(\mathbf{c}(f)), h_{f,f_0}^*[\alpha]) \in \widetilde{\mathcal{M}}$$

точки

$$([f]_{\text{isot}}, h_{f,f_0}^{*0}(\mathbf{c}(f)), h_{f,f_0}^*[\alpha]) \in \{[f]_{\text{isot}}\} \times S_{[f]_{\text{isot}}} \times U_f^\infty \subset \widetilde{\mathbb{X}}$$

не зависит от выбора диффеоморфизма h_{f,f_0} , так как для любого другого такого диффеоморфизма $\tilde{h}_{f,f_0}$ в силу [2; лемма 1] выполнено

$$\tilde{h}_{f,f_0}^{-1} h_{f,f_0} \in (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f_0)(\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_{f_0})),$$

а действие группы

$$(\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f_0)(\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_{f_0})) \quad \text{на} \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{\succeq[f_0]_{\text{isot}}}^{\text{st}} \approx \mathbf{v}_{\succeq[f_0]_{\text{isot}}} \subset \widetilde{\mathbb{Y}}_{\succeq}$$

тривиально (см. (3.5), (3.6)). Однозначность Ev доказана.

Шаг 2. Докажем непрерывность отображения Ev в любой точке $(f, \alpha) \in \mathbb{F}^1$. Для оснащенной функции Морса $(\tilde{f}, \tilde{\alpha}) \in \mathbb{F}^1$, достаточно близкой к (f, α) , рассмотрим близкий к id_M диффеоморфизм $h \in \mathcal{D}^0$ такой, что $h(\mathcal{C}_f) = \mathcal{C}_{\tilde{f}}$, и упорядоченное разбиение $J' \preceq J(\mathbf{c}(f h_{f,f_0}))$ такое, что $J(\mathbf{c}(\tilde{f} h h_{f,f_0})) = J'$, откуда $\delta_{J'}[f]_{\text{isot}} = [\tilde{f}]_{\text{isot}}$, см. (3.7). Пусть g – отмеченная функция класса изотопности $[\tilde{f}]_{\text{isot}}$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{Ev}(\tilde{f}, \tilde{\alpha}) &= p_X([g]_{\text{isot}}, h_{\tilde{f} h h_{f,f_0}, g}^{*0}(\mathbf{c}(\tilde{f} h h_{f,f_0})), h_{\tilde{f} h h_{f,f_0}, g}^*[h_{f,f_0}^* h^* \tilde{\alpha}]) \\ &= p_X([g]_{\text{isot}}, h_{f_0, J'}^{*0}(\mathbf{c}(\tilde{f} h h_{f,f_0})), h_{f_0, J'}^*[h_{f,f_0}^* h^* \tilde{\alpha}]) \\ &= p_X([f]_{\text{isot}}, h_{f,f_0}^{*0}(\mathbf{c}(\tilde{f} h)), h_{f,f_0}^*[h^* \tilde{\alpha}]), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где последнее равенство следует из того, что отображение инцидентности $\chi_{f_0, g}$ индуцировано отображением

$$h_{f_0, J'} \in h_{\tilde{f} h h_{f,f_0}, g}(\text{stab}_{\mathcal{D}^0} g)(\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_g)).$$

Из C^0 -близости h к id_M следует, что 0-коцепь $\mathbf{c}(\tilde{f} h) \in H_f^0$ близка к $\mathbf{c}(f)$ (ввиду C^2 -близости функции $\tilde{f}$ к f), а класс относительных 1-когомологий $[h^* \tilde{\alpha}] \in H_f^1$ близок к $[\alpha]$ (ввиду C^0 -близости 1-формы $\tilde{\alpha}$ к α вне малых окрестностей точек локальных минимумов и максимумов функции f , см. определение топологии в пространстве $\mathbb{F}^1$ в [1; § 4.2]). Поэтому точка $\text{Ev}(\tilde{f}, \tilde{\alpha})$ близка к

$$p_X([f]_{\text{isot}}, h_{f,f_0}^{*0}(\mathbf{c}(f)), h_{f,f_0}^*[\alpha]) = \text{Ev}(f, \alpha)$$

ввиду непрерывности проекции

$$p_X: \widetilde{\mathbb{X}}_{\succeq} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}} := (\widetilde{\mathbb{X}}_{\succeq}/\sim)/\sim_{\text{glue}}.$$

Непрерывность Ev доказана.

Шаг 3. По построению Ev является $\mathcal{D}^0$ -инвариантным. Индуцированное отображение $\overline{\text{Ev}}: \mathbb{F}^1/\mathcal{D}^0 \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ непрерывно ввиду непрерывности отображения Ev . Оно $\mathcal{D}^\pm/\mathcal{D}^0$ -эквивариантно по построению. Покажем, что $\overline{\text{Ev}}$ биективно.

Инъективность. Пусть $\text{Ev}(f, \alpha) = \text{Ev}(f_1, \alpha_1)$. Ввиду инъективности $p_Y|_{\widetilde{\mathcal{Y}}}$ (см. утверждение 3.3) выполнено $[f]_{\text{isot}} = [f_1]_{\text{isot}}$ и имеется диффеоморфизм $h_1 \in \mathcal{D}^0$, переводящий линии уровня функции f в линии уровня функции f_1 с сохранением направления роста и такой, что

$$h_1^{*0}(\mathbf{c}(f_1)) = \mathbf{c}(f) \in H_f^0 \quad \text{и} \quad h_1^*[\alpha_1] \in \widetilde{\Gamma}_{[f]_{\text{isot}}}[\alpha].$$

Отсюда $h_2^* h_1^*[\alpha_1] = [\alpha]$ для некоторого $h_2 \in \text{stab}_{\mathcal{D}^0} f$ (см. (3.5)). Поэтому для

$$(f_2, \alpha_2) := (h_1 h_2)^*(f_1, \alpha_1) \in \mathbb{F}^1$$

выполнено

$$G_{f_2} = G_f, \quad \mathbf{c}(f_2) = \mathbf{c}(f), \quad [\alpha_2] = [\alpha].$$

