Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Басов, О разрешимости уравнений нелинейной
идеально-вязкой сжимаемой жидкости, *Матем. заметки*,
2000, том 68, выпуск 1, 13–23

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm915>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 18:35:42

УДК 517.953

О РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ИДЕАЛЬНО-ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

И. В. Басов

Рассматривается модель одномерных движений вязкой сжимаемой жидкости. Описывается некоторый класс нелинейных законов напряженного состояния, для которых соответствующая начально-краевая задача разрешима в целом по времени в классе обобщенных решений, удовлетворяющих энергетическому тождеству. В частности, исследуются среды, проявляющие вязкие свойства лишь при больших скоростях деформаций.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. Рассмотрим систему уравнений, описывающую одномерные вертикальные движения горизонтальных слоев жидкости с нелинейным законом зависимости тензора напряжений от тензора скоростей деформаций. Будем считать, что движение происходит вдоль пространственной координаты x , лежащей на отрезке $\Omega = [l, r]$, со скоростью $u(x, t)$. В случае баротропного движения с давлением p , пропорциональным плотности $\rho(x, t)$ ($p = R\rho$, где $R > 0$ константа), и отсутствия внешних сил уравнения движения имеют вид [1]

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad (1)$$

$$\rho(u_t + uu_x) = \sigma_x - R\rho_x, \quad (2)$$

где $(x, t) \in Q_T = \Omega \times (0, T)$. Здесь $\sigma = f(u_x)$ – неравновесная часть напряжений, отвечающая за вязкость (диссипацию энергии). К этим уравнениям добавляются начальные

$$\rho = \rho_0, \quad u = u_0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (3)$$

и краевые условия

$$u = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma = \partial\Omega = \{l, r\}. \quad (4)$$

Достаточно хорошо исследован случай, когда зависимость σ от u_x (далее, для краткости будем писать s вместо u_x) линейная, в том числе когда σ имеет вид $\sigma = h(\rho)u_x$ (см. [2]–[4]). В частности, в [5] доказана разрешимость многомерных задач. Среди работ по системам с нелинейным законом напряженного состояния следует отметить [6], [7].

Исследования проведены при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01524.

Цель данной работы – описание некоторого класса законов напряженного состояния, в том числе с участками постоянства, для которых задача (1)–(4) имеет слабые обобщенные решения в целом по времени. Допускается, например, следующая зависимость:

$$f(s) = \begin{cases} \nu(s + s_0), & s \leq -s_0, \\ 0, & |s| \leq s_0 \\ \nu(s - s_0), & s_0 \leq s. \end{cases}$$

Жидкости с такими законами напряженного состояния при малых скоростях деформаций являются идеальными, а при возрастании $|u_x|$ в них проявляются вязкие свойства. Иначе говоря, данная модель соответствует сплошным средам со смешанными газо-жидкостными свойствами [8].

Кроме того, в работе строятся решения для задач с разрывными законами напряженного состояния.

2. Постановка задачи и основной результат. Для точной формулировки условий на функцию $f(s)$ удобно ввести ее первообразную

$$F(s) = \int_0^s f(s) ds.$$

Предполагая $f(s)$ неубывающей функцией от s , заметим, что $F(s)$ является (нестрого) выпуклой и непрерывной. Обозначим через $\partial F(s)$ субдифференциал $F(s)$, определяемый равенством

$$\partial F(s) = \{a \in \mathbb{R} \mid a(t - s) \leq F(t) - F(s) \forall t \in \mathbb{R}\};$$

∂F можно назвать многозначным отображением, так как для любого $s \in \mathbb{R}$ значение $\partial F(s)$ является, вообще говоря, подмножеством $\mathbb{R}$, т. е. $\partial F(s): \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$. При этом для любого $s \in \mathbb{R}$ значение функции $f(s)$ является элементом множества $\partial F(s)$, и закон напряженного состояния записывается в виде

$$\sigma \in \partial F(s). \quad (5)$$

В настоящей работе исследуется случай, когда функция $F(s)$ удовлетворяет следующим условиям.

