Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Е. Ширшова, О свойствах интерполяционных групп,
Матем. заметки, 2013, том 93, выпуск 2, 295–304

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9149>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 14:01:11

О свойствах интерполяционных групп

Е. Е. Ширшова

Рассматриваются частично упорядоченные группы, удовлетворяющие интерполяционному условию, не обязательно направленные. Показано, что в таких группах справедлива теорема об изоморфизмах групп, несправедливая для частично упорядоченных групп в общем случае. Найден критерий почти ортогональности положительных элементов интерполяционных групп. Описывается местоположение подгруппы, ассоциированной с парой почти ортогональных элементов, в решетке подгрупп интерполяционной группы.

Библиография: 11 названий.

DOI: 10.4213/mzm9149

1. Введение. Пусть G – частично упорядоченная группа, e – единица группы G , множество $G^+ = \{x \in G \mid e \leq x\}$ – положительный конус группы G . Частично упорядоченная группа G называется *интерполяционной группой*, если для любых элементов $a_1, a_2, b_1, b_2 \in G$ из неравенств $a_1, a_2 \leq b_1, b_2$ следует существование элемента $c \in G$, для которого верны неравенства $a_1, a_2 \leq c \leq b_1, b_2$. Класс интерполяционных групп включает в себя классы решеточно упорядоченных групп (см. [1], [2]) и псевдо-решеточно упорядоченных групп (см., например, [3]). Если G – направленная интерполяционная группа, то G называется *группой Рисса–Фукса*. (Впервые Фукс в статье [4] 1965 г. назвал группой Рисса направленную интерполяционную группу, но позднее группами Рисса стали называть интерполяционные группы с изолированным частичным порядком.)

Цель данной работы – обобщение некоторых результатов, известных для групп Рисса–Фукса (см. [5], [6]) и псевдо-решеточно упорядоченных групп (см. [3], [7]).

В работе используется обычная для частично упорядоченных групп терминология (см., например, [1], [2]).

Подмножество M частично упорядоченной группы G называется *выпуклым*, если из неравенств $a \leq g \leq b$ следует $g \in M$ для всех $a, b \in M$ и $g \in G$. Подгруппа, являющаяся выпуклым подмножеством, называется *выпуклой подгруппой* группы G . Выпуклая направленная нормальная подгруппа частично упорядоченной группы называется *о-идеалом*.

В п. 2 содержится доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – интерполяционная группа, M – о-идеал группы G , ε – естественный гомоморфизм группы G на группу G/M , A – выпуклая направленная подгруппа группы G . Тогда $\varepsilon(A)$ (образ подгруппы A) – выпуклая направленная подгруппа факторгруппы G/M .

Обозначим символом $N(M)$ нормализатор подгруппы M в группе G .

Доказательство следующей теоремы содержится в п. 3 работы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть A и B – выпуклые направленные подгруппы интерполяционной группы G и $A \subseteq N(B)$. Тогда $AB = BA$ – выпуклая направленная подгруппа группы G .

Гомоморфизм $f: G \rightarrow H$ частично упорядоченной группы G в частично упорядоченную группу H называется *порядковым гомоморфизмом* (*о-гомоморфизмом*), если из неравенства $a \leq b$ следует верность неравенства $af \leq bf$ для всех $a, b \in G$. Если существует порядковый гомоморфизм f^{-1} , то f называется *о-изоморфизмом*.

ТЕОРЕМА 3. Пусть A и B – выпуклые направленные подгруппы интерполяционной группы G и $A \subseteq N(B)$. Тогда

- 1) существует сюръективный о-гомоморфизм группы Рисса–Фукса A на группу Рисса–Фукса AB/B с ядром $A \cap B$;
- 2) факторгруппа $A/A \cap B$ о-изоморфна группе AB/B .