Покажем, что существует (единственный) диффеоморфизм $h \in \mathcal{D}$, переводящий в себя каждое ориентированное ребро графа G_f и такой, что $h^*(f_2, \alpha_2) = (f, \alpha)$. В малых окрестностях $U_j, \widetilde{U}_j$ каждой седловой точки $y_j \in \mathcal{C}_{f,1}$ в M рассмотрим локальные координаты u, v для $(f, \alpha)|_{U_j}$ и u_2, v_2 для $(f_2, \alpha_2)|_{\widetilde{U}_j}$ как в определении 4.1. Без ограничения общности будем считать, что начальные отрезки вида $\{0 \leq u = v \leq \varepsilon\}$ и $\{0 \leq u_2 = v_2 \leq \varepsilon_2\}$ ребер графа G_f , выходящих из вершины y_j , совпадают (в противном случае заменим (u_2, v_2) на $(-u_2, -v_2)$). Определим диффеоморфизм $h|_{U'_j}: U'_j \rightarrow \widetilde{U}'_j$ в, быть может, меньшей окрестности $U'_j \subset U_j$ условием

$$(u_2, v_2) \circ h|_{U'_j} = (u, v)|_{U'_j}, \quad \text{где} \quad \widetilde{U}'_j := h(U'_j) \subset \widetilde{U}_j.$$

Тогда

$$h|_{U'_j}^*(f_2, \alpha_2) = (f, \alpha)|_{U'_j}.$$

Продолжим этот диффеоморфизм на каждое ребро e_ℓ графа G_f условием

$$(h|_{e_\ell})^*(\alpha_2|_{e_\ell}) = \alpha|_{e_\ell}.$$

Это возможно, так как интегралы 1-форм α и α_2 по ориентированному ребру e_ℓ равны. Продолжим этот диффеоморфизм в малую окрестность V_ℓ куска $e_\ell \setminus (\bigcup_{j=1}^q U'_j)$ этого ребра условием

$$h|_{V_\ell}^*(f_2, \alpha_2) = (f, \alpha)|_{V_\ell},$$

положим $\widetilde{V}_\ell := h(V_\ell)$. На множестве $\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}$ точек локальных минимумов и максимумов определим

$$h|_{\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}} := \text{id}_{\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}}.$$

Осталось продолжить построенное отображение на открытое подмножество $M \setminus (G_f \cup \mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}) \subset M$, являющееся дизъюнктым объединением кусков, каждый из которых гомеоморфен открытому или полуоткрытому цилиндру $S^1 \times (0; 1)$ и

$S^1 \times [0; 1)$. Для каждого такого куска Z отображение h уже построено на $\bar{Z} \setminus Z \subset G_f \cup \mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}$. Пусть точка $x \in \bar{Z} \cap G_f$ не является критической, и пусть окружность

$$\gamma_Z := Z \cap \left(f^{-1} \left(\frac{1}{2} (\inf f|_Z + \sup f|_Z) \right) \right)$$

ориентирована как в обозначении 2.4. Для любой точки $y \in Z$ рассмотрим гладкий путь $\gamma_{x,y}: [0; 1] \rightarrow \bar{Z}$ из x в y такой, что $\gamma_{x,y}((0; 1)) \subset Z$. Положим

$$A_{Z,\alpha} := \oint_{\gamma_Z} \alpha > 0, \quad g_{Z,x,\alpha}(y) := \int_{\gamma_{x,y}} \alpha \in \mathbb{R}, \quad y \in Z.$$

Так как Z гомеоморфен открытому или полукрытому цилиндру и 1-форма α замкнута, то функция $g_{Z,x,\alpha} \bmod A_{Z,\alpha}: Z \rightarrow \mathbb{R}/A_{Z,\alpha}\mathbb{Z}$ корректно определена, т.е. не зависит от выбора пути $\gamma_{x,y}$. По условию $A_{Z,\alpha} = A_{Z,\alpha_2}$. Определим отображение $h|_Z$ условием

$$(f_2, g_{Z,h(x),\alpha_2} \bmod A_{Z,\alpha}) \circ h|_Z = (f, g_{Z,x,\alpha} \bmod A_{Z,\alpha}).$$

Пусть $e_\ell \subset G_f$ – ребро, содержащее точку x . Нетрудно доказываается непрерывность отображения $h|_{Z \cup e_\ell}$. Отсюда с учетом равенства $[\alpha] = [\alpha_2] \in H_f^1$ следуют непрерывность и биективность отображения $h|_{\bar{Z}}$. То, что $h|_{M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})}$ является диффеоморфизмом, следует из того, что следующие пары функций являются регулярными координатами: пара координат (u, v) в U'_j (соответственно (u_2, v_2) в $\tilde{U}'_j$); пара функций (f, g_ℓ) в V_ℓ (соответственно $(f_2, \tilde{g}_\ell)$ в $\tilde{V}_\ell$), где функции g_ℓ и $\tilde{g}_\ell$ определены условиями $dg_\ell = \alpha|_{V_\ell}$ и $d\tilde{g}_\ell = \alpha_2|_{\tilde{V}_\ell}$; пара функций $(f_2, g_{Z,h(x),\alpha_2} \bmod A_{Z,\alpha})$ и $(f, g_{Z,x,\alpha} \bmod A_{Z,\alpha})$ в Z . По построению $(f, \alpha) = h^*(f_2, \alpha_2)$. То, что h является диффеоморфизмом в малой окрестности W_x любой точки $x \in \mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}$ минимума или максимума, доказывается с помощью полярных координат, отвечающих регулярным координатам u, v для $(f, \alpha)|_{W_x}$ (см. определение 4.1), и аналогичных полярных координат для $(f_2, \alpha_2)|_{W_x}$.

Так как диффеоморфизм h переводит в себя каждое ориентированное ребро графа $G_f = G_{f_2}$, причем $h^*[\alpha_2] = [\alpha] = [\alpha_2] \in U_f^\infty$, то $h \in \text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f) \subset \mathcal{D}^0$ согласно [3; лемма 3.4]. По доказанному

$$(f, \alpha) = h^*(f_2, \alpha_2) = (h_1 h_2 h)^*(f_1, \alpha_1) \in \mathcal{D}^0(f_1, \alpha_1) \in \mathbb{F}^1 / \mathcal{D}^0,$$

и инъективность доказана.