1. $F(s)$ выпуклая функция от s . В частности, $\partial F(s)$ является неубывающим по s , т. е. $\forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \forall \sigma_i \in \partial F(s_i)$ выполнено неравенство

$$(\sigma_1 - \sigma_2)(s_1 - s_2) \geq 0.$$

2. Для всех $s \in \mathbb{R}$ и всех $\sigma \in \partial F(s)$ справедливо неравенство $\sigma s \geq 0$. (Оно следует из условия неубывания энтропии.)
3. Существуют такие константы $K > 0, L > 0$, что $\forall s \in \mathbb{R}, \forall \sigma \in \partial F(s)$ имеют место неравенства $Ks - L \leq \sigma \leq Ks + L$.
4. Для произвольного малого $\delta > 0$ существует дважды дифференцируемая монотонная функция $F^\delta(s)$, удовлетворяющая свойствам 1–3 с теми же константами L и K , такая, что $|F(s) - F^\delta(s)| \leq M\delta$, где M не зависит от δ , и

$$(F^\delta(s))'' \geq \delta. \quad (6)$$

Из свойств функции $F^\delta(s)$ следует, что $\partial F^\delta(s)$ является однозначным отображением, и, обозначая $f^\delta(s) = \partial F^\delta(s)$, можно записать условия 1–3 в терминах функции $f^\delta(s)$.

Для функций $f(s)$, графики которых имеют конечное число изломов, разрывов и участков, где $f'(s) \leq \delta$ для всех малых δ , условия 1–4 выполняются.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пара функций (u, ρ) называется *обобщенным решением* начально-краевой задачи (1)–(5), если $\rho > 0$, справедливы включения

$$u \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; W_2^1(\Omega)), \quad \rho, \frac{1}{\rho} \in L_\infty(Q_T),$$

включение (5) выполнено почти всюду в Q_T и для почти всех $t \in (0, T)$ и для всех функций $\varphi, \psi \in C^\infty(Q_T)$, равных нулю на Γ , справедливы интегральные тождества

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_\Omega \rho(\varphi_t + u\varphi_x) dx ds &= \int_\Omega \rho\varphi dx - \int_\Omega \rho_0\varphi(x, 0) dx, \\ \int_0^t \int_\Omega (\rho u\psi_t + \rho u u\psi_x + f(u_x)\psi_x - R\rho\psi_x) dx ds &= \int_\Omega \rho u\psi dx - \int_\Omega \rho_0 u_0\psi(x, 0) dx. \end{aligned}$$

При этом $u = 0$ на Γ (как непрерывная функция по x) для почти всех $t \in (0, T)$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Если функция $f(s)$ удовлетворяет условиям 1–4, $u_0 \in L_2(\Omega)$, $\rho_0, 1/\rho_0 \in L_\infty(\Omega)$ и $\rho_0 > 0$, то существует обобщенное решение задачи (1)–(5) в смысле указанного выше определения.

Если $u_0 \in L_q(\Omega)$ с $2 < q < \infty$, то $u \in L_\infty(0, T; L_q(\Omega))$.

3. Построение приближенных решений. В этом пункте мы докажем локальное по времени существование сильных обобщенных решений задачи, состоящей из системы уравнений

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \tag{7}$$

$$\rho(u_t + uu_x) = f^\delta(u_x)_x - R\rho_x \tag{8}$$

и начально-краевых условий

$$\rho = \rho_0^\delta, \quad u = u_0^\delta \quad \text{при } t = 0, \tag{9}$$

$$u = 0 \quad \text{при } x \in \Gamma, \tag{10}$$

где $\rho_0^\delta \in W_2^1(\Omega)$, $\rho > 0$ и $u_0^\delta \in W_2^1(\Omega)$ таковы, что $\|\rho_0 - \rho_0^\delta\|_{L_2(\Omega)} + \|u_0 - u_0^\delta\|_{L_2(\Omega)} \leq \delta$, а $f^\delta(s)$ функция из условия 4 п. 2.

