Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Ю. Лимонченко, Биградуированные числа Бетти
некоторых простых многогранников, *Матем. заметки*,
2013, том 94, выпуск 3, 373–388

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9144>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:18:00

Биградуированные числа Бетти некоторых простых многогранников

И. Ю. Лимонченко

Биградуированные числа Бетти $\beta^{-i,2j}(P)$ простого многогранника P – это размерности биградуированных компонент Тог-групп его кольца граней $\mathbf{k}[P]$. Числа $\beta^{-i,2j}(P)$ отражают комбинаторную структуру P , а также, топологическую структуру соответствующего момент-угол многообразия $\mathcal{Z}_P$ и поэтому находят многочисленные приложения в комбинаторной коммутативной алгебре и торической топологии. В работе вычисляются некоторые биградуированные числа Бетти типа $\beta^{-i,2(i+1)}$ для ассоциэдров и дается приложение вычисления биградуированных чисел Бетти для многогранников усечения к исследованию топологии их момент-угол многообразий. Эти две серии простых многогранников доставляют, предположительно, минимум и максимум значений $\beta^{-i,2j}(P)$ среди всех простых многогранников P с фиксированными размерностью и числом гиперграней.

Библиография: 10 названий.

DOI: 10.4213/mzm9144

1. Введение. Мы рассматриваем *простые выпуклые n -мерные многогранники* P в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Такой многогранник P может быть задан как пересечение m полупространств:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_i, x \rangle + b_i \geq 0 \text{ для } i = 1, \dots, m\}, \quad (1.1)$$

где $a_i \in \mathbb{R}^n$, $b_i \in \mathbb{R}$. Мы предполагаем, что гиперграни, определяемые равенствами $\langle a_i, x \rangle + b_i = 0$, находятся в общем положении, т.е. не более n из них имеют пересечением точку. Будем также считать, что в (1.1) нет лишних условий, т.е. ни одно неравенство не может быть вычеркнуто в (1.1) без изменения P . Тогда P имеет в точности m гиперграней, которые даются формулами

$$F_i = \{x \in P : \langle a_i, x \rangle + b_i = 0\} \quad \text{для } i = 1, \dots, m.$$

Пусть A_P есть $m \times n$ матрица векторов-строк a_i , и пусть b_P есть вектор-столбец скаляров $b_i \in \mathbb{R}$. Тогда мы можем рассматривать (1.1) как

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : A_P x + b_P \geq 0\},$$

Работа выполнена при поддержке гранта президента РФ № МД-2253.2011.1.

и будем иметь аффинное отображение

$$i_P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad i_P(\mathbf{x}) = A_P \mathbf{x} + \mathbf{b}_P.$$

С его помощью P вкладывается в

$$\mathbb{R}_{\geq}^m = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : y_i \geq 0 \text{ для } i = 1, \dots, m\}.$$

Следующая конструкция (см. [1; конструкция 7.8]) позволяет определить пространство $\mathcal{Z}_P$ из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_P & \xrightarrow{i_Z} & \mathbb{C}^m \\ \downarrow & & \downarrow \mu \\ P & \xrightarrow{i_P} & \mathbb{R}_{\geq}^m \end{array} \quad (1.2)$$

где $\mu(z_1, \dots, z_m) = (|z_1|^2, \dots, |z_m|^2)$. Последнее отображение можно представить себе, как орбитное отображение покоординатного действия стандартного тора

$$\mathbb{T}^m = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^m : |z_i| = 1 \text{ для } i = 1, \dots, m\}$$

на $\mathbb{C}^m$. Таким образом, $\mathbb{T}^m$ действует на $\mathcal{Z}_P$ с пространством орбит P , и i_Z есть $\mathbb{T}^m$ -эквивариантное вложение.

В силу [1; лемма 7.2] $\mathcal{Z}_P$ является гладким многообразием размерности $m + n$, называемым *момент-угол многообразием*, соответствующим многограннику P .

Обозначим через K_P границу ∂P^* двойственного симплицального многогранника. Она является симплицальным комплексом на множестве $[m] = \{1, \dots, m\}$, симплексы которого суть такие подмножества $\{i_1, \dots, i_k\} \subset [m]$, что $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} \neq \emptyset$ в P .

Пусть $\mathbf{k}$ – основное поле, $\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]$ есть градуированная полиномиальная алгебра от m переменных, $\deg(v_i) = 2$, и пусть $\Lambda[u_1, \dots, u_m]$ – внешняя алгебра, $\deg(u_i) = 1$. *Кольцом граней* (или *кольцом Стенли–Райснера*) симплицального комплекса K на множестве $[m]$ называется фактор-кольцо

$$\mathbf{k}[K] = \mathbf{k}[v_1, \dots, v_m] / \mathcal{I}_K,$$

где $\mathcal{I}_K$ есть идеал, порожденный мономами $v_{i_1} \cdots v_{i_k}$, свободными от квадратов, причем $\{i_1, \dots, i_k\}$ не является симплексом в K . Мы будем называть $\mathcal{I}_K$ *идеалом Стенли–Райснера* симплицального комплекса K .

Заметим, что $\mathbf{k}[K]$ оказывается модулем над $\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]$ благодаря отображению канонической проекции. Размерности биградуированных компонент Тог-групп,

$$\beta(\mathbf{k}[K])^{-i, 2j} = \dim_{\mathbf{k}} \mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}^{-i, 2j}(\mathbf{k}[K], \mathbf{k}), \quad 0 \leq i, j \leq m.$$

называются *биградуированными числами Бетти* кольца граней $\mathbf{k}[K]$, см. [2] и [1; § 3.3]. Эти числа являются важными инвариантами комбинаторной структуры K . Обозначим, для удобства,

$$\beta^{-i, 2j}(P) = \beta^{-i, 2j}(K_P).$$

Тог-группы и биградуированные числа Бетти допускают топологическую интерпретацию благодаря следующему результату о когомологиях $\mathcal{Z}_P$:

ТЕОРЕМА 1.1 [1; теорема 8.6] или [3; theorem 4.7]. *Алгебра когомологий момент-угол многообразия $\mathcal{Z}_P$ изоморфна следующим алгебрам:*

$$H^*(\mathcal{Z}_P; \mathbf{k}) \cong \mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}[K_P], \mathbf{k}) \cong H[\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}[K_P], d],$$

где последняя алгебра есть алгебра когомологий дифференциальной биградуированной алгебры, причем биградуировка и дифференциал определяются как

$$\mathrm{bideg} u_i = (-1, 2), \quad \mathrm{bideg} v_i = (0, 2), \quad du_i = v_i, \quad dv_i = 0.$$

Таким образом, алгебра когомологий $\mathcal{Z}_P$ допускает биградуировку, и топологические числа Бетти $b^q(\mathcal{Z}_P) = \dim_{\mathbf{k}} H^q(\mathcal{Z}_P; \mathbf{k})$ удовлетворяют соотношению

$$b^q(\mathcal{Z}_P) = \sum_{-i+2j=q} \beta^{-i,2j}(P). \quad (1.3)$$

Двойственность Пуанкаре в когомологиях $\mathcal{Z}_P$ уважает биградуировку.