Сюръективность. Отображение $p_X|_{\tilde{\mathbb{X}}}: \tilde{\mathbb{X}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ сюръективно ввиду сюръективности отображений $\tilde{\mathbb{X}} \rightarrow \tilde{\mathbb{Y}} = \tilde{\mathbb{X}}/\sim$ и $p_Y|_{\tilde{\mathbb{Y}}}: \tilde{\mathbb{Y}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ (см. утверждение 3.3). Поэтому достаточно показать, что для любой точки $([f]_{\text{isot}}, \mathbf{c}', u) \in \tilde{\mathbb{X}}$ существует оснащенная функция Морса $(\tilde{f}, \tilde{\alpha}) \in \mathbb{F}^1$ такая, что

$$p_X([f]_{\text{isot}}, \mathbf{c}', u) = \text{Ev}(\tilde{f}, \tilde{\alpha}).$$

Пусть f – отмеченная функция своего класса изотопности. Из включений $\mathbf{c}' \in S_{f,J(\mathbf{c}(f))} \subset S_{f,\preceq J(\mathbf{c}(f))}$, $u \in U_f^\infty$ и леммы 4.2 получаем путь

$$(\tilde{f}_t, \tilde{\alpha}) := (f_{t\mathbf{c}' + (1-t)\mathbf{c}(f)}, \alpha_{f,u}) \in \mathbb{F}^1$$

в пространстве $\mathbb{F}^1$ оснащенных функций Морса такой, что

$$\mathcal{C}_{\tilde{f}_t} = \mathcal{C}_f, \quad \tilde{f}_0 = f, \quad \mathbf{c}(\tilde{f}_1) = \mathbf{c}', \quad [\tilde{\alpha}] = u.$$

Отсюда и из (4.2) получаем требуемое равенство

$$p_X([f]_{\text{isot}}, \mathbf{c}', u) = p_X([f]_{\text{isot}}, \mathbf{c}(f_{\mathbf{c}'}), [\alpha_{f,u}]) = \text{Ev}(f_{\mathbf{c}'}, \alpha_{f,u}).$$

Шаг 4. Покажем, что непрерывная биекция $\overline{\text{Ev}}: \mathbb{F}^1/\mathscr{D}^0 \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ является гомеоморфизмом. Осталось доказать, что $\overline{\text{Ev}}^{-1}: \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{F}^1/\mathscr{D}^0$ непрерывно. Согласно лемме 4.2 имеем непрерывное (ввиду гладкости семейства) отображение

$$\tilde{s}_f: S_{\succeq[f]_{\text{isot}}} \times U_f^\infty \rightarrow \mathbb{F}^1, \quad (\mathbf{c}', u) \mapsto (f_{\mathbf{c}'}, \alpha_{f,u}), \quad (4.3)$$

для которого ввиду (4.2) выполнено

$$\overline{\text{Ev}} \circ q \circ \tilde{s}_f(\mathbf{c}', u) = \text{Ev} \circ \tilde{s}_f(\mathbf{c}', u) = p_X([f]_{\text{isot}}, \mathbf{c}', u), \quad (\mathbf{c}', u) \in S_{\succeq[f]_{\text{isot}}} \times U_f^\infty, \quad (4.4)$$

где $q: \mathbb{F}^1 \rightarrow \mathbb{F}^1/\mathscr{D}^0$ – проекция. Поэтому

$$\overline{\text{Ev}}^{-1} \circ p_X|_{\{[f]_{\text{isot}}\} \times S_{\succeq[f]_{\text{isot}}} \times U_f^\infty}([f]_{\text{isot}}, \mathbf{c}', u) = q \circ \tilde{s}_f(\mathbf{c}', u), \quad (\mathbf{c}', u) \in S_{\succeq[f]_{\text{isot}}} \times U_f^\infty.$$

Отсюда и из непрерывности отображения $q \circ \tilde{s}_f$ следует непрерывность отображения $\overline{\text{Ev}}^{-1}$. Действительно, по утверждению 3.3 подмножество $\widetilde{\mathcal{M}}_{\succeq[f]_{\text{isot}}}$ открыто в $\widetilde{\mathcal{M}}$, а отображение

$$p_X|_{\{[f]_{\text{isot}}\} \times S_{\succeq[f]_{\text{isot}}} \times U_f^\infty}: \{[f]_{\text{isot}}\} \times S_{\succeq[f]_{\text{isot}}} \times U_f^\infty \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{\succeq[f]_{\text{isot}}}$$

есть композиция накрытия

$$\{[f]_{\text{isot}}\} \times S_{\succeq[f]_{\text{isot}}} \times U_f^\infty \rightarrow \{[f]_{\text{isot}}\} \times \widetilde{\mathcal{M}}_{\succeq[f]_{\text{isot}}}^{\text{st}} = \mathbf{v}_{\succeq[f]_{\text{isot}}}$$

(см. (3.6)) и гомеоморфизма

$$p_Y|_{\mathbf{v}_{\succeq[f]_{\text{isot}}}}: \mathbf{v}_{\succeq[f]_{\text{isot}}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{\succeq[f]_{\text{isot}}},$$

а потому оно локально является гомеоморфизмом. Утверждение 4.3 доказано.

5. $\mathscr{D}^0$ -эквивариантный гомеоморфизм $\mathbb{F}^1 \approx \mathscr{D}^0 \times \widetilde{\mathcal{M}}$.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 5.1. Предположим, что количество

$$|\widehat{\mathcal{C}}_f \setminus \mathcal{C}| = \widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r} - (p^* + q^* + r^*)$$

отмеченных, но не фиксированных, критических точек любой функции $f \in F$ положительно. Фиксируем непустое подмножество $\tilde{\mathcal{C}}_{f_*} \subseteq \tilde{\mathcal{C}}_{f_*} \setminus \mathcal{C}$ и для любой функции $f \in F$ обозначим через $\tilde{\mathcal{C}}_f \subseteq \tilde{\mathcal{C}}_f \setminus \mathcal{C}$ множество ее критических точек с теми же метками, что и точки множества $\tilde{\mathcal{C}}_{f_*}$. Рассмотрим подпространство

$$F^* := \{f \in F \mid \tilde{\mathcal{C}}_f = \tilde{\mathcal{C}}_{f_*}\} \subset F.$$

Оно является обобщенным пространством функций Морса на поверхности $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ (см. определение 2.1), каждая функция которого имеет ровно

$$|\mathcal{C}| + |\tilde{\mathcal{C}}_f| = |\mathcal{C}^*| \in (|\mathcal{C}|, |\widehat{\mathcal{C}}_{f_*}|]$$