Следует отметить, что в доказательстве теоремы 2 [6] не используется свойство направленности рассматриваемой группы, поэтому справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. В интерполяционной группе G для положительных элементов a и b следующие условия являются эквивалентными:

- 1) если $c \leq a, b$, то $c^n \leq a, b$ для любого целого числа $n > 0$ и любого элемента $c \in G$;
- 2) из неравенств $c \leq a, b$ следует верность неравенств $c^2 \leq a, b$ для любого элемента $c \in G$.

Элементы $a, b \in G^+$ частично упорядоченной группы G , удовлетворяющие условию 1) теоремы 4, называются *почти ортогональными*.

В частично упорядоченной группе G для каждого элемента $a \in G^+$ ($a \neq e$) существует выпуклая направленная подгруппа $[a]$, положительный конус которой состоит из элементов $x \in G^+$, удовлетворяющих неравенству $x \leq a^k$ для некоторого целого числа $k > 0$ (подробнее см. [7], [8]).

Применяя теорему 2, леммы 6 и 8, а также следствие 3 настоящей статьи можно утверждать следующее.

ТЕОРЕМА 5. Пусть G – интерполяционная группа. Если элементы $a, b \in G^+$ являются почти ортогональными в группе G , то верны следующие утверждения:

- 1) подгруппа $[a] \cap [b]$ является о-идеалом в группе $[a]$ и в группе $[b]$;
- 2) множество $[a][b] = [b][a]$ является выпуклой направленной подгруппой в группе G ;
- 3) подгруппы $[a]$ и $[b]$ являются о-идеалами группы $[a][b]$.

Для доказательства леммы 8 нам понадобится следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6. Пусть G – интерполяционная группа. Если элементы $a, b \in G^+$ являются почти ортогональными в группе G , то почти ортогональны любые их целые положительные степени.

Так как в доказательстве теоремы 5 [6] используется только интерполяционное свойство рассматриваемой группы, то справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 7. Пусть G – интерполяционная группа. Тогда каждой паре почти ортогональных элементов a и b группы G соответствует выпуклая направленная подгруппа $H(a, b)$, положительный конус которой состоит из элементов $x \in G^+$, удовлетворяющих неравенствам $x \leq a, b$.

Теорема 8 описывает местоположение подгруппы $H(a, b)$ в решетке подгрупп интерполяционной группы.

ТЕОРЕМА 8. Если элементы a и b являются почти ортогональными в интерполяционной группе G , то подгруппа $H(a, b)$ совпадает с пересечением подгрупп $[a]$ и $[b]$.

Следующие две теоремы доказываются в п. 5 статьи.

ТЕОРЕМА 9. Если элементы a и b почти ортогональны в интерполяционной группе G , то верны следующие утверждения:

- 1) существует o -гомоморфизм группы Рисса–Фукса $[a]$ на группу Рисса–Фукса $[a][b]/[b]$ с ядром $H(a, b)$;
- 2) факторгруппа $[a]/H(a, b)$ o -изоморфна факторгруппе $[a][b]/[b]$.

Обозначим буквой K теоретико-множественное объединение подгрупп $H(a_i, b_i)$ для всех пар почти ортогональных элементов a_i и b_i интерполяционной группы G и обозначим буквой H подгруппу, порожденную множеством K в группе G . Тогда справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 10. Если G – интерполяционная группа, то группа Рисса–Фукса H является o -идеалом группы G .

Применение леммы 9 и пункта (2) следствия 1 доказывает справедливость утверждения.

ТЕОРЕМА 11. Множество выпуклых направленных подгрупп интерполяционной группы G образует подрешетку L в решетке всех подгрупп группы G . Кроме того, L является полной подрешеткой сверху в решетке всех подгрупп.

2. Выпуклые подгруппы интерполяционных групп. Заметим, что из определения интерполяционной группы по индукции следует утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть G – интерполяционная группа. Тогда для любых целых чисел $m > 0, n > 0$ из справедливости неравенств $a_i \leq b_j$ (для всех индексов $i = 1, 2, \dots, m$ и $j = 1, 2, \dots, n$ элементов $a_i, b_j \in G$) следует существование элемента $z \in G$, для которого имеют место соотношения $a_i \leq z \leq b_j$.