Прежде всего заметим, что для любого целого $N > 0$ найдется интервал времени $(0, t_N)$, на котором существует решение задачи

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \tag{11}$$

$$\int_\Omega (\rho(u_t + uu_x) - f^\delta(u_x)_x - R\rho_x)\omega_j(x) dx = 0, \quad j = 1, \dots, N, \tag{12}$$

$$\rho = \rho_0^\delta(x) \quad \text{при } t = 0, \tag{13}$$

$$u = \sum_{j=1}^N u_j(t)\omega_j(x), \quad u(x, 0) = u_0^\delta(x), \tag{14}$$

где

$$\omega_j(x) = \sin\left(\frac{x-l}{r-l}\pi j\right), \quad u_0^{\delta N}(x) = \sum_{j=1}^N \frac{2\omega_j(x)}{r-l} \int_{\Omega} u_0^{\delta}(\xi) \omega_j(\xi) d\xi.$$

В изоморфном $C(0, t_N)^N$ пространстве

$$X = \left\{ u = \sum_{j=1}^N u_j(t) \omega_j(x) \mid u_j(t) \in C(0, t_N) \right\}$$

с нормой, определенной равенством $\|u\|_X^2 = \sup_{(0, t_N)} \sum_{j=1}^N |u_j(t)|^2$, рассмотрим множество

$$B = \{u \in X \mid \|u\|_X \leq b, u(x, 0) = u_0^{\delta N}(x)\}, \quad \text{где } b^2 = 1 + \frac{\sup_{\Omega} \rho_0^{\delta}(x)}{\inf_{\Omega} \rho_0^{\delta}(x)} \|u_0^{\delta N}\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Для функции $u(x, t) \in B$ и $\rho_0^{\delta}(x) \in W_2^1(\Omega)$ можно построить, например, методом характеристик или методом Галёркина, функцию $\rho(x, t)$, удовлетворяющую уравнениям (11), (13). Для ρ справедливы включения $\rho, \rho_x, \rho_t \in L_{\infty}(0, t_N; L_2(\Omega))$. Кроме того, поскольку для $u \in X$ выполняется неравенство $\|u_{xx}\|_X \leq N^2 \|u\|_X$, то для ρ имеется оценка

$$e^{-N^2 b t} \inf_{\Omega} \rho_0^{\delta}(x) \leq \rho(x, t) \leq e^{N^2 b t} \sup_{\Omega} \rho_0^{\delta}(x).$$

Затем для функций $u(x, t)$ и $\rho(x, t)$ существует функция $U \in X$ вида

$$U = \sum_{j=1}^N U_j(t) \omega_j(x),$$

удовлетворяющая равенствам

$$U(x, 0) = u(x, 0), \quad \int_{\Omega} (\rho(U_t + uU_x) - f^{\delta}(U_x)_x - R\rho_x) \omega_j dx = 0, \quad j = 1, \dots, N.$$

Действительно, $U_j(t)$ определяются из решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Неравенство

$$\det \int_{\Omega} \rho \omega_i \omega_j dx \neq 0,$$

выполненное в силу положительности ρ , позволяет разрешить эту систему относительно производных, что вместе с непрерывностью $f^{\delta}(s)$ обосновывает существование функции U . Таким образом, определен оператор $A: B \rightarrow X$ такой, что $A(u) = U$.

Оценивая с помощью неравенства Юнга правую часть равенства

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} F^{\delta}(u_x) dx + \int_{\Omega} \rho U_t^2 dx = \int_{\Omega} (-R\rho_x U_t + \rho u U_x U_t) dx,$$

заключаем, что $U_j \in W_2^1(0, t_N)$ и, следовательно, A компактен в X . Прямой проверкой доказывается непрерывность $A: B \rightarrow X$ (см. [2], [7], [9]).

Равенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho U^2 dx + \int_{\Omega} f^{\delta}(U_x) U_x dx = - \int_{\Omega} R\rho_x U dx$$

и неравенства для ρ и при достаточно малых t_N , дают оценку $\|U\|_X \leq b$, равносильную условию $A(B) \subset B$. Таким образом, оператор A и множество $B \subset X$ удовлетворяют условиям теоремы Шаудера. Несложно заметить, что u – неподвижная точка A – вместе с соответствующей функцией ρ являются решением задачи (11)–(14).

ЛЕММА 1. Для решений (u, ρ) задач (11)–(14) при фиксированном $\delta > 0$ существуют не зависящие от N положительные константы τ и c такие, что

$$\begin{aligned} & \|u\|_{L_\infty(0, \tau; W_2^1(\Omega))} + \|u\|_{L_2(0, \tau; W_2^2(\Omega))} + \|\rho\|_{L_\infty(0, \tau; W_2^1(\Omega))} \\ & + \|\rho_t\|_{L_\infty(0, \tau; L_2(\Omega))} + \|u_t\|_{L_2(Q_\tau)} + \left\| \frac{1}{\rho} \right\|_{L_\infty(Q_\tau)} \leq c, \end{aligned}$$

где $Q_\tau = \Omega \times (0, \tau)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем функции

$$z(t) = \int_\Omega \left(F^\delta(u_x) + \frac{\rho u_x^2}{2} \right) dx, \quad y(t) = \int_0^t \int_\Omega (\rho u_t^2 + f^\delta(u_x)_x u_{xx}) dx ds.$$

Уравнение (11) влечет выполнение неравенств

$$\begin{aligned} \inf_\Omega \rho_0^\delta(x) \exp \left(- \int_0^t \left(\int_\Omega u_{xx}^2 dx \right)^{1/2} ds \right) & \leq \rho(x, t) \\ & \leq \sup_\Omega \rho_0^\delta(x) \exp \left(\int_0^t \left(\int_\Omega u_{xx}^2 dx \right)^{1/2} ds \right), \end{aligned}$$

из которых с учетом неравенства (6) вытекает, что

$$c^{-1} \exp\{-cy(t)\} \leq \rho(x, t) \leq c \exp\{cy(t)\}. \quad (15)$$

Кроме того, замечая, что из (11) следует уравнение $\rho D_t(v_x) = u_{xx}$, где $v = 1/\rho$, выведем соотношение

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \frac{\rho v_x^2}{2} dx = \int_\Omega v_x u_{xx} dx.$$

Проинтегрируем его по времени и оценим с помощью неравенства Юнга

$$\int_\Omega \rho v_x^2 dx \leq c \left(1 + \int_0^t \int_\Omega \frac{u_{xx}^2}{\rho} dx ds + \int_0^t \int_\Omega \rho v_x^2 dx ds \right).$$

Тогда, используя лемму Гронуолла и (6), получаем неравенство

$$\int_\Omega \rho v_x^2 dx \leq c(y+1)e^{c\sqrt{y}} \leq ce^{cy}. \quad (16)$$

Умножая (12) на $u_t - u_{xx}$ и учитывая (11) и (13), приходим к соотношению

$$z'(t) + y'(t) = \int_\Omega (-R\rho_x u_t + R\rho_x u_{xx} + 2\rho u u_x u_{xx} - \rho u u_x u_t - \rho_x u_t u_x) dx.$$

Заметим, что $y'(t) \geq 0$. Тогда, оценивая слагаемые в правой части этого равенства по неравенствам Гёльдера и Юнга с использованием оценок (15) и (16), выводим неравенство

$$z' + y' \leq \varepsilon y' + ce^{c(z+y)}.$$

Из него, подбирая $\tau > 0$ достаточно малым, получим оценку

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau} (z(t) + y(t)) \leq c,$$

которая вместе с (15) и (16) завершает доказательство леммы.

Устремим $N \rightarrow \infty$ в уравнениях (11)–(14). Полученные в лемме 1 оценки позволяют выделить *-слабо сходящиеся подпоследовательности $\rho^N \rightharpoonup \rho$ в $L_\infty(0, \tau; W_2^1(\Omega))$, $u^N \rightharpoonup u$ в $L_\infty(0, \tau; W_2^1(\Omega)) \cap L_2(0, \tau; W_2^2(\Omega))$. Покажем, что пара (ρ, u) является решением (7)–(10) на $(0, \tau)$.