фиксированных критических точек, где

$$\mathcal{C}^* := \mathcal{C} \sqcup \tilde{\mathcal{C}}_{f_*} \quad \text{и} \quad \mathcal{C}_\lambda^* := \mathcal{C}_\lambda \cap \mathcal{C}^*$$

суть множества всех фиксированных критических точек и фиксированных критических точек индекса $\lambda \in \{0, 1, 2\}$ соответственно, $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}^* \subseteq \widehat{\mathcal{C}}_{f_*}$, см. обозначение 2.2. Аналогично обозначению 2.2 обозначим

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^* &:= \text{Diff}^+(M, \partial^+ M, \partial^- M, \mathcal{C}_0^*, \mathcal{C}_1^*, \mathcal{C}_2^*), & (\mathcal{D}^*)^0 &:= \text{Diff}^0(M, \mathcal{C}^*), \\ (\mathbb{F}^*)^1 &:= \{(f, \alpha) \in \mathbb{F}^1 \mid f \in F^*\}. \end{aligned}$$

В случае (2.3) рассмотрим для пространства F^* соответствующее $3q$ -мерное многообразие $\mathcal{M}^*$ (см. утверждение 3.3). Пусть $\text{Ev}^*: (\mathbb{F}^1)^* \rightarrow \mathcal{M}^*$ – вычисляющее отображение, аналогичное вычисляющему отображению $\text{Ev}: \mathbb{F}^1 \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ (см. (4.1)). По утверждению 4.3 оно индуцирует гомеоморфизм $\overline{\text{Ev}}^*: (\mathbb{F}^*)^1/(\mathcal{D}^*)^0 \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}^*$.

ЛЕММА 5.2. *Для пространств $\mathbb{F}^* \subset \mathbb{F}$ обобщенных функций Морса (см. обозначение 5.1) отображения включения*

$$j: \mathcal{D}^* \hookrightarrow \mathcal{D}, \quad i: (\mathbb{F}^*)^1 \hookrightarrow \mathbb{F}^1$$

индуцируют изоморфизм

$$\bar{j}: \mathcal{D}^*/(\mathcal{D}^* \cap \mathcal{D}^0) \xrightarrow{\cong} \mathcal{D}/\mathcal{D}^0$$

и гомеоморфизм

$$\bar{i}: (\mathbb{F}^*)^1/(\mathcal{D}^* \cap \mathcal{D}^0) \xrightarrow{\cong} \mathbb{F}^1/\mathcal{D}^0.$$

Если $|\mathcal{C}^| \leq \chi(M) + 1$, то $\mathcal{D}^* \cap \mathcal{D}^0 = (\mathcal{D}^*)^0$, откуда имеются изоморфизм*

$$\bar{j}: \mathcal{D}^*/(\mathcal{D}^*)^0 = \mathcal{D}^*/(\mathcal{D}^* \cap \mathcal{D}^0) \xrightarrow{\cong} \mathcal{D}/\mathcal{D}^0$$

групп классов отображений и гомеоморфизм

$$\bar{i}: (\mathbb{F}^*)^1/(\mathcal{D}^*)^0 = (\mathbb{F}^*)^1/(\mathcal{D}^* \cap \mathcal{D}^0) \xrightarrow{\cong} \mathbb{F}^1/\mathcal{D}^0$$

универсальных пространств модулей, а в случае (2.3) также диффеоморфизм

$$k := \overline{\text{Ev}} \circ \bar{i} \circ \overline{\text{Ev}^*}^{-1}: \widetilde{\mathcal{M}}^* \xrightarrow{\cong} \widetilde{\mathcal{M}}$$

$3q$ -мерных многообразий (сохраняющий аффинную связность и стратификацию).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно проверяется, что $\bar{j}$ – изоморфизм, а $\bar{i}$ – непрерывная биекция. Докажем непрерывность $(\bar{i})^{-1}$. Для любой оснащенной функции Морса $(f_0, \alpha_0) \in \mathbb{F}^1$ рассмотрим диффеоморфизм $h_0 \in \mathcal{D}^0$ такой, что

$h_0^*(f_0, \alpha_0) \in (\mathbb{F}^*)^1$. Ввиду непрерывности отображения $\mathbb{F}^1 \rightarrow F^1 \rightarrow M^{|\tilde{\mathcal{C}}_{f*}|}, (f, \alpha) \mapsto f \mapsto \tilde{\mathcal{C}}_f$ (см. [1]) и локальной тривиальности расслоения $\mathcal{D}^0 \rightarrow M^{|\tilde{\mathcal{C}}_{f*}|}, h \mapsto h(\tilde{\mathcal{C}}_{f*}) = \tilde{\mathcal{C}}_{f*} h^{-1}$ (со слоем $\mathcal{D}^* \cap \mathcal{D}^0$ над точкой $\tilde{\mathcal{C}}_{f*}$, см. [36]), существуют окрестность $\mathbb{U} \subset \mathbb{F}^1$ оснащенной функции Морса (f_0, α_0) в $\mathbb{F}^1$ и непрерывное отображение $H: \mathbb{U} \rightarrow \mathcal{D}^0$ такие, что

$$H(f_0, \alpha_0) = h_0, \quad (H(f, \alpha))^*(f, \alpha) \in (\mathbb{F}^*)^1 \quad \text{для любой } (f, \alpha) \in \mathbb{U}.$$

Получаем непрерывное отображение

$$\mathbb{U} \rightarrow (\mathbb{F}^*)^1 / (\mathcal{D}^* \cap \mathcal{D}^0), \quad (f, \alpha) \mapsto (\mathcal{D}^* \cap \mathcal{D}^0)((H(f, \alpha))^*(f, \alpha)),$$

совпадающее с композицией

$$\mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{F}^1 \rightarrow \mathbb{F}^1 / \mathcal{D}^0 \xrightarrow{(\tilde{i})^{-1}} (\mathbb{F}^*)^1 / (\mathcal{D}^* \cap \mathcal{D}^0),$$

откуда следует непрерывность отображения $(\tilde{i})^{-1}$.