ЛЕММА 1. Пусть G – интерполяционная группа, A – выпуклая подгруппа группы G . Тогда A – интерполяционная группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для элементов $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$ имеют место неравенства $a_1, a_2 \leq b_1, b_2$. Тогда по условию леммы в группе G существует элемент c , для которого верны неравенства $a_1, a_2 \leq c \leq b_1, b_2$. Из выпуклости подгруппы A следует, что $c \in A$.

СЛЕДСТВИЕ 1. (1) Всякая выпуклая направленная подгруппа интерполяционной группы является группой Рисса–Фукса.

(2) Если A и B – выпуклые направленные подгруппы интерполяционной группы G , то и $A \cap B$ – выпуклая направленная подгруппа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (1) является следствием леммы 1 и определения группы Рисса–Фукса.

Пусть элементы $x, y \in A \cap B$, тогда $x, y \in A$, и $x, y \in B$. В силу направленности подгрупп A и B существуют элементы $a \in A$ и $b \in B$, для которых имеют место неравенства $x, y \leq a, b$.

Из условия (2) следует существование элемента $u \in G$, для которого справедливы неравенства $x, y \leq u \leq a, b$. Так как подгруппы A и B являются выпуклыми, то элемент u является верхней гранью элементов x и y в группе $A \cap B$, поэтому, пересечение подгрупп является направленной группой.

Кроме того, подгруппа $A \cap B$ выпукла как пересечение выпуклых подгрупп [1; ч. I, гл. II, § 1].

Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ А. Пусть G – частично упорядоченная группа и M – выпуклая подгруппа группы G . Положив $M \leq Ma$ ($M \leq aM$), если $e \leq a'$ для некоторого элемента $a' \in Ma$ ($a' \in aM$), можно определить отношение частичного порядка на множестве всех правых (левых) смежных классов группы G по подгруппе M .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [3]. Если M – выпуклая (направленная) подгруппа частично упорядоченной группы G , то для любого элемента $a \in G$ класс Ma является выпуклым (направленным) подмножеством множества G .

ЛЕММА 2. Пусть G – интерполяционная группа, M – o -идеал группы G . Тогда факторгруппа G/M также является интерполяционной группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 4 [2; гл. II, § 3] следует, что G/M – частично упорядоченная группа.

Пусть для смежных классов $A_1, A_2, B_1, B_2 \in G/M$ имеют место неравенства $A_1, A_2 \leq B_1, B_2$. Тогда по замечанию А справедливы неравенства $a_1 \leq b_1, b_2$ и $a_2 \leq b'_1, b'_2$ для некоторых элементов

$$a_1 \in A_1, \quad a_2 \in A_2, \quad b_1, b'_1 \in B_1, \quad b_2, b'_2 \in B_2.$$

Так как по предложению 2 классы B_1 и B_2 являются направленными множествами, то существуют элементы $v_1 \in B_1$ и $v_2 \in B_2$, для которых верны неравенства $b_1, b'_1 \leq v_1$ и $b_2, b'_2 \leq v_2$. Значит, справедливы неравенства $a_1, a_2 \leq v_1, v_2$.

Из условия леммы следует существование элемента $c \in G$, для которого верны неравенства $a_1, a_2 \leq c \leq v_1, v_2$. Отсюда по замечанию А следует справедливость неравенств $A_1, A_2 \leq Mc \leq B_1, B_2$, где класс $Mc \in G/M$.

ЛЕММА 3. Пусть G – интерполяционная группа, M – выпуклая направленная подгруппа группы G и $Ma \leq Mb \leq Mc$ для элементов a, b, c из группы G . Тогда для любых элементов $a' \in Ma$, $c' \in Mc$ таких, что $a' \leq c'$, найдется элемент b' в классе Mb , для которого имеют место неравенства $a' \leq b' \leq c'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По замечанию А в классе Mb существуют элементы b_1 и b_2 , для которых верны неравенства $a' \leq b_1$ и $b_2 \leq c'$.

