Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Гришин, О центре относительно свободной лиевски нильпотентной алгебры индекса 4, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 1, 147–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9142>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 05:14:00

О центре относительно свободной лиевски нильпотентной алгебры индекса 4

А. В. Гришин

Пусть $F = k\langle 1, x_1, \dots, x_i, \dots \rangle$ – свободная ассоциативная счетнопорожденная алгебра с единицей над бесконечным полем k характеристики $p > 0$. Рассмотрим относительно свободную лиевски нильпотентную алгебру $F^{(\ell)} = F/T^{(\ell)}$, где $T^{(\ell)} = ([x_1, \dots, x_\ell])^T$ – T -идеал, порожденный длинным коммутатором $[x_1, \dots, x_\ell]$. При $\ell = 3$ мы получаем относительно свободную алгебру Грассмана, T -пространства и центр в которой достаточно хорошо изучены (см. [1]–[3]). Как уже отмечалось в [4], строение T -пространств в $T^{(3)}/T^{(4)}$ заметно отличается от $T^{(2)}/T^{(3)}$. Однако центр алгебры $F^{(4)}$ при $p > 3$ имеет достаточно хорошее описание (правда несколько более сложное, чем центр алгебры $F^{(3)}$).

Для простоты переменные x_i и их образы в алгебре $F^{(\ell)}$ будем обозначать одними и теми же буквами. Напомним некоторые факты, которые используются при изучении алгебры $F^{(\ell)}$ (см. [4]–[6]).

I. Соотношения Фробениуса. Если $p^s \geq \ell$ и $p > 2$, то в алгебре $F^{(\ell)}$ справедливы соотношения

- 1) $[x_1^{p^s}, x_2] = 0$;
- 2) $(x_1 + x_2)^{p^s} = x_1^{p^s} + x_2^{p^s}$;
- 3) $(x_1 x_2)^{p^s} = x_1^{p^s} x_2^{p^s}$.

II. Лемма Латышева. $T^{(r)}T^{(s)} \subset T^{(r+s-2)}$.

III. Лемма Воличенко. Если характеристика поля k больше 3 и $\ell \geq 4$, то $T^{(\ell-2)}T^{(3)} \subset T^{(\ell)}$, в частности $T^{(3)}T^{(2)} \subset T^{(4)}$.

IV. $T^{(\ell-1)} \underbrace{T^{(2)} \dots T^{(2)}}_n \not\subset T^{(\ell)}$ при нечетном ℓ и любом n .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из леммы Воличенко следует, что при $\ell = 4$ $\bar{T}^{(3)} = T^{(3)}/T^{(4)}$ лежит в центре алгебры $F^{(4)}$.

Отметим, что соотношения Фробениуса зависят от двух переменных и, следовательно, имеют место также и в относительно свободной альтернативной лиевски нильпотентной алгебре.

В теории T -пространств (линейных подпространств относительно свободных алгебр, замкнутых относительно эндоморфизмов этих алгебр) важную роль играет T -пространство W_p в алгебре $F^{(\ell)}$, порожденное всеми p -словами, т.е. одночленами, в которые каждая переменная входит с кратностью p . Отметим, что T -пространство W_p является подалгеброй в алгебре $F^{(\ell)}$. Одним из важных применений соотношений Фробениуса является (см. [4])

ТЕОРЕМА 1. Если $p \geq \ell > 2$, то W_p раскладывается в прямую сумму T -пространств

$$W_p = D_p \oplus CD_p,$$

где $D_p = \{x_1^p\}^T$ – T -пространство, порожденное p -й степенью переменной (подалгебра, изоморфная алгебре коммутативных многочленов от счетного набора переменных), а CD_p – пересечение W_p с коммутатором алгебры $F^{(\ell)}$, являющееся нильпотентным нильрадикалом W_p , на котором выполнено тождество $x_1^p = 0$.

Всюду ниже $\ell = 4$ и $p > 3$. Согласно [3] центр алгебры $F^{(3)}$ совпадает с образом алгебры W_p в алгебре $F^{(3)}$. Поэтому достаточно проанализировать какие элементы из $W_p = D_p \oplus CD_p$ лежат в центре алгебры $F^{(4)}$. Ясно, что D_p лежит в центре. Алгебра CD_p по модулю $\bar{T}^{(3)}$ описана в [2]. Она (с точностью до $\bar{T}^{(3)}$) состоит из всевозможных линейных комбинаций выражений вида

$$c_1 \dots c_m d^p, \quad (1)$$

где c_i – многочлены вида $[x_1, x_2]x_1^{r_1}x_2^{r_2}$ от непересекающихся множеств переменных, d – произвольный одночлен, в который не входят переменные из $c_1, \dots, c_m$.

Если $m > 1$, то из леммы Воличенко сразу следует, что выражение (1) лежит в центре. Покажем, что этим все и исчерпывается. Другими словами, если в некоторой линейной комбинации выражений (1) нетривиальным образом присутствует слагаемое с $m = 1$, то эта линейная комбинация не лежит в центре алгебры $F^{(4)}$. Допустим, что некоторый полиоднородный элемент вида $[x_1, x_2]x_1^{r_1}x_2^{r_2}d^p + \dots$ централен. Полагая все переменные кроме x_1 и x_2 равными 1, получаем, что элемент $[x_1, x_2]x_1^{r_1}x_2^{r_2}$ централен. Применяя подстановку $x_1 \mapsto x_1 + 1$, $x_2 \mapsto x_2 + 1$ и выделяя (что всегда возможно в силу бесконечности поля k) полиоднородную компоненту типа $(1, 1)$, получаем, что $[x_1, x_2]$ лежит в центре алгебры $F^{(4)}$. Но это невозможно, так как $[x_1, x_2, x_3]$ не лежит в $T^{(4)}$. Отсюда следует

ТЕОРЕМА 2. При $p > 3$ центр алгебры $F^{(4)}$ совпадает с

$$D_p \oplus (CD_p^2 + \bar{T}^{(3)}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Представляет значительный интерес вопрос об описании центра алгебры $F^{(\ell)}$ при $\ell > 4$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А. В. Гришин, Л. М. Цыбуля, *Матем. сб.*, **200**:9 (2009), 41–80. [2] А. В. Гришин, Л. М. Цыбуля, *Фундамент. и прикл. матем.*, **15**:8 (2009), 3–93. [3] А. В. Гришин, *УМН*, **65**:4 (2010), 191–192. [4] А. В. Гришин, “О T -пространствах в относительно свободной дупорожденной лиевски нильпотентной алгебре индекса 4”, *Фундамент. и прикл. матем.* (в печати). [5] В. Н. Латышев, *Сиб. матем. журн.*, **6** (1965), 1432–1434. [6] И. Б. Воличенко, *T -идеал, порожденный элементом $[x_1, x_2, x_3, x_4]$* , Препринт, Институт математики АН БССР, Минск, 1978.

А. В. Гришин

Московский педагогический государственный университет
E-mail: grishinaleksandr@yandex.ru

Поступило

22.04.2011