Пусть $|\mathcal{C}^*| \leq \chi(M) + 1$. Включение $\mathcal{D}^* \cap \mathcal{D}^0 \supseteq (\mathcal{D}^*)^0$ очевидно. Покажем, что $\mathcal{D}^* \cap \mathcal{D}^0 \subseteq (\mathcal{D}^*)^0$. Пусть $\mathcal{T}^* \subset \mathcal{D}^*$ – подгруппа, аналогичная $\mathcal{T} \subset \mathcal{D}$, см. обозначение 2.2 (В). Так как $\mathcal{D}^* \cap \mathcal{D}^0 \subseteq \mathcal{D}^* \cap \mathcal{T} = \mathcal{T}^*$ и количество фиксированных точек $|\mathcal{C}^*| \leq \chi(M) + 1$, то из (2.2) следует $(\mathcal{D}^*)^0 = \mathcal{T}^* \supseteq \mathcal{D}^* \cap \mathcal{D}^0$. Лемма доказана.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.3. В случае (2.3) правое действие группы $\mathcal{T} \subset \mathcal{D}$ (см. обозначение 2.2) на $\mathbb{F}^1$ является свободным. Имеется $\mathcal{D}^0$ -эквивариантный гомеоморфизм $p_3: \mathbb{F}^1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^0 \times \tilde{\mathcal{M}}$, композиция которого с проекцией $\mathcal{D}^0 \times \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ совпадает с Ev . Здесь группа $\mathcal{D}^0$ действует на $\mathcal{D}^0 \times \tilde{\mathcal{M}}$ справа по формуле $(h_1, h_2, m) \mapsto (h_2 h_1, m)$. В частности, вычисляющее отображение $\text{Ev}: \mathbb{F}^1 \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ является тривиальным $\mathcal{D}^0$ -расслоением, а полный прообраз $\text{Forg}_1^{-1}([f]_{\text{isot}})$ любого класса изотопности $[f]_{\text{isot}}$ в F^1 при забывающем отображении $\text{Forg}_1: \mathbb{F}^1 \rightarrow F^1$ гомеоморфен прямому произведению

$$\mathcal{D}^0 \times \mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}} \approx \mathcal{D}^0 \times \tilde{\mathcal{M}}_{[f]_{\text{isot}}} = \mathcal{D}^0 \times \text{Ev}(\text{Forg}_1^{-1}([f]_{\text{isot}})) \subset \mathcal{D}^0 \times \tilde{\mathcal{M}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Докажем свободу действия подгруппы $\mathcal{T} \subset \mathcal{D}$ на $\mathbb{F}^1$. Если $h \in \mathcal{T}$ и $h^*(f, \alpha) = (f, \alpha)$, то согласно [3; лемма 3.4] выполнено $h \in (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0$, а потому h переводит в себя каждое ориентированное ребро графа G_f (см. обозначение 2.4). Отсюда следует, что $h = \text{id}_M$ ввиду единственности диффеоморфизма $h \in \mathcal{D}$, сохраняющего оснащенную функцию Морса (f, α) и переводящего любое ориентированное ребро графа G_f в себя (см. доказательство утверждения 4.3, шаг 3, инъективность).

Шаг 2. Построим непрерывное отображение $s: \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{F}^1$ такое, что $\text{Ev} \circ s = \text{id}_{\tilde{\mathcal{M}}}$ (т.е. правое обратное отображения Ev). Согласно утверждению 3.3 пространство $\tilde{\mathcal{M}}$ является гладким $3q$ -мерным многообразием и покрыто открытыми подмножествами $\tilde{\mathcal{M}}_{\succeq [f]_{\text{isot}}} \subset \tilde{\mathcal{M}}$. Фиксируем на $\tilde{\mathcal{M}}$ клеточное разбиение (состоящее, вообще говоря, из бесконечного числа клеток) такое, что каждая его замкнутая клетка целиком содержится в одной из областей $\tilde{\mathcal{M}}_{\succeq [f]_{\text{isot}}}$ и характеристическое отображение любой клетки является гомеоморфизмом на свой образ. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Предположим, что $\chi(M) < p^* + q^* + r^*$. Пусть $\widetilde{\mathcal{M}}^{(k)}$ – k -мерный остов клеточного разбиения, $k \leq \dim \mathcal{M} = 3q$. Будем строить непрерывное отображение $s_k: \widetilde{\mathcal{M}}^{(k)} \rightarrow \mathbb{F}^1$ такое, что $\text{Ev} \circ s_k = \text{id}_{\widetilde{\mathcal{M}}^{(k)}}$, индукцией по k . При $k = -1$ строить нечего, так как $\widetilde{\mathcal{M}}^{(-1)} = \emptyset$. Пусть $k \geq 0$ и отображение s_{k-1} построено. Рассмотрим любую k -мерную клетку $\sigma = \sigma^k \subset \widetilde{\mathcal{M}}^{(k)}$ разбиения. По построению ее замыкание целиком содержится в одной из областей $\widetilde{\mathcal{M}}_{\geq [f]_{\text{isot}}}$. Выберем какое-либо поднятие

$$\ell_\sigma: \bar{\sigma} \rightarrow S_{\geq [f]_{\text{isot}}} \times U_f^\infty$$

замкнутой клетки $\bar{\sigma}$ при накрытии

$$p_X|_{\{[f]_{\text{isot}}\} \times S_{\geq [f]_{\text{isot}}} \times U_f^\infty} \circ a_{[f]_{\text{isot}}}^{-1}: S_{\geq [f]_{\text{isot}}} \times U_f^\infty \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{\geq [f]_{\text{isot}}},$$

где

$$a_{[f]_{\text{isot}}}: \{[f]_{\text{isot}}\} \times S_{\geq [f]_{\text{isot}}} \times U_f^\infty \rightarrow S_{\geq [f]_{\text{isot}}} \times U_f^\infty$$

– проекция. Тогда

$$p_X \circ a_{[f]_{\text{isot}}}^{-1} \circ \ell_\sigma = \text{id}_{\bar{\sigma}}. \quad (5.1)$$

Рассмотрим два $(k-1)$ -мерных сфероидов в $\mathbb{F}^1$:

$$S_1 := s_{k-1}|_{\partial\sigma^k}: S^{k-1} \approx \partial\sigma^k \rightarrow \mathbb{F}^1, \quad S_2 := \tilde{s}_f \circ \ell_\sigma|_{\partial\sigma^k}: S^{k-1} \approx \partial\sigma^k \rightarrow \mathbb{F}^1,$$