Так как по предложению 2 класс Mb является направленным множеством, то найдется элемент $x \in Mb$ для которого справедливы неравенства $b_1, b_2 \leq x$. Таким образом, имеют место неравенства $a', b_2 \leq x, c'$.

По условию леммы существует элемент $b' \in G$, для которого верны неравенства $a', b_2 \leq b' \leq x, c'$. Так как по предложению 2 класс Mb является выпуклым подмножеством группы G , то $b' \in Mb$.

ЛЕММА 4 [9]. Пусть G – интерполяционная группа и для элементов $x, a, b \in G^+$ справедливо неравенство $x \leq ab$. Тогда $x = cd$ для некоторых элементов $c, d \in G^+$, которые удовлетворяют неравенствам $c \leq a$ и $d \leq b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия леммы следует справедливость неравенств xb^{-1} , $e \leq a, x$. Тогда в группе G найдется элемент c , для которого справедливы неравенства xb^{-1} , $e \leq c \leq a, x$.

В этом случае для элемента $d = c^{-1}x \in G^+$ верны соотношения $d \leq b$ и $x = cd$.

Из леммы 4 по индукции следует утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если в интерполяционной группе G элемент $a \in G^+$ удовлетворяет неравенству $a \leq b_1 b_2 \cdots b_n$, где элементы $b_i \in G^+$, то в группе G существуют такие элементы $c_i \in G^+$, что

$$a = c_1 c_2 \cdots c_n \quad \text{и} \quad c_i \leq b_i \quad \text{для всех} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

ЛЕММА 5. Пусть G – интерполяционная группа, M – σ -идеал группы G , ε – естественный гомоморфизм группы G на группу G/M , A – выпуклая направленная подгруппа группы G . Если положительный класс X принадлежит подгруппе $\varepsilon(A)$, то в классе X найдется представитель из A^+ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из замечания А следует существование элемента $x \in X \cap G^+$. Так как класс X принадлежит подгруппе $\varepsilon(A)$, то найдется элемент $a \in A$, для которого $X = Ma$. Значит, элемент $x = ta$ для некоторого элемента $t \in M$.

Так как подгруппы A и M являются направленными, то существуют элементы $b \in A$ и $n \in M$, для которых верны неравенства $a, e \leq b$ и $t, e \leq n$. Таким образом, верны неравенства $e \leq x \leq nb$.

В силу леммы 4 элемент $x = cd$ для некоторых элементов $c, d \in G^+$, удовлетворяющих неравенствам $c \leq n$ и $d \leq b$. Так как подгруппы A и M являются выпуклыми, то $c \in M$ и $d \in A$. Следовательно, класс $X = Md$, где элемент $d \in A^+$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 [3]. Пусть G – частично упорядоченная группа, M – выпуклая нормальная подгруппа группы G , ε – естественный гомоморфизм группы G на группу G/M , A – направленная подгруппа группы G . Тогда $\varepsilon(A)$ – направленная подгруппа факторгруппы G/M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. В силу предложения 3 достаточно доказать, что подгруппа $\varepsilon(A)$ является выпуклым подмножеством в группе G/M .

Пусть имеют место неравенства $B \leq X \leq C$ для некоторых смежных классов $B, C \in \varepsilon(A)$ и $x \in G/M$. Тогда в группе G/M справедливы неравенства

$$M \leq XB^{-1} \leq CB^{-1} = D,$$

где класс $D \in \varepsilon(A)$.

По лемме 5 в классе D существует представитель $d \in A^+ \cap D$. Так как $e \in M$ и $e \leq d$, то по лемме 3 найдется элемент $u \in XB^{-1}$, для которого верны неравенства $e \leq u \leq d$. Так как подгруппа A является выпуклой, то элемент $u \in A$.

Таким образом, класс $XB^{-1} \in \varepsilon(A)$, т.е. и класс $X \in \varepsilon(A)$, и $\varepsilon(A)$ – выпуклая подгруппа группы G/M . Теорема доказана полностью.