ТЕОРЕМА 1.2 [1; теорема 8.18]. *Имеет место следующая формула:*

$$\beta^{-i,2j}(P) = \beta^{-(m-n)+i,2(m-j)}(P).$$

В дальнейшем, мы опускаем поле коэффициентов $\mathbf{k}$ в записи групп (ко)гомологий. Для подмножества $I \subset [m]$ мы обозначаем через K_I соответствующий *полный подкомплекс* симплициального комплекса K (ограничение K на I). Следующий классический результат может быть получен в качестве следствия теоремы 1.1:

ТЕОРЕМА 1.3 (Хохстер, см. [1; следствие 8.8]). *При $K = K_P$ имеет место изоморфизм*

$$\beta^{-i,2j}(\mathcal{Z}_P) = \sum_{J \subset [m], |J|=j} \dim \tilde{H}^{j-i-1}(K_J).$$

Введем, также, следующее подмножество границы P :

$$P_I = \bigcup_{i \in I} F_i \subset P. \quad (1.4)$$

Заметим, что если $K = K_P$, то K_I является деформационным ретрактом P_I для всякого множества I . Следующий факт непосредственно следует из теоремы 1.3.

СЛЕДСТВИЕ 1.4. *Имеем*

$$\beta^{-i,2(i+1)}(P) = \sum_{I \subset [m], |I|=i+1} (cc(P_I) - 1),$$

где через $cc(P_I)$ обозначено число связных компонент множества P_I .

Структура этой работы такова. Вычисления для многогранников Сташефа (известных еще как ассоциэдры) даны в разделе 2. В разделе 3 мы вычисляем биградуированные числа Бетти для многогранников усечения (получающихся из симплексов последовательным срезанием вершин) полностью. Это вычисление было впервые проделано в [4] с помощью похожей, но несколько отличающейся от нашей техники; комбинаторное доказательство частичного результата в этом направлении было

получено в [5]. Наконец, мы применяем наши вычисления к известному описанию с точностью до диффеоморфизма многообразий $\mathcal{Z}_P$ для многогранников усечения, см. [6].

Автор благодарен своему научному руководителю Т. Е. Панову за продолжительные обсуждения и полезные советы, столь необходимые во время выполнения этой работы.

2. Многогранники Сташефа. Многогранники Сташефа, также известные как *ассоциэдры*, были введены как комбинаторные объекты в работе Сташефа по высшей ассоциативности [7]. Различные выпуклые реализации многогранников Сташефа были найдены Милнором и другими, см. [8].

Мы обозначаем n -мерный многогранник Сташефа через As^n . Тогда i -мерные грани As^n , $0 \leq i \leq n-1$, взаимно-однозначно соответствуют множествам из $n-i$ попарно не пересекающихся диагоналей в $(n+3)$ -угольнике G_{n+3} (мы считаем здесь, что диагонали, исходящие из одной вершины, не пересекаются). Грань H содержится в грани H' тогда и только тогда, когда множество диагоналей, соответствующее H , содержит множество диагоналей, соответствующее H' .

Так, вершины As^n соответствуют полным триангуляциям G_{n+3} диагоналями, а гиперграни As^n соответствуют диагоналям G_{n+3} . Таким образом, мы отождествляем множество диагоналей G_{n+3} с множеством гиперграней $\{F_1, \dots, F_m\}$ многогранника As^n и отождествляем оба этих множества с $[m]$, когда это удобно. Нам понадобится выпуклая реализация As^n из [8; лекция II, теорема 5.1].

ТЕОРЕМА 2.1. *Многогранник As^n может быть представлен как пересечение параллелепипеда*

$$\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : 0 \leq y_j \leq j(n+1-j) \text{ для } 1 \leq j \leq n\}$$

с полупространствами

$$\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : y_j - y_k + (j-k)k \geq 0\}$$

для $1 \leq k < j \leq n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Имеем*

$$b^3(\mathcal{Z}_{As^n}) = \beta^{-1,4}(As^n) = \binom{n+3}{4}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Число $\beta^{-1,4}(P)$ равно количеству мономов $v_i v_j$ в идеале Стенли–Райснера многогранника P , см. [1; §3.3], а также, количеству пар непересекающихся гиперграней P . В случае $P = As^n$ последнее равно количеству пар пересекающихся диагоналей $(n+3)$ -угольника G_{n+3} , см. [8; лекция II, следствие 6.2]. Остается заметить, что для каждой четверки вершин многоугольника G_{n+3} существует в точности одна пара пересекающихся диагоналей, концами которых будут эти 4 вершины.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вычисление, проведенное выше, может быть проделано также при помощи общей формулы $\beta^{-1,4}(P) = \binom{f_0}{2} - f_1$, см. [1; лемма 8.13], где f_i есть число $(n-i-1)$ -граней многогранника P . Числа f_i для As^n хорошо известны, см. [8; лекция II].

В дальнейшем мы предполагаем, что никакие 3 диагонали многоугольника G_{n+3} не проходят через одну точку, что может быть достигнуто малым шевелением его вершин. Выберем и фиксируем циклический порядок на вершинах G_{n+3} так, что 2 последовательные вершины будут соединены ребром многоугольника. Будем называть диагонали G_{n+3} , соединяющие i -ю и $(i+2)$ -ю вершины (modulo $n+3$) для $i = 1, \dots, n+3$, *короткими*; остальные диагонали – *длинными*.