см. (4.3). Тогда $\text{Ev} \circ S_i = \text{id}_{S^{k-1}}$, $i = 1, 2$, так как $\text{Ev} \circ s_{k-1} = \text{id}_{\widetilde{\mathcal{M}}^{(k-1)}}$ в силу индукционного предположения и

$$\text{Ev} \circ \tilde{s}_f \circ \ell_\sigma = p_X \circ a_{[f]_{\text{isot}}}^{-1} \circ \ell_\sigma = \text{id}_{\bar{\sigma}} \quad (5.2)$$

в силу (4.4) и (5.1). Поэтому (в силу инъективности $\overline{\text{Ev}}$, см. утверждение 4.3) для любого $m \in S^{k-1}$ существует диффеоморфизм $h_m \in \mathcal{D}^0$ такой, что $S_1(m) = h_m^*(S_2(m))$. Этот диффеоморфизм единствен в силу свободы действия группы $\mathcal{D}^0 \subset \mathcal{T}$ на $\mathbb{F}^1$ (см. шаг 1). Получаем однозначное отображение

$$H = H_{\partial\sigma^k}: \partial\sigma^k \approx S^{k-1} \rightarrow \mathcal{D}^0, \quad m \mapsto h_m, \quad m \in \partial\sigma^k.$$

Докажем непрерывность отображения H . Так как сферойды S_1 и S_2 непрерывны (по индукционному предположению и в силу непрерывности $\tilde{s}_f$ и ℓ_σ , см. (4.3)), то они задают непрерывную зависимость пары оснащенных функций Морса $S_1(m) =: (f, \alpha)$ и $S_2(m) =: (f_2, \alpha_2)$ от точки $m \in S^{k-1}$. Если точка $\tilde{m} \in S^{k-1}$ близка к m , то в силу (4.2) и (4.1) выполнено

$$\begin{aligned} S_1(\tilde{m}) &=: (\tilde{f}, \tilde{\alpha}) \xrightarrow{\text{Ev}} p_X([f_0]_{\text{isot}}, h_{f,f_0}^*(c(\tilde{f}h)), h_{f,f_0}^*[h^*\tilde{\alpha}]), \\ S_2(\tilde{m}) &=: (\tilde{f}_2, \tilde{\alpha}_2) \xrightarrow{\text{Ev}} p_X([f_0]_{\text{isot}}, h_{f_2,f_0}^*(c(\tilde{f}_2h_2)), h_{f_2,f_0}^*[h_2^*\tilde{\alpha}_2]), \end{aligned}$$

где $f_0 \in F^1$ – отмеченная функция класса изотопности $[f]_{\text{isot}} = [f_2]_{\text{isot}}$, диффеоморфизмы $h, h_2 \in \mathcal{D}^0$ близки к id_M и $h(\mathcal{C}_f) = \mathcal{C}_{\tilde{f}}$, $h_2(\mathcal{C}_{f_2}) = \mathcal{C}_{\tilde{f}_2}$, $h_{f_2,f_0} := h_m h_{f,f_0}$. Так как $h_{f,f_0}^*(f, \alpha) = h_{f_2,f_0}^*(f_2, \alpha_2)$, $\text{Ev}(S_1(\tilde{m})) = \text{Ev}(S_2(\tilde{m}))$, то

$$(h_{f,f_0}^*(c(\tilde{f}h)), h_{f,f_0}^*[h^*\tilde{\alpha}]) = (h_{f_2,f_0}^*(c(\tilde{f}_2h_2)), h_{f_2,f_0}^*[h_2^*\tilde{\alpha}_2]),$$

поскольку p_X локально является гомеоморфизмом (см. конец п. 4). Так как $c(\tilde{f}h) = c(\tilde{f}_2h_2h_m)$, то согласно критерию изотопности возмущенных функций Морса (см. [23; утверждение 1.1 и § 3] или (3.7)) выполнено $\tilde{f}hh_0 = \tilde{f}_2h_2h_m$ для некоторого $h_0 \in \text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f)$ такого, что автоморфизм $dh_0|_{y_j(f)}: T_{y_j(f)}M \rightarrow T_{y_j(f)}M$ близок к $\text{id}_{T_{y_j(f)}M}$ для любой седловой критической точки $y_j(f) \in \mathcal{C}_{f,1}$. Отсюда, из шага 1 и из равенств $\tilde{f}hh_0 = \tilde{f}_2h_2h_m$, $[(hh_0)^*\tilde{\alpha}] = [(h_2h_m)^*\tilde{\alpha}_2]$ и $h_m^*(f_2, \tilde{\alpha}_2) = (\tilde{f}, \tilde{\alpha})$ следует (согласно доказательству утверждения 4.3, шаг 3, инъективность), что изоморфизм

$$dh_{\tilde{m}}|_{y_j(\tilde{f})}: T_{y_j(\tilde{f})}M \rightarrow T_{y_j(\tilde{f}_2)}M$$

близок к изоморфизму

$$dh_m|_{y_j(f)}: T_{y_j(f)}M \rightarrow T_{y_j(f_2)}M,$$

$1 \leq j \leq q$. Отсюда и из равенства $h_m^*(f_2, \tilde{\alpha}_2) = (\tilde{f}, \tilde{\alpha})$ следует, что в некоторой окрестности любой седловой критической точки функции (f, α) выполнено $h_{\tilde{m}} \rightarrow h_m$ при $\tilde{m} \rightarrow m$. Отсюда и из равенств $h_m^*(df_2^2 + \alpha_2^2) = df^2 + \alpha^2$, $h_m^*(d\tilde{f}_2^2 + \tilde{\alpha}_2^2) = d\tilde{f}^2 + \tilde{\alpha}^2$ следует, что $h_{\tilde{m}} \rightarrow h_m$ всюду на M при $\tilde{m} \rightarrow m$. Поэтому диффеоморфизм h_m непрерывно зависит от $m \in S^{k-1}$, т.е. сфероид H непрерывен.