3. Свойства гомоморфизмов интерполяционных групп.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4 [10; гл. I, § 4]. Если в произвольной группе G подгруппа A включена в нормализатор $N(B)$ подгруппы B , то $AB = BA$ – подгруппа группы G и существует сюръективный гомоморфизм подгруппы A на факторгруппу AB/B с ядром $A \cap B$.

ЛЕММА 6. Пусть A и B – выпуклые направленные подгруппы интерполяционной группы G и $A \subseteq N(B)$. Тогда $A \cap B$ – o -идеал группы A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 4 подгруппа $A \cap B$ является нормальной подгруппой группы A . Остается применить пункт (2) следствия 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. По предложению 4 множество AB – подгруппа группы G . Пусть $x, y \in AB$, тогда $x = ab$ и $y = uv$ для некоторых элементов $a, u \in A$ и $b, v \in B$.

Из направленности подгрупп A и B следует существование элементов $m \in A$ и $n \in B$, для которых верны неравенства $a, u \leq m$ и $b, v \leq n$. Из данных неравенств следует, что $x, y \leq mn$, где элемент $mn \in AB$. Следовательно, AB – направленная подгруппа.

Пусть, далее, для элемента $g \in G$ имеют место неравенства $x \leq g \leq y$. Тогда справедливы соотношения

$$e \leq gx^{-1} \leq yx^{-1} = z \in AB. \quad (1)$$

Таким образом, элемент $z = st$ для некоторых элементов $s \in A$ и $t \in B$. В силу направленности подгрупп A и B , не теряя общности, можно считать, что $s \in A^+$ и $t \in B^+$.

По лемме 4 из неравенств (1) следует существование элементов $c, d \in G^+$, для которых верны соотношения: $gx^{-1} = cd$, $c \leq s$ и $d \leq t$. Так как подгруппы A и B являются выпуклыми, то из последних неравенств следует, что $c \in A$ и $d \in B$, т.е. элемент $gx^{-1} \in AB$. Значит, элемент $g \in AB$, и подгруппа AB выпукла.

Теорема доказана полностью.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть A и B – выпуклые направленные подгруппы интерполяционной группы G и $A \subseteq N(B)$. Тогда B – o -идеал, а A – выпуклая направленная подгруппа группы AB .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 1.6 [3] и теореме 2 подгруппы A и B являются выпуклыми направленными подгруппами группы AB . Нормальность подгруппы B следует из условия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. 1) По теореме 2 и следствию 1 подгруппа AB является группой Рисса–Фукса. В силу леммы 2 и следствия 3 факторгруппа AB/B является интерполяционной группой. По предложению 3 группа AB/B является направленной группой, т.е. является группой Рисса–Фукса.

По следствию 3 группа A является выпуклой и направленной подгруппой интерполяционной группы, т.е. в силу следствия 1 подгруппа A – группа Рисса–Фукса.

По предложению 4 существует сюръективный гомоморфизм f группы A на группу AB/B с ядром $A \cap B$, определенный по правилу $af = aB$ для любого $a \in A$. Остается доказать, что f – порядковый гомоморфизм.

В силу замечания A справедливо включение $f(A^+) \subseteq (AB/B)^+$. Отсюда по предложению 3 [2; гл. II, § 3] следует утверждение теоремы.

2) По теореме 3 [2; гл. II, § 3] из доказанного выше следует существование изоморфизма групп $\varphi: A/A \cap B \rightarrow AB/B$, являющегося порядковым гомоморфизмом, для которого $\varphi(Ma) = af$ для $M = A \cap B$ и любого элемента $a \in A$.

Рассмотрим смежный класс $K \in (AB/B)^+$. По замечанию A существует представитель $x \in K \cap (AB)^+$. Так как $AB = BA$, то в этом случае элемент $x = uv$ для некоторых элементов $v \in A$ и $u \in B$. Так как подгруппы A и B являются направленными, то существуют элементы $a \in A^+$ и $b \in B^+$, для которых верны неравенства $u \leq b$ и $v \leq a$. Из последних неравенств следует, что $e \leq x \leq ba$.