Из равномерных оценок ρ^N в $L_\infty(0, \tau; W_2^1(\Omega))$ и ρ_t^N в $L_\infty(0, T; L_2(\Omega))$ по теореме Арцела–Асколи [10] получаем сходимость подпоследовательности

$$\rho^N \rightarrow \rho \quad \text{сильно в } C([0, \tau], L_2(\Omega)). \quad (17)$$

Аналогично, равномерная ограниченность u^N в $L_\infty(0, \tau; W_2^1(\Omega))$ и u_t^N в $L_2(Q_\tau)$ дает возможность выделить сильно сходящуюся подпоследовательность

$$u^N \rightarrow u \quad \text{сильно в } C([0, \tau], L_2(\Omega)). \quad (18)$$

Из ограниченности u_t^N в $L_2(Q_\tau)$ следуют равномерные оценки на u_t^N в пространстве $L_2(0, \tau; W_2^{-1}(\Omega))$, что вместе с оценками u_x^N в $L_2(0, \tau; W_2^1(\Omega))$ приводит [10] к сходимости подпоследовательности

$$u_x^N \rightarrow u_x \quad \text{сильно в } L_2(Q_\tau). \quad (19)$$

Таким образом, из (17) и (18) выводим, что уравнение неразрывности (7) и начальные условия (9) выполнены для предельных функций ρ и u . Переходя к пределу в (13) и учитывая, что из (18) и (19) следует сходимость $u^N \rightarrow u$ сильно в $L_2(0, \tau; W_2^1(\Omega))$, доказываем (10).

Слабая сходимость подпоследовательности $u_t^N \rightharpoonup u_t$ в $L_2(Q_\tau)$ и (17) на основе метода компенсированной компактности [11] дают *-слабую сходимость $\rho^N u_t^N \rightharpoonup \rho u$ в $L_2(0, \tau; L_1(\Omega))$. Вместе с этим из ограниченности $\rho^N u_t^N$ в $L_2(Q_\tau)$ следует слабая сходимость $\rho^N u_t^N \rightharpoonup \rho u$ в $L_2(Q_\tau)$.

Из (17) и (19) выводим, что $\rho^N u_x^N \rightarrow \rho u_x$ сильно в $L_2(0, \tau; L_1(\Omega))$. Соответствующие оценки приводят к *-слабой сходимости $\rho^N u_x^N \rightharpoonup \rho u_x$ в пространстве $L_\infty(0, \tau; L_2(\Omega))$. Отсюда и из (18) получаем *-слабую сходимость $\rho^N u_x^N u^N \rightharpoonup \rho u_x u$ в $L_\infty(0, \tau; L_1(\Omega))$.

Учитывая (19) и свойства функции $f^\delta(s)$, имеем *-слабую сходимость $f^\delta(u_x^N) \rightharpoonup f(u_x)$ в $L_\infty(0, \tau; L_2(\Omega))$.

Таким образом, функции (ρ, u) удовлетворяют (12) при любом $1 \leq j < \infty$. Поскольку множество линейных комбинаций функций $\{\omega_j(x)\}_{1 \leq j < \infty}$ всюду плотно в $L_2(\Omega)$, то уравнение (8) выполнено почти всюду в Q_τ .

Итак, система (7)–(10) локально по времени разрешима в следующих классах. Если (u, ρ) ее решение, то уравнения (7)–(8) выполнены почти всюду в Q_τ , (9) – почти всюду в Ω , а (10) – почти всюду в $\Gamma \times (0, \tau)$. Кроме того, $\rho > 0$ и справедливы следующие включения: $u \in L_\infty(0, \tau; W_2^1(\Omega)) \cap L_2(0, \tau; W_2^2(\Omega))$; $\rho \in L_\infty(0, \tau; W_2^1(\Omega))$; $\rho_t \in L_\infty(0, \tau; L_2(\Omega))$; $f(u_x)_x, u_t \in L_2(Q_\tau)$.