Так как $\mathcal{D}^0 = \text{Diff}^0(M, \mathcal{C})$ и количество фиксированных точек $|\mathcal{C}| = p^* + q^* + r^* > \chi(M)$, то топологическая группа $\mathcal{D}^0$ стягиваема (см. (2.1)), откуда сфероид H непрерывно продолжается на всю замкнутую клетку σ^k . Пусть $\tilde{H}: \sigma^k \rightarrow \mathcal{D}^0$, $m \mapsto h_m$ – такое продолжение. Определим отображение $s_k: \tilde{\mathcal{M}}^{(k)} \rightarrow \mathbb{F}^1$ формулой

$$s_k|_{\overline{\sigma^k}}: \overline{\sigma^k} \rightarrow \mathbb{F}^1, \quad m \mapsto h_m^*(\tilde{s}_f \circ \ell_\sigma(m)).$$

Оно однозначно и является продолжением отображения s_{k-1} , так как

$$s_k|_{\partial\sigma^k}: m \mapsto h_m^*(\tilde{s}_f \circ \ell_\sigma(m)) = h_m^*(S_2(m)) = S_1(m) = s_{k-1}|_{\partial\sigma^k}(m), \quad m \in \partial\sigma^k.$$

При этом

$$\text{Ev} \circ s_k|_{\overline{\sigma^k}}(m) = \text{Ev}(h_m^*(\tilde{s}_f \circ \ell_\sigma(m))) = \text{Ev}(\tilde{s}_f \circ \ell_\sigma(m)) = m, \quad m \in \overline{\sigma^k},$$

ввиду (5.2), откуда $\text{Ev} \circ s_k = \text{id}_{\tilde{\mathcal{M}}^{(k)}}$. Итак, существование непрерывного отображения s , являющегося правым обратным Ev , доказано в случае $\chi(M) < p^* + q^* + r^*$.

Случай 2. Предположим теперь, что $p^* + q^* + r^* \leq \chi(M)$. В силу условия (2.3) количество $|\tilde{\mathcal{C}}_f \setminus \mathcal{C}| = \hat{p} + \hat{q} + \hat{r} - (p^* + q^* + r^*)$ отмеченных, но не фиксированных, критических точек любой функции $f \in F$ превосходит $\chi(M) - (p^* + q^* + r^*) \geq 0$. Поэтому имеется непустое подмножество $\tilde{\mathcal{C}}_{f_*} \subseteq \tilde{\mathcal{C}}_{f_*} \setminus \mathcal{C}$, состоящее из $\chi(M) - (p^* + q^* + r^*) + 1 > 0$ точек. Рассмотрим соответствующие подпространства $\mathbb{F}^* \subset \mathbb{F}$ и $(\mathbb{F}^*)^1 \subset \mathbb{F}^1$, подгруппы $\mathcal{D}^* \subset \mathcal{D}$ и $(\mathcal{D}^*)^0 \subset \mathcal{D}^0$ и $3q$ -мерное многообразие $\tilde{\mathcal{M}}^* \approx (\mathbb{F}^*)^1/(\mathcal{D}^*)^0$, см. обозначение 5.1.

Так как количество фиксированных точек

$$|\mathcal{C}^*| = |\mathcal{C}| + |\tilde{\mathcal{C}}_{f_*}| = \chi(M) + 1 > \chi(M),$$

то согласно случаю 1 существует непрерывное отображение $s^*: \widetilde{\mathcal{M}}^* \rightarrow (\mathbb{F}^1)^*$ такое, что $\text{Ev}^* \circ s^* = \text{id}_{\widetilde{\mathcal{M}}^*}$. Так как количество фиксированных критических точек $|\mathcal{C}^*| = |\mathcal{C}| + |\widetilde{\mathcal{C}}_{f_*}| \leq \chi(M) + 1$, то по лемме 5.2 имеется гомеоморфизм

$$\bar{i}: (\mathbb{F}^*)^1 / (\mathcal{D}^*)^0 = (\mathbb{F}^*)^1 / (\mathcal{D}^* \cap \mathcal{D}^0) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}^1 / \mathcal{D}^0.$$

Положим

$$s := i \circ s^* \circ \overline{\text{Ev}^*} \circ (\bar{i})^{-1} \circ \overline{\text{Ev}}^{-1}: \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{F}^1.$$

Из определения отображений Ev, Ev^* следует, что

$$\text{Ev}|_{\text{Im } i} = \overline{\text{Ev}} \circ \bar{i} \circ \overline{\text{Ev}^*}^{-1} \circ \text{Ev}^* \circ i^{-1}.$$

Поэтому

$$\text{Ev} \circ s = \text{Ev} \circ i \circ s^* \circ \overline{\text{Ev}^*} \circ (\bar{i})^{-1} \circ \overline{\text{Ev}}^{-1} = \text{id}_{\widetilde{\mathcal{M}}}.$$

Шаг 3. На шаге 2 построено непрерывное отображение $s: \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{F}^1$ такое, что $\text{Ev} \circ s = \text{id}_{\widetilde{\mathcal{M}}}$. Определим непрерывное $\mathcal{D}^0$ -эquivариантное отображение $i_3: \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{F}^1$ формулой $i_3(h, m) := h^*(s(m))$. Оно биективно в силу $\text{Ev} \circ s = \text{id}_{\widetilde{\mathcal{M}}}$, свободности действия $\mathcal{D}^0$ на $\mathbb{F}^1$ и биективности $\overline{\text{Ev}}$ (см. утверждение 4.3). Обратное отображение имеет вид

$$p_3 = i_3^{-1}: \mathbb{F}^1 \rightarrow \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathcal{M}}, \quad (f, \alpha) \mapsto (\delta(f, \alpha), \text{Ev}(f, \alpha)),$$

где отображение $\delta: \mathbb{F}^1 \rightarrow \mathcal{D}^0$ определяется условием

$$(\delta(f, \alpha))^*(s \circ \text{Ev}(f, \alpha)) = (f, \alpha).$$

Его непрерывность доказывается аналогично доказательству непрерывности сфероиды H (см. шаг 2, случай 1). Так как отображения i_3, p_3 непрерывны и взаимно обратны, они являются взаимно обратными гомеоморфизмами. Утверждение 5.3 доказано.

Утверждение 5.3 доказывает гомеоморфизмы

$$\mathbb{F}^1 \approx \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathcal{M}}, \quad \text{Forg}_1^{-1}([f]_{\text{isot}}) \approx \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathcal{M}}_{[f]_{\text{isot}}}.$$

С учетом (2.1) и того, что отображения включения $F^1 \hookrightarrow F, \mathbb{F}^1 \hookrightarrow \mathbb{F}$ и забывающие отображения $\mathbb{F} \rightarrow F, \mathbb{F}^1 \rightarrow F^1$ и $\text{Forg}_1^{-1}([f]_{\text{isot}}) \rightarrow [f]_{\text{isot}}$ являются гомотопическими эквивалентностями согласно [1; теорема 2.5], получаем теорему 2.5.