По лемме 4 найдутся элементы $c, d \in G^+$, для которых верны соотношения

$$x = cd, \quad d \leq a, \quad c \leq b.$$

В силу выпуклости подгрупп A и B в группе G элемент $d \in A$ и элемент $c \in B$.

Таким образом, класс $K = Bd$, где представитель $d \in A^+$. Тогда прообраз $K\varphi^{-1} = (Bd)\varphi^{-1} = Md$, где по замечанию A класс $Md \in (A/M)^+$. Следовательно, имеет место включение $\varphi^{-1}((AB/B)^+) \subseteq (A/M)^+$, т.е. по предложению 3 [2; гл. II, § 3] функция φ^{-1} является σ -гомоморфизмом.

4. Почти ортогональность в интерполяционных группах.

ЛЕММА 7. Если положительные элементы a и b почти ортогональны в интерполяционной группе G , то соотношения $c \leq a^m, b^n$ влекут верность неравенств $c \leq a, b$ для всех целых чисел $m > 0, n > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства леммы 7 можно воспользоваться способом доказательства леммы 5 [6], если вместо условия 2) предложения B применить предложение 1 данной работы, а вместо условия 3) предложения B применить следствие 2 данной работы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Пусть элемент $x \in G$ и $x \leq a^m, b^n$ для целых положительных чисел $m > 0, n > 0$. Тогда по лемме 7 имеют место неравенства $x \leq a, b$. Отсюда по условию теоремы для всякого целого положительного числа k имеют место неравенства $x^k \leq a, b$, откуда по свойству транзитивности неравенств следует, что $x^k \leq a^m, b^n$. Следовательно, элементы a^m и b^n являются почти ортогональными.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5 [6]. Если элементы a и b являются почти ортогональными в частично упорядоченной группе G , то элемент $a \in N([b])$ и элемент $b \in N([a])$.

ЛЕММА 8. Пусть элементы a и b почти ортогональны в интерполяционной группе G . Тогда имеют место включения

$$[a] \subseteq N([b]) \quad \text{и} \quad [b] \subseteq N([a]).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем справедливость первого включения. Пусть элемент $x \in [a]$ и $x \geq e$, тогда по определению подгруппы $[a]$ элемент $x \leq a^n$ для некоторого целого числа $n > 0$. Рассмотрим элемент

$$c = bxb^{-1}x^{-1} = b(xb^{-1})^{-1} = (bxb^{-1})x^{-1}. \quad (2)$$

Из равенства (2) следует, что элемент $c \leq b, bxb^{-1}$, где элемент $bxb^{-1} \leq (bab^{-1})^n$.

Так как по лемме 1 [6] элементы bab^{-1} и b почти ортогональны в группе G , то по теореме 6 элементы $(bab^{-1})^n$ и b также почти ортогональны, поэтому, $c^2 \leq b$. Следовательно, $x^{-1}bx \leq b^2$. Так как элемент $x^{-1}bx \in G^+$, то $x^{-1}bx \in [b]$.

Если теперь элемент $u \in [b]^+$, то $u \leq b^k$ для некоторого целого числа $k > 0$, откуда $x^{-1}ux \leq (x^{-1}bx)^k$, т.е. $x^{-1}ux \in [b]$.

Пусть далее элемент $g \in [b]$, тогда $g = uv^{-1}$, где элементы u и v содержатся в $[b]^+$. Отсюда следует, что элемент $x^{-1}gx = (x^{-1}ux)(x^{-1}vx)^{-1}$, где по доказанному выше $x^{-1}ux, x^{-1}vx \in [b]$, т.е. $x^{-1}[b]x \subseteq [b]$.