Назовем точки пересечения диагоналей, находящиеся внутри G_{n+3} , *отмеченными точками*, а всякий отрезок диагонали, соединяющий 2 отмеченные точки, лежащие на этой диагонали, назовем *отмеченным отрезком*. Наконец, будем называть *отмеченным треугольником* треугольник, вершинами которого являются 3 отмеченных точки, а сторонами – 3 отмеченных отрезка.

ТЕОРЕМА 2.3. *Имеем*

$$b^4(\mathcal{Z}_{As^n}) = \beta^{-2,6}(As^n) = 5 \binom{n+4}{6}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам нужно найти число порождающих 4-й группы когомологий $H[\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}[K_P], d]$, см. теорему 1.1 (заметим, что здесь $m = (n+3)n/2$ – число диагоналей G_{n+3}). Эта группа порождена когомологическими классами коциклов вида $u_i u_j v_k$, где все 3 индекса попарно различны, и $u_i v_k, u_j v_k$ суть 3-коциклы. Эти 3-коциклы соответствуют парам $\{i, k\}$ и $\{j, k\}$ пересекающихся диагоналей многоугольника G_{n+3} , а также паре отмеченных точек, лежащих на k -й диагонали. Таким образом, всякий коцикл $u_i u_j v_k$ представляется отмеченным отрезком. Равенство $d(u_i u_j v_k) = u_i u_j v_k - u_i v_j u_k + v_i u_j u_k$ показывает, что когомологические классы, представленные коциклами, стоящими в его правой части, являются линейно зависимыми. Каждое такое равенство взаимно-однозначно соответствует отмеченному треугольнику.

Таким образом, мы получили, что $\beta^{-2,6}(As^n) = S_{n+3} - T_{n+3}$, где S_{n+3} есть число отмеченных отрезков, а T_{n+3} есть число отмеченных треугольников внутри G_{n+3} . Эти два числа находятся при помощи следующих трех лемм.

ЛЕММА 2.4. *Число отмеченных треугольников внутри G_{n+3} есть*

$$T_{n+3} = \binom{n+3}{6}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для 6-угольника существует ровно один отмеченный треугольник (см. рис. 1); таким образом, всякие 6 вершин многоугольника G_{n+3} дают нам ровно один отмеченный треугольник.

Рис. 1

Пусть d есть диагональ G_{n+3} ; обозначим через $p(d)$ число отмеченных точек, лежащих на d . Определим *длину* диагонали d как наименьшее из двух чисел, равных количеству вершин G_{n+3} , лежащих в одной из двух открытых полуплоскостей, определяемых диагональю d , соответственно. Таким образом, короткие диагонали имеют длину 1, и все диагонали имеют длины $\leq (n+1)/2$. Будем называть диагонали максимальной длины *максимальными*. Очевидно, что $p(d)$ зависит только от длины диагонали d , поэтому мы обозначим через $p(j)$ число отмеченных точек на диагонали длины j .

ЛЕММА 2.5. *Если $n = 2k - 1$ – нечетное число, то*

$$S_{n+3} = \frac{n+3}{2} \sum_{l=1}^{k-1} (4l^2 k^2 - 2k(2l^3 + l)) + \frac{n+3}{4} k^2 (k^2 - 1).$$

Если $n = 2k - 2$ – четное число, то

$$S_{n+3} = \frac{n+3}{2} \sum_{l=1}^{k-1} (4l^2 k^2 - 2k(2l^3 + 2l^2 + l) + (l^4 + 2l^3 + 2l^2 + l)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, сначала, что $n = 2k - 1$. Тогда

$$\begin{aligned} S_{n+3} &= \sum_d \frac{p(d)(p(d) - 1)}{2} \\ &= (n+3) \left(\sum_{j=1}^{(n+1)/2} \frac{p(j)(p(j) - 1)}{2} \right) - \left(\frac{n+3}{2} \right) \frac{p((n+1)/2)(p((n+1)/2) - 1)}{2}, \end{aligned}$$

поскольку число отмеченных отрезков на максимальных диагоналях посчитано в сумме дважды.

Обозначим через v $(n+3)$ -ю (для определенности) вершину многоугольника G_{n+3} и занумеруем диагонали, исходящие из v , их длинами. Будем обозначать через $c(i, j)$ суммарное число точек пересечения j -й диагонали, исходящей из v , с диагоналями, исходящими из i -й вершины для $1 \leq i \leq j \leq (n+1)/2$. Положим, также, $c(i, j) = 0$ при $i > j$. Тогда будем иметь

$$p(j) = \sum_{i=1}^{(n+1)/2} c(i, j). \quad (2.1)$$

Для того, чтобы вычислить $c(i, j)$, заметим, что

$$\begin{aligned} c(1, 1) &= n, \\ c(i, j-1) &= c(i, j) + 1 \quad \text{для } 1 \leq i < j \leq \frac{n+1}{2}, \\ c(i+1, j+1) &= c(i, j) - 1 \quad \text{для } 1 \leq i \leq j \leq \frac{n-1}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$c(i, j) = c(1, j-i+1) - (i-1) = c(1, 1) - (j-i) - (i-1) = n-j+1, \quad (2.2)$$

при $i \leq j$. Заметим, что $c(i, j)$ не зависит от i . Подставляя это в (2.1), а затем, подставляя результирующее выражение для $p(j)$ в сумму для S_{n+3} выше, мы получаем требуемую формулу в этом случае.

Случай $n = 2k - 2$ рассматривается аналогично. Единственное различие заключается в том, что теперь из каждой вершины исходят две максимальные диагонали G_{n+3} , так что вычитание в сумме для S_{n+3} не требуется.

ЛЕММА 2.6. *Число отмеченных отрезков внутри G_{n+3} есть*

$$S_{n+3} = (n+3) \binom{n+3}{5}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это может быть получено из леммы 2.5 суммированием, если использовать известные формулы для сумм Σ_n n -ых степеней первых $(k-1)$ натуральных чисел:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \frac{k(k-1)}{2}, & \Sigma_2 &= \frac{k(k-1)(2k-1)}{6}, \\ \Sigma_3 &= \frac{k^2(k-1)^2}{4}, & \Sigma_4 &= \frac{k(k-1)(2k-1)(3k^2-3k-1)}{30}. \end{aligned}$$

Теперь утверждение теоремы 2.3 следует из результатов леммы 2.5 и леммы 2.6.