Автор выражает благодарность С. А. Мелихову, Д. А. Пермякову и А. Т. Фоменко за внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. А. Кудрявцева, Д. А. Пермяков, “Оснащенные функции Морса на поверхностях”, *Матем. сб.*, **201**:4 (2010), 33–98.
- [2] Е. А. Кудрявцева, “Равномерная лемма Морса и критерий изотопности функций Морса на поверхностях”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2009, № 4, 13–22.

- [3] Е. А. Кудрявцева, “О гомотопическом типе пространств функций Морса на поверхностях”, *Матем. сб.*, 2013 (в печати), arXiv: [math.GT/1104.4796](https://arxiv.org/abs/math.GT/1104.4796).
- [4] Е. А. Кудрявцева, “Специальные оснащенные функции Морса на поверхностях”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2012, № 4, 14–20.
- [5] Е. А. Кудрявцева, “Реализация гладких функций на поверхностях в виде функций высоты”, *Матем. сб.*, **190**:3 (1999), 29–88.
- [6] В. В. Шарко, “Функции на поверхностях, I”, *Некоторые проблемы современной математики*, Праці Ін-ту матем. НАН України, **25**, Наукова думка, Киев, 1998, 408–434.
- [7] S. I. Maksymenko, “Path-components of Morse mappings spaces of surfaces”, *Comment. Math. Helv.*, **80**:3 (2005), 655–690.
- [8] Yu. Burman, “Morse theory for functions of two variables without critical points”, *Funct. Differ. Equ.*, **3**:1-2 (1995), 31–43.
- [9] Yu. M. Burman, “Triangulations of surfaces with boundary and the homotopy principle for functions without critical points”, *Ann. Global Anal. Geom.*, **17**:3 (1999), 221–238.
- [10] Е. А. Кудрявцева, “Связные компоненты пространств функций Морса с фиксированными критическими точками”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2012, № 1, 3–12.
- [11] В. И. Арнольд, “Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Кокстера”, *УМН*, **47**:1 (1992), 3–45.
- [12] В. И. Арнольд, “Топологическая классификация комплексных тригонометрических многочленов и комбинаторика графов с одинаковым числом вершин и ребер”, *Функц. анализ и его прил.*, **30**:1 (1996), 1–17.
- [13] E. V. Kulinich, “On topologically equivalent Morse functions on surfaces”, *Methods Funct. Anal. Topology*, **4**:1 (1998), 59–64.
- [14] V. I. Arnold, “Topological classification of Morse functions and generalisations of Hilbert’s 16-th problem”, *Math. Phys. Anal. Geom.*, **10**:3 (2007), 227–236.
- [15] S. Maksymenko, “Homotopy types of stabilizers and orbits of Morse functions on surfaces”, *Ann. Global Anal. Geom.*, **29**:3 (2006), 241–285.
- [16] А. Т. Фоменко, “Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем”, *ДАН СССР*, **287**:5 (1986), 1071–1075.
- [17] С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, “Изоэнергетические поверхности гамильтоновых систем, перечисление трехмерных многообразий в порядке возрастания их сложности и вычисление объемов замкнутых гиперболических многообразий”, *УМН*, **43**:1 (1988), 5–22.
- [18] С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, В. В. Шарко, “Круглые функции Морса и изоэнергетические поверхности интегрируемых гамильтоновых систем”, *Матем. сб.*, **135**:3 (1988), 325–345.
- [19] С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, “Теория типа Морса для интегрируемых гамильтоновых систем с ручными интегралами”, *Матем. заметки*, **43**:5 (1988), 663–671.
- [20] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, “Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:3 (1990), 546–575.
- [21] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, “Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Теорема классификации. I”, *Матем. сб.*, **185**:4 (1994), 27–80; “Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Теорема классификации. II”, *Матем. сб.*, **185**:5 (1994), 27–78.
- [22] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Введение в топологию интегрируемых гамильтоновых систем*, Кибернетика: неограниченные возможности и возможные ограничения, Наука, М., 1997.
- [23] Е. А. Кудрявцева, “Устойчивые топологические и гладкие инварианты сопряженности гамильтоновых систем на поверхностях”, *Топологические методы в теории гамильтоновых систем*, Факториал, М., 1998, 147–202.

- [24] Е. А. Кудрявцева, “Устойчивые инварианты сопряженности гамильтоновых систем на двумерных поверхностях”, *ДАН*, **361**:3 (1998), 314–317.
- [25] Ю. А. Браилов, Е. А. Кудрявцева, “Устойчивая топологическая несопряженность гамильтоновых систем на двумерных поверхностях”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1999, № 2, 20–27.
- [26] В. А. Васильев, “Топология пространств функций без сложных особенностей”, *Функци. анализ и его прил.*, **23**:4 (1989), 24–36.
- [27] A. Chenciner, F. Laudenbach, “Morse 2-jet space and h -principle”, *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, **40**:4 (2009), 455–463.
- [28] A. E. Hatcher, “Higher simple homotopy theory”, *Ann. of Math. (2)*, **102**:1 (1975), 101–137.
- [29] C. J. Earle, J. Eells, “The diffeomorphism group of a compact Riemann surface”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:4 (1967), 557–559.
- [30] C. J. Earle, J. Eells, “A fibre bundle description of Teichmüller theory”, *J. Differential Geometry*, **3** (1969), 19–43.
- [31] S. Smale, “Diffeomorphisms of the 2-sphere”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **10** (1959), 621–626.
- [32] M. Dehn, “Die Gruppe der Abbildungsklassen. Das arithmetische Feld auf Flächen”, *Acta Math.*, **69**:1 (1938), 135–206.
- [33] J. S. Birman, A. Lubotzky, J. McCarthy, “Abelian and solvable subgroups of the mapping class group”, *Duke Math. J.*, **50**:4 (1983), 1107–1120.
- [34] Д. А. Пермяков, *Линейная независимость скручиваний Дэна*, Дипломная работа, 2009, <http://dfgm.math.msu.su/files/Ostudents/2009-dip-permyakov.pdf>.
- [35] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс, *Курс гомотопической топологии*, Наука, М., 1989.
- [36] J. S. Birman, “Mapping class groups and their relationship to braid group”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **22** (1969), 213–238.

Е. А. Кудрявцева

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: ekudr@mech.math.msu.su

Поступило

27.04.2011