Рассмотрим теперь элемент $d = x^{-1}b^{-1}xb$. Рассуждая аналогично предыдущему, получим верное неравенство $xbx^{-1} \leq b^2$. Это влечет соотношение $b \leq (x^{-1}bx)^2$. Значит, $b \in [x^{-1}bx]$. Отсюда следует верность включения $[b] \subseteq [x^{-1}bx]$, так как подгруппа $[x^{-1}bx]$ выпукла, а подгруппа $[b]$ является направленной. Откуда по лемме 2 [6] заключаем, что $[b] \subseteq x^{-1}[b]x$. Следовательно, $x^{-1}[b]x = [b]$.

Таким образом, элемент $x \in N([b])$, что влечет верность включения $[a]^+ \subseteq N([b])$. Но направленная подгруппа $[a]$ порождается своим положительным конусом. Следовательно, $[a] \subseteq N([b])$.

Второе утверждение доказывается аналогично.

5. Подгруппа, определенная парой почти ортогональных элементов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8. Пусть $M = [a] \cap [b]$, тогда M – выпуклая подгруппа как пересечение таких подгрупп [1; ч. I, гл. II, § 4].

Если элемент $x \in M$, то верны неравенства $x \leq a^m$ и $x \leq b^n$ для некоторых целых чисел $m > 0$ и $n > 0$. Тогда по условию теоремы в группе G существует элемент z , для которого справедливы неравенства $e, x \leq z \leq a^m, b^n$. Из выпуклости подгрупп $[a]$ и $[b]$ следует, что $z \in M$, т.е. M – направленная подгруппа.

Заметим, что для элемента $x \in M^+$ по лемме 7 верны неравенства $x \leq a, b$. Применяя теорему 7, можно заключить, что справедливо включение $M^+ \subseteq H(a, b)$. Так как направленная подгруппа порождается положительным конусом, то $M \subseteq H(a, b)$. Верность обратного включения очевидна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9. В силу теоремы 5 подгруппы $[a]$ и $[b]$ удовлетворяют условиям теоремы 3. Применение теоремы 8 завершает доказательство.

В работе Якубиковой [11] показано, что пересечение бесконечного множества направленных подгрупп даже в группе Рисса–Фукса не обязано быть направленной подгруппой, но в любой интерполяционной группе справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 9. Пусть G – интерполяционная группа, $\{M_i\}_{i \in I}$ – множество выпуклых направленных подгрупп группы G , K – теоретико-множественное объединение подгрупп M_i . Если M – подгруппа, порожденная множеством K в группе G , то M – выпуклая направленная подгруппа этой группы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть элемент $m \in M$, тогда элемент $m = m_{\alpha_1} m_{\alpha_2} \cdots m_{\alpha_n}$ для некоторых элементов $m_{\alpha_i} \in M_{\alpha_i}$, где $i = 1, 2, \dots, n$.

Так как каждая подгруппа M_{α_i} является направленной группой, то каждый элемент $m_{\alpha_i} = x_{\alpha_i} y_{\alpha_i}^{-1}$ для подходящих элементов $x_{\alpha_i}, y_{\alpha_i} \in M_{\alpha_i}^+$ для всех индексов $i = 1, 2, \dots, n$.

Обозначим $x = x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \cdots x_{\alpha_n}$, тогда справедливо неравенство $m \leq x$ для элемента $x \in M^+$, откуда заключаем, что подгруппа M является направленной группой.

Допустим далее, что для элементов $a, b \in M$ и элемента $h \in G$ имеют место неравенства $a \leq h \leq b$, откуда следует справедливость неравенств $e \leq g \leq m$ для элементов $g = ha^{-1}$ и $m = ba^{-1}$.

Элемент $m = m_{\alpha_1} m_{\alpha_2} \cdots m_{\alpha_n}$ для некоторых элементов $m_{\alpha_i} \in M_{\alpha_i}$, где $i = 1, 2, \dots, n$. Так как каждая подгруппа M_{α_i} является направленной группой, то, не теряя общности, можно считать сомножители в записи элемента m положительными элементами.

В силу следствия 2 существуют такие элементы $g_{\alpha_i} \in G$, для которых верны неравенства $e \leq g_{\alpha_i} \leq m_{\alpha_i}$ и при этом верно равенство $g = g_{\alpha_1} g_{\alpha_2} \cdots g_{\alpha_n}$.