Отметим следующий важный для дальнейшего факт (см. [8; лекция II, следствие 6.2]):

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. *Две гипергрani F_1 и F_2 многогранника As^n не пересекаются тогда и только тогда, когда соответствующие диагонали d_1 и d_2 многоугольника G_{n+3} пересекаются (в отмеченной точке).*

ЛЕММА 2.8. *Число отмеченных точек на максимальной диагонали многоугольника G_{n+3} равно*

$$q = q(n) = \begin{cases} \frac{n(n+2)}{4}, & \text{если } n \text{ четно,} \\ \frac{(n+1)^2}{4}, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $n = 2$ утверждение очевидно. Если n нечетно, полагая $j = (n+1)/2$ в (2.1) и используя (2.2), получим

$$p(j) = \sum_{i=1}^{(n+1)/2} c\left(i, \frac{n+1}{2}\right) = \frac{(n+1)^2}{4}.$$

Если n четно, то максимальная диагональ имеет длину $j = n/2$. Легко видеть, что в этом случае $p(j) = \sum_{i=1}^{n/2} c(i, j)$ вместо (2.1) а соотношение (2.2) сохраняется. Поэтому

$$p(j) = \sum_{i=1}^{n/2} c\left(i, \frac{n}{2}\right) = \frac{n(n+2)}{4}.$$

ТЕОРЕМА 2.9. Пусть $P = As^n$ есть n -мерный ассоциэдр, $n \geq 3$. Биградуированные числа Бетти многогранника P удовлетворяют соотношениям

$$\beta^{-q, 2(q+1)}(P) = \begin{cases} n+3, & \text{если } n \text{ четно;} \\ \frac{n+3}{2}, & \text{если } n \text{ нечетно,} \end{cases}$$

$$\beta^{-i, 2(i+1)}(P) = 0 \quad \text{для } i \geq q+1,$$

где $q = q(n)$ определено в лемме 2.8.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать теорему индукцией по n . База индукции $n = 3$ проверяется непосредственным вычислением, см. таблички биградуированных чисел Бетти ниже. По следствию 1.4 для того, чтобы вычислить $\beta^{-i, 2(i+1)}(P)$, мы должны найти все подмножества $I \subset [m]$, $|I| = i+1$, для которых соответствующие P_I имеют более одной связной компоненты. В случае $i = q$ мы докажем, что $cc(P_I) \leq 2$ для $|I| = q+1$, и опишем явно все I , для которых $cc(P_I) = 2$. В случае $i > q$ мы докажем, что $cc(P_I) = 1$ для $|I| = i+1$. Эти утверждения будут доказаны как отдельные леммы; переход индукции будет следовать из них в конце рассуждения.

Будем нумеровать вершины G_{n+3} целыми числами от 1 до $n+3$. Тогда всякая диагональ d соответствует упорядоченной по возрастанию паре (i, j) целых чисел таких, что $i < j-1$. Нам будет удобно рассматривать диагональ, соответствующую паре (i, j) , как целочисленный отрезок $[i, j]$ внутри отрезка $[1, n+3]$ на вещественной прямой. Тогда предложение 2.7 может быть переформулировано следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.10. Гиперграни F_1 и F_2 многогранника $P = As^n$ не пересекаются тогда и только тогда, когда соответствующие отрезки $[i_1, j_1]$ и $[i_2, j_2]$ перекрываются, т.е.

$$F_1 \cap F_2 = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad i_1 < i_2 < j_1 < j_2 \quad \text{или} \quad i_2 < i_1 < j_2 < j_1.$$

Пусть I есть множество диагоналей многоугольника G_{n+3} (или целочисленных отрезков на $[1, n+3]$), а P_I — соответствующее множество (1.4). Мы будем писать $I = I_1 \sqcup I_2$, как только P_I имеет в точности две связные компоненты, соответствующие I_1 и I_2 . Обозначим также через $e(I)$ множество концов отрезков из набора I ; это есть подмножество целых чисел от 1 до $n+3$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.11. Если $I = I_1 \sqcup I_2$, то подмножества $e(I_1)$ и $e(I_2)$ не пересекаются.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственное следствие предложения 2.10.

Для данного целого числа $m \in [1, n+3]$ и набора отрезков I обозначим через $c_I(m)$ число отрезков из I , исходящих из m (эквивалентно, число диагоналей из I , исходящих из вершины m). Тогда $0 \leq c_I(m) \leq n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.12. Если $I = I_1 \sqcup I_2$, то существует m такое, что $c_I(m) \leq (n+1)/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Выберем целые точки $m_1 \in e(I_1)$ и $m_2 \in e(I_2)$. Поскольку $c_I(m_1) > (n+1)/2$, $c_I(m_2) > (n+1)/2$ и $e(I_1)$, $e(I_2)$ не пересекаются по предыдущему предположению, мы получаем, что общее число элементов в множестве $e(I)$ больше, чем

$$2 + \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} = n+3.$$

Противоречие.

ЛЕММА 2.13. *Имеем $cc(P_I) \leq 2$ при $|I| > l(n) = n(n+2)/4$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем эту лемму индукцией по n .

Положим $n = 3$ и докажем наше утверждение от противного, т.е. предположим, что существует множество $I = I_1 \sqcup I_2 \sqcup I_3 \sqcup \dots$ диагоналей G_6 , $|I| \geq 4$, такое, что $cc(P_I) \geq 3$. Поскольку многоугольник G_6 имеет лишь 3 максимальных диагонали, найдется короткая диагональ $d \in I$; пусть $d \in I_1$. Так как $cc(P_I) \geq 3$, любые диагонали $e \in I_2$ и $f \in I_3$ пересекают d . Поэтому, e и f исходят из общей вершины A многоугольника G_6 . Мы получили противоречие с тем, что $e(I_2)$ и $e(I_3)$ не пересекаются (см. предложение 2.11).

Пусть теперь $n > 3$ и предположим, что существует множество $I = I_1 \sqcup I_2 \sqcup I_3 \sqcup \dots$ диагоналей G_{n+3} , $|I| > n(n+2)/4$, такое, что $cc(P_I) \geq 3$.

Если найдется целая точка $m \in [1, n+3]$ такая, что $c_I(m) = 0$, то мы можем считать, что m есть первая вершина и рассматривать I как множество диагоналей G_{n+2} (отрезок $[2, n+3]$ не может принадлежать I , поскольку иначе $cc(P_I) = 1$). Так как $l(n) > l(n-1)$, применение предположения индукции завершает доказательство леммы в этом случае.

Пусть $c_I(m) \geq 1$ для всякой целой точки $m \in [1, n+3]$. Тогда рассуждение, аналогичное приведенному в доказательстве предложения 2.12, показывает, что существует точка m такая, что $c_I(m) \leq n/3$. Рассмотрим 2 случая.

1. Найдется точка $m_0 \in e(I_k)$ для некоторого $1 \leq k \leq cc(P_I)$ с минимальным значением $c_I(m) \leq n/3$ такая, что $|I_k| > c_I(m_0)$.

Можно считать, что одна из таких m_0 является первой вершиной. Выбрасывая из I все отрезки, исходящие из 1, мы получаем новое множество $\tilde{I}$ отрезков внутри $[2, n+3]$ (отрезок $[2, n+3]$ не может принадлежать I , так как иначе $cc(P_I) \leq 2$). Имеем

$$|\tilde{I}| = |I| - c_I(1) > \frac{n(n+2)}{4} - \frac{n}{3} > \frac{(n-1)(n+1)}{4} = l(n-1).$$

По предположению индукции $2 \geq cc(P_{\tilde{I}}) \geq cc(P_I) \geq 3$. Противоречие.

2. Для всякой вершины m_0 с минимальной величиной $c_I(m) \geq 1$ имеем $|I_k| = c_I(m_0)$, где $m_0 \in e(I_k)$.

Снова мы можем считать, что одна из таких m_0 является первой вершиной $1 \in I_k$. Тогда $c_I(1) = 1$, так как иначе найдется ≥ 2 целых точек m внутри $[2, n+3]$, которые принадлежат $e(I_k)$ и имеют $c_I(m) = 1$ (напомним, что $|I_k| = c_I(m_0)$).

Без потери общности рассуждения можно считать, что $k = 1$. Тогда

$$|I| = 1 + |I_2| + |I_3| + \dots \leq 1 + (1 + q(n-1)) \leq 2 + \frac{n^2}{4} \leq \frac{n(n+2)}{4}.$$

Первое из неравенств выше имеет место, так как $\tilde{I} = I_2 \sqcup I_3 \sqcup \dots$ есть набор диагоналей G_{n+2} (отрезок $[2, n+3]$ не может принадлежать I , поскольку $cc(P_I) \geq 3$), и мы можем применить к набору $\tilde{I}$ предположение индукции в доказательстве основной теоремы 2.9, что дает нам $|\tilde{I}| \leq 1 + q(n-1)$. Получили противоречие с предположением $|I| > n(n+2)/4$.

ЛЕММА 2.14. Пусть $I = I_1 \sqcup I_2$, $|I| \geq q+1$, $|I_1| \geq 2$ и $|I_2| \geq 2$. Тогда найдется другой набор I' такой, что $I' = I'_1 \sqcup I'_2$, $|I'_1| = 1$ и $|I'| > |I|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проводится индукцией по n . Случаи $n = 3, 4, 5$ проверяются непосредственным вычислением (см. таблички в конце этого раздела).

Изменяя, если необходимо, нумерацию вершин G_{n+3} , мы можем считать, что первая вершина имеет минимальное значение $c_I(m)$. Тогда $c_I(1) \leq (n+1)/2$ по предложению 2.12. Без потери общности можем считать, что $1 \notin e(I_1)$.

Докажем, что отрезок $[2, n+3]$ не принадлежит I . В самом деле, в противном случае $c_I(1) > 0$ (иначе $cc(P_I) = 1$), $1 \in e(I_2)$, $[2, n+3] \in I_1$. Если $c_I(1) \geq 2$, то найдется целая точка $m \in e(I_2)$ внутри $[2, n+3]$ такая, что $c_I(m) = 1 < c_I(1)$, что противоречит выбору первой вершины. Тогда $c_I(1) = 1$ и $[2, n+3] \in I_1$ дают нам $|I_2| = c_I(1) = 1$, что противоречит предположению $|I_2| \geq 2$ в утверждении леммы.

Выбрасывая из I все отрезки, исходящие из 1, мы получим новый набор $\tilde{I}$ целочисленных отрезков внутри $[2, n+3]$. Заметим, что

$$|\tilde{I}| = |I| - c_I(1) \geq |I| - \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor. \quad (2.3)$$

Мы хотим применить предположение индукции к набору $\tilde{I}$ целочисленных отрезков внутри $[2, n+3]$, рассматриваемых как диагонали $(n+2)$ -угольника G_{n+2} . Чтобы сделать это, мы должны проверить предположения леммы для набора $\tilde{I}$.

Во-первых, мы утверждаем, что $\tilde{I} = \tilde{I}_1 \sqcup \tilde{I}_2$, т.е. $P_{\tilde{I}}$ имеет в точности две связные компоненты. В самом деле, это множество, очевидно, имеет не менее двух компонент, и число компонент не может быть больше двух по лемме 2.13, поскольку

$$|\tilde{I}| \geq |I| - \frac{n+1}{2} \geq q+1 - \frac{n+1}{2} > \frac{(n+1)^2}{4} - \frac{n+1}{2} = l(n-1).$$

Во-вторых, $|\tilde{I}_1| = |I_1| \geq 2$ и $|I_2| \geq |\tilde{I}_2| \geq 1$. Если $|\tilde{I}_2| = 1$, то мы имеем либо $c_I(1) = 1$, либо $c_I(1) = 2$. (В самом деле, если $c_I(1) = 0$, то $|I_2| = |\tilde{I}_2| = 1$, что противоречит предположениям леммы, а $c_I(1)$ не может быть больше 2, так как иначе $c_I(1)$ не является минимальным.) Таким образом, $|I_2| \leq 3$. Мы также имеем $|I_1| = |\tilde{I}_1| \leq p(d)$, где $d \in \tilde{I}_2 = \{d\}$, так как d пересекает всякую диагональ из I_1 . В силу леммы 2.8 $p(d) \leq q(n-1) \leq n^2/4$. Поэтому

$$|I| = |I_1| + |I_2| \leq p(d) + 3 \leq \frac{n^2}{4} + 3 \leq \frac{(n+1)^2}{4} < q(n) + 1 \leq |I|$$

при $n \geq 6$. Противоречие. Итак, $|\tilde{I}_2| \geq 2$.