Так как по условию леммы каждая подгруппа M_{α_i} является выпуклой подгруппой группы G для любого $\alpha \in I$, то элемент $g_{\alpha_i} \in M_{\alpha_i}$ для любого $\alpha \in I$. Таким образом, элемент $g \in M$, поэтому, и элемент $h \in M$. Следовательно, подгруппа M является выпуклой в группе G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 10. По лемме 9 подгруппа H является выпуклой направленной подгруппой группы G , поэтому по следствию 1 она является группой Рисса–Фукса.

Пусть элементы a и b почти ортогональны в группе G и элемент $x \in G$, тогда по лемме 1 [6] элементы $x^{-1}ax$ и $x^{-1}bx$ также почти ортогональны в группе G . Докажем, что подгруппа $x^{-1}H(a, b)x$ совпадает с подгруппой $H(x^{-1}ax, x^{-1}bx)$.

Пусть элемент $u \in x^{-1}H(a, b)x$, тогда $u = x^{-1}vx$ для некоторого элемента $v \in H(a, b)$. В силу теоремы 8 элемент $v \in [a] \cap [b]$, но по лемме 2 [6] в этом случае элемент $u \in [x^{-1}ax] \cap [x^{-1}bx]$. Откуда по теореме 8 следует справедливость включения

$$x^{-1}H(a, b)x \subseteq H(x^{-1}ax, x^{-1}bx).$$

Пусть, далее, элемент

$$u \in H(x^{-1}ax, x^{-1}bx).$$

Тогда по теореме 8 элемент $u \in [x^{-1}ax] \cap [x^{-1}bx]$, т.е. по лемме 2 [6] элемент

$$u \in x^{-1}[a]x \cap x^{-1}[b]x.$$

Значит, элемент $w = xux^{-1} \in [a] \cap [b]$, т.е. в силу теоремы 8 элемент $w \in H(a, b)$, но тогда элемент $u \in x^{-1}H(a, b)x$. Таким образом, имеет место включение

$$H(x^{-1}ax, x^{-1}bx) \subseteq x^{-1}H(a, b)x.$$

Следовательно, вместе с каждой подгруппой $H(a_i, b_i)$ подгруппа H содержит все подгруппы, сопряженные с подгруппой $H(a_i, b_i)$, т.е. H – нормальная подгруппа в группе G .

Теорема доказана полностью.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. Фукс, *Частично упорядоченные алгебраические системы*, Мир, М., 1965.
- [2] В. М. Копытов, *Решеточно упорядоченные группы*, Современная алгебра, Наука, М., 1984.

- [3] Е. Е. Ширшова, “Гомоморфизмы, сохраняющие p -ортогональность”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **6**:3 (2000), 939–952.
- [4] L. Fuchs, “Riesz groups”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (3), **19** (1965), 1–34.
- [5] Е. Е. Ширшова, “Свойства гомоморфизмов групп Рисса”, *УМН*, **46**:5(281) (1991), 157–158.
- [6] Е. Е. Ширшова, “Об обобщении понятия ортогональности и группах Рисса”, *Матем. заметки*, **69**:1 (2001), 122–132.
- [7] Е. Е. Ширшова, “О гомоморфизмах pl -групп”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **3**:1 (1997), 303–314.
- [8] P. Conrad, “Representation of partially ordered Abelian groups as groups of real valued functions”, *Acta Math.*, **116** (1966), 199–221.
- [9] A. M. W. Glass, “Polars and their application in directed interpolation groups”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **166** (1972), 1–25.
- [10] С. Ленг, *Алгебра*, Мир, М., 1968.
- [11] M. Jakubíková, “Konvexe gerichtete Untergruppen der Rieszschen Gruppen”, *Mat. Časopis Sloven. Akad. Vied*, **21**:1 (1971), 3–8.

Е. Е. Ширшова

Московский педагогический государственный
университет

E-mail: e.shir@relcom.ru

Поступило

21.04.2011