Осталось проверить, что $|\tilde{I}| \geq q(n-1) + 1$. Если n нечетно, то

$$|\tilde{I}| \geq |I| - \frac{n+1}{2} \geq \frac{(n+1)^2}{4} + 1 - \frac{n+1}{2} = \frac{(n-1)(n+1)}{4} + 1 = q(n-1) + 1.$$

Если n четно, то

$$|\tilde{I}| \geq |I| - \frac{n}{2} \geq \frac{n(n+2)}{4} + 1 - \frac{n}{2} = \frac{n^2}{4} + 1 = q(n-1) + 1.$$

Теперь, применяя предположение индукции к набору $\tilde{I}$, находим новый набор целочисленных отрезков $\tilde{J}$ внутри $[2, n+3]$ с $|\tilde{J}| > |\tilde{I}|$ и $|\tilde{J}_1| = 1$. Тогда $\tilde{J}_1 = \{d\}$, где d есть диагональ многоугольника G_{n+2} . Таким образом, $|\tilde{J}| = |\tilde{J}_1| + |\tilde{J}_2| \leq 1 + p(d)$. Имеем $p(d) \leq q(n-1)$, и равенство имеет место тогда и только тогда, когда $d = d_{\max}$ есть максимальная диагональ в G_{n+2} . Поэтому, мы можем заменить $\tilde{J}$ набором $J' = J'_1 \sqcup J'_2$, где $J'_1 = \{d_{\max}\}$ и J'_2 есть множество всех диагоналей G_{n+2} , которые пересекают $d_{\max}$ в ее отмеченных точках. Действительно, имеем

$$|J'| = 1 + q(n-1) \geq 1 + p(d) \geq |\tilde{J}| > |\tilde{I}|. \quad (2.4)$$

Выбирая в качестве $d_{\max}$ в G_{n+2} диагональ, соответствующую отрезку $[2, k]$, где $k = [(n+7)/2]$, замечаем, что она является также и максимальной диагональю для G_{n+3} . Теперь положим $I'_1 = \{d_{\max}\}$ и берем в качестве I'_2 объединение J'_2 и всех диагоналей, исходящих из 1 и пересекающих $d_{\max}$. Поскольку число внутренних целых точек на $d_{\max}$ есть $[(n+1)/2]$, получаем из (2.4) и (2.3)

$$|I'| = 1 + |I'_2| = 1 + |J'_2| + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = |J'| + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor > |\tilde{I}| + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \geq |I|,$$

что завершает переход индукции.

ЛЕММА 2.15. Пусть $cc(P_I) = 2$, $I = I_1 \sqcup I_2$ и $|I| \geq q+1$. Тогда либо $|I_1| = 1$, либо $|I_2| = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. $|I_1| \geq 2$ и $|I_2| \geq 2$. По лемме 2.14, мы можем найти другой набор $I' = I'_1 \sqcup I'_2$ такой, что $|I'_1| = 1$ и $|I'| > |I| \geq q+1$. С другой стороны, $|I'_1| = 1$ дает $I'_1 = \{d\}$ и $|I'| \leq 1 + p(d) \leq 1 + q$. Противоречие.

ЛЕММА 2.16. Пусть $cc(P_I) = 2$, $I = I_1 \sqcup I_2$ и $|I| = q+1$. Тогда I_1 состоит из одной максимальной диагонали $d_{\max}$, а I_2 состоит из всех диагоналей G_{n+3} , пересекающих $d_{\max}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2.15 мы можем считать, что I_1 состоит из одной диагонали d . Тогда

$$1 + q = |I| = |I_1| + |I_2| \leq 1 + p(d) \leq 1 + q,$$

что дает нам $p(d) = q$ и $|I_2| = p(d)$.

ЛЕММА 2.17. Пусть $|I| > q+1$. Тогда $cc(P_I) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $|I| > q+1 > l(n)$. Поэтому, $cc(P_I) \leq 2$ в силу леммы 2.13. Предположим, что $cc(P_I) = 2$ и $I = I_1 \sqcup I_2$. Тогда $|I_1| = 1$ по лемме 2.15, т.е. $I_1 = \{d\}$ и $|I| \leq 1 + p(d) \leq 1 + q$. Но это противоречит предположению $|I| > q+1$.

Теперь мы можем закончить переход индукции в доказательстве теоремы 2.9. В силу следствия 1.4 и леммы 2.16 получаем, что число $\beta^{-q,2(q+1)}(P)$ равно количеству максимальных диагоналей многоугольника G_{n+3} . Последнее равно $n + 3$, если n четно, и $(n + 3)/2$, если n нечетно. Тот факт, что $\beta^{-i,2(i+1)}(P)$ равно нулю при $i \geq q + 1$, вытекает из следствия 1.4 и леммы 2.17.

Приведем также результаты вычисления биградуированных чисел Бетти для ассоциэдров As^n при $n \leq 5$, полученные с использованием компьютерной программы *Macaulay 2*, см. [9].

Таблички ниже имеют $n - 1$ строк и $m - n - 1$ столбцов. Число, стоящее на пересечении k -й строки и l -го столбца, равно $\beta^{-l,2(l+k)}(As^n)$, где $1 \leq l \leq m - n - 1$ и $2 \leq l + k \leq m - 2$. Остальные биградуированные числа Бетти равны нулю, за исключением $\beta^{0,0}(As^n) = \beta^{-(m-n),2m}(As^n) = 1$, см. [1; гл. 8]. Биградуированные числа Бетти, которые даются теоремой 2.9, отмечены жирным шрифтом.

1) $n = 2, m = 5$

5	5
---	---

2) $n = 3, m = 9$

15	35	24	3	0
0	3	24	35	15

3) $n = 4, m = 14$

35	140	217	154	49	7	0	0	0
0	28	266	784	1094	784	266	28	0
0	0	0	7	49	154	217	140	35

4) $n = 5, m = 20$

70	420	1089	1544	1300	680	226	44	4	0	0
0	144	1796	8332	20924	32309	32184	20798	8480	2053	264
0	0	12	264	2053	8480	20798	32184	32309	20924	8332
0	0	0	0	0	4	44	226	680	1300	1544

.....

Топология момент-угол многообразий $\mathcal{Z}_P$, соответствующих ассоциэдрам, пока еще слабо изучена даже для 3-мерных многогранников P . В последнем случае кольцо когомологий $H^*(\mathcal{Z}_P)$ обладает нетривиальными тройными произведениями Масси согласно результату Баскакова (см. [1; § 8.4] или [3; § 5.3]), откуда вытекает, что многообразие $\mathcal{Z}_P$ не является *формальным* в смысле рациональной теории гомотопий.

3. Многогранники усечения. Пусть P – простой n -мерный многогранник, и $v \in P$ – его вершина. Выберем гипергрань H такую, что H отделяет v от остальных вершин и v принадлежит положительному полупространству $H_{\geq}$, определяемому H . Тогда $P \cap H_{\geq}$ будет n -мерным симплексом, а $P \cap H_{\leq}$ – простым многогранником, который мы назовем *усечением* P . В том случае, если выбор срезаемой вершины ясен из контекста или неважен, мы будем использовать обозначение $vc(P)$. Мы также будем обозначать через $vc^k(P)$ многогранник, получающийся из P последовательным усечением, примененным k раз.

В качестве примера описанной процедуры рассмотрим многогранник $vc^k(\Delta^n)$, где Δ^n есть n -мерный симплекс, $n \geq 2$. Будем называть $vc^k(\Delta^n)$ *многогранником усечения*; у него, очевидно, $m = n + k + 1$ гиперграней. Заметим, что комбинаторный тип $vc^k(\Delta^n)$ зависит от выбора срезаемых вершин при $k \geq 3$, однако это обстоятельство не отразится на наших обозначениях.

Рассмотрим также симплициальный многогранник Q , двойственный к $vc^k(\Delta^n)$. Он известен под названием *многогранника пирамидальной надстройки* и получается из Δ^n последовательным добавлением пирамид над гипергранями.

Числа Бетти для многогранников усечения были вычислены в [4], но градуировка, использованная там, отлична от нашей. Мы формулируем этот результат ниже и даем его доказательство с несколько отличающейся от [4] аргументацией, используя нашу “топологическую” градуировку и обозначения.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $P = vc^k(\Delta^n)$ – многогранник усечения. Тогда для $n \geq 3$ биградуированные числа Бетти даются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \beta^{-i, 2(i+1)}(P) &= i \binom{k+1}{i+1}, & \beta^{-i, 2(i+n-1)}(P) &= (k+1-i) \binom{k+1}{k+2-i}, \\ \beta^{-i, 2j}(P) &= 0 & \text{для } i+1 < j < i+n-1. \end{aligned}$$

Остальные биградуированные числа Бетти нулевые кроме

$$\beta^{0,0}(P) = \beta^{-(m-n), 2m}(P) = 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Первая из формул выше была доказана в работе [5] комбинаторно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с анализа поведения биградуированных чисел Бетти при одном усечении. Пусть P – произвольный простой многогранник и $P' = vc(P)$. Обозначим через Q и Q' двойственные симплициальные многогранники, соответственно, а через K и K' – их граничные симплициальные комплексы. Тогда Q' получается с помощью добавления пирамиды с вершиной v над гипергранью F многогранника Q . Мы также введем обозначения V , V' и $V(F)$ для множества вершин Q , Q' и F , соответственно, так что $V' = V \cup v$.

Доказательство первой формулы основано на следующей лемме.

ЛЕММА 3.2. Пусть P – простой n -мерный многогранник с t гипергранями, и $P' = vc(P)$. Тогда

$$\beta^{-i, 2(i+1)}(P') = \binom{m-n}{i} + \beta^{-(i-1), 2i}(P) + \beta^{-i, 2(i+1)}(P).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя теорему 1.3 при $j = i + 1$, получаем

$$\begin{aligned} \beta^{-i, 2(i+1)}(P') &= \sum_{W \subset V', |W|=i+1} \dim \tilde{H}_0(K'_W) \\ &= \sum_{W \subset V', v \in W, |W|=i+1} \dim \tilde{H}_0(K'_W) + \sum_{W \subset V', v \notin W, |W|=i+1} \dim \tilde{H}_0(K'_W). \end{aligned}$$

Вторая сумма равна $\beta^{-i, 2(i+1)}(P)$ по той же теореме 1.3.

Для первой суммы получим: во множестве W имеется i “старых” вершин и одна “новая” v . Поэтому число связных компонент K'_W (на единицу большее размерности $\tilde{H}_0(K'_W)$) либо остается тем же (если $W \cap F \neq \emptyset$), либо увеличивается на 1 (если $W \cap F = \emptyset$, и в этом случае новая связная компонента есть новая вершина v). Количество подмножеств W последнего типа равно числу способов выбрать i вершин из $m - n$ “старых” вершин, не лежащих в F . Первая сумма, таким образом, дается формулой

$$\sum_{W \subset V, |W|=i} \dim \tilde{H}_0(K_W) + \binom{m-n}{i} = \beta^{-(i-1), 2i}(P) + \binom{m-n}{i},$$

в которой мы снова использовали теорему 1.3.

Теперь первая из формул теоремы 3.1 следует по индукции по числу усечений, если использовать тот факт, что, очевидно, $\beta^{-i, 2(i+1)}(\Delta^n) = 0$ для всех i и лемму 3.2.

Вторая формула в утверждении основной теоремы вытекает из биградуированной двойственности Пуанкаре, см. теорему 1.2.

Доказательство третьей формулы основывается на следующей лемме.

ЛЕММА 3.3. Пусть P – многогранник усечения, K – граничный симплицальный комплекс двойственного симплицального многогранника, V – множество вершин K , и W – непустое, собственное подмножество V . Тогда

$$\tilde{H}_i(K_W) = 0 \quad \text{для } i \neq 0, n-2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проводится индукцией по числу $m = |V|$ вершин комплекса K . Если $m = n+1$, то P – n -мерный симплекс, и K_W является стягиваемым для всякого непустого, собственного подмножества $W \subset V$.

Для того, чтобы сделать шаг индукции, рассмотрим $V' = V \cup v$ и $V(F)$ – то же, что и в начале доказательства основной теоремы 3.1. Предположим, что утверждение доказано для V , и пусть W – непустое, собственное подмножество V' .

Рассмотрим следующие 5 возможных случаев.

Случай 1: $v \in W$, $W \cap V(F) \neq \emptyset$. Если $V(F) \subset W$, то K'_W подразбиение $K_{W-\{v\}}$. Если же $W \cap V(F) \neq V(F)$, то имеем

$$K'_W = K_{W-\{v\}} \cup K'_{W \cap V(F) \cup \{v\}}, \quad K_{W-\{v\}} \cap K'_{W \cap V(F) \cup \{v\}} = K_{W \cap V(F)},$$

а тогда и $K_{W \cap V(F)}$, и $K'_{W \cap V(F) \cup \{v\}}$ являются, очевидно, стягиваемыми. С помощью точной последовательности Майера–Вьеториса, получаем

$$\tilde{H}_i(K'_W) \cong \tilde{H}_i(K_{W-\{v\}}).$$

Случай 2: $v \in W$, $W \cap V(F) = \emptyset$. В этом случае легко видеть, что: $K'_W = K_{W-\{v\}} \sqcup \{v\}$. Отсюда имеем

$$\tilde{H}_i(K'_W) \cong \begin{cases} \tilde{H}_i(K_{W-\{v\}}) \oplus \mathbf{k}, & \text{при } i = 0, \\ \tilde{H}_i(K_{W-\{v\}}), & \text{при } i > 0. \end{cases}$$

Случай 3: $W = V' - \{v\} = V$. В этом случае K'_W – симплицальный $(n-1)$ -диск и потому стягиваем.

Случай 4: $v \notin W$, $V(F) \subset W$, $W \neq V$. Мы имеем

$$K_W = K'_W \cup F, \quad K'_W \cap F = \partial F,$$

где ∂F обозначает границу гиперграни F . Поскольку, очевидно, ∂F есть симплициальная $(n-2)$ -сфера, а F есть симплициальный $(n-1)$ -диск, точная последовательность Майера–Вьеториса дает

$$\tilde{H}_i(K'_W) \cong \begin{cases} \tilde{H}_i(K_W), & \text{при } i < n-2, \\ \tilde{H}_i(K_W) \oplus \mathbf{k}, & \text{при } i = n-2. \end{cases}$$

Случай 5: $v \notin W$, $V(F) \not\subset W$. В этом случае, мы получаем сразу, что $K'_W \cong K_W$.

Итак, во всех рассмотренных случаях, мы получили

$$\tilde{H}_i(K'_W) \cong \tilde{H}_i(K_{W-\{v\}}) = 0 \quad \text{для } 0 < i < n-2,$$

чем и заканчивается доказательство нашей леммы по принципу математической индукции.

Теперь третья из формул теоремы 3.1 следует из теоремы 1.3 и леммы 3.3.

Последнее утверждение теоремы 3.1 следует из [1; следствие 8.19].

Для полноты изложения мы включили в этот раздел вычисление биградуированных чисел Бетти в случае $n=2$, т.е. когда P есть многоугольник.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Если $P = v^k(\Delta^2)$ есть $(k+3)$ -угольник, то

$$\begin{aligned} \beta^{-i,2(i+1)}(P) &= i \binom{k+1}{i+1} + (k+1-i) \binom{k+1}{k+2-i}, \\ \beta^{0,0}(P) &= \beta^{-(k+1),2(k+3)}(P) = 1, \\ \beta^{-i,2j}(P) &= 0 \quad \text{иначе.} \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это вычисление было проделано в [1; пример 8.21]. Результат может быть получен также из рассмотрения точной последовательности Майера–Вьеториса, как в доказательстве теоремы 3.1.

СЛЕДСТВИЕ 3.5. Биградуированные числа Бетти многогранников усечения $P = v^k(\Delta^n)$ зависят только от их размерности и числа гиперграней P и не зависят от комбинаторного типа P . Более того, числа $\beta^{-i,2(i+1)}$ не зависят и от размерности n .

Топологический тип соответствующих момент-угол многообразий Z_P описывается следующим образом.

ТЕОРЕМА 3.6 (см. [6; теорема 6.3]). Пусть $P = v^k(\Delta^n)$ есть многогранник усечения. Тогда соответствующее момент-угол многообразие Z_P диффеоморфно связной сумме произведений сфер

$$\#_{j=1}^k (S^{j+2} \times S^{2n+k-j-1}) \#^j \binom{k+1}{j+1},$$

где через $X^{\#k}$ обозначена связная сумма k копий X .

Легко видеть, что числа Бетти связной суммы, см. выше, согласованы с биградуированными числами Бетти многогранника P , см. [10].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Торические действия в топологии и комбинаторике*, МЦНМО, М., 2004.
- [2] R. P. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra*, Progr. Math., **41**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1996.
- [3] T. Panov, “Cohomology of face rings, and torus actions”, *Surveys in Contemporary Mathematics*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **347**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008, 165–201, arXiv: math.AT/0506526.
- [4] N. Terai, T. Hibi, “Computation of Betti numbers of monomial ideals associated with stacked polytopes”, *Manuscripta Math.*, **92**:4 (1997), 447–453.
- [5] S. Choi, J. S. Kim, “A combinatorial proof of a formula for Betti numbers of a stacked polytope”, *Electron. J. Combin.*, **17**:1 (2010), Research Paper 9, arXiv: math.CO/0902.2444.
- [6] F. Bosio, L. Meersseman, “Real quadrics in $\mathbb{C}^n$, complex manifolds and convex polytopes”, *Acta Math.*, **197**:1 (2006), 53–127.
- [7] J. D. Stasheff, “Homotopy associativity of H -spaces. I”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **108** (1963), 275–292.
- [8] V. M. Buchstaber, “Lectures on toric topology”, *Proceedings of Toric Topology Workshop KAIST 2008*, Trends in Mathematics, **10**, no. 1, ICMS, 2008, 1–64.
- [9] *Macaulay 2*, <http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/>.
- [10] T. Panov, “Moment-angle manifolds and complexes”, *Proceedings of Toric Topology Workshop KAIST 2010*, Trends in Mathematics, **12**, no. 1, ICMS, 2010, 43–69.

И. Ю. Лимонченко

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: iylim@mail.ru

Поступило

02.05.2011