4. Глобальные априорные оценки. В этом пункте строятся априорные оценки для решений (ρ, u) задач (7)–(10). Отметим, прежде всего, неотрицательность плотности ρ в силу того, что она, как показано в п. 3, является пределом неотрицательных функций. Этот факт будет использоваться в доказательстве лемм 2 и 4.

ЛЕММА 2 (энергетическая оценка). *Существует такая константа $c > 0$, что*

$$\|\rho u^2 + g(\rho)\|_{L_\infty(0,T;L_1(\Omega))} + \|\sigma u_x\|_{L_1(Q_T)} \leq c,$$

где $g(\rho) = \rho \ln \rho - \rho + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим уравнение импульсов (8) на u и используем уравнение неразрывности (7). После интегрирования по Ω с учетом значений u на Γ , получим равенство

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{\rho u^2}{2} dx + \int_{\Omega} \sigma u_x dx + R \int_{\Omega} \rho_x u dx = 0.$$

Замечая, что $g''(\rho)\rho = 1$, приходим к цепочке тождеств

$$\int_{\Omega} \rho_x u dx = \int_{\Omega} \rho g''(\rho) \rho_x u dx = - \int_{\Omega} (\rho u)_x g'(\rho) dx = \int_{\Omega} \rho_t g'(\rho) dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} g(\rho) dx.$$

Подставляя его в предыдущее равенство и интегрируя по времени, выводим необходимую оценку.

Легко видеть, что условие 3 на рост $\partial F(s)$ приводит к оценкам для u_x и σ в $L_2(Q_T)$.

ЛЕММА 3. *Функция β , заданная соотношением*

$$\beta(x, t) = \int_0^t (\sigma(x, \tau) - R\rho(x, \tau) - \rho(x, \tau)(u(x, \tau))^2) d\tau + \int_l^x \rho_0(\xi) u_0(\xi) d\xi,$$

принадлежит $L_\infty(Q_T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из теоремы вложения, поскольку функции $\beta_x = \rho u$ и β по лемме 2 принадлежат пространству $L_\infty(0, T; L_1(\Omega))$.

ЛЕММА 4 (оценка для плотности сверху). *Существует такая константа $c > 0$, что $\rho \leq c$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $D_t = \partial_t + u \partial_x$ производную вдоль траектории. Вычислим и оценим $D_t(\rho^K e^\beta)$ с функцией β из предыдущей леммы и константой K из левого неравенства в условии 3

$$D_t(\rho^K e^\beta) = \rho^K e^\beta (-K\rho u_x + \sigma - R\rho) \leq L\rho^K e^\beta.$$

Здесь использовалось неравенство из условия 3 и неотрицательность плотности. Тогда по лемме Гроуолла получаем оценку $\rho^K e^\beta \leq c$. И, наконец, применяя результат леммы 3, приходим к неравенству $\rho \leq c$.

ЛЕММА 5 (оценка для плотности снизу). *Существует такая константа $c > 0$, что $\rho \geq c$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично предыдущей лемме, найдем $D_t(\rho^{-K}e^{-\beta})$ и оценим его с помощью правого неравенства из условия 3 и утверждения леммы 4

$$D_t(\rho^{-K}e^{-\beta}) = \rho^{-K}e^{-\beta}(K\rho u_x - \sigma + R\rho) \leq (L + c)\rho^{-K}e^{-\beta}.$$

Далее, используя неравенство Гронуолла, и с учетом ограниченности β получаем требуемое.

Из лемм 2 и 5 несложно вывести важное следствие: $u \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega))$.

Следующая лемма является дополнительной априорной оценкой при соответствующих предположениях на начальную скорость.

ЛЕММА 6 (дополнительная оценка скорости). *Существует константа $c > 0$ такая, что справедливо неравенство*

$$\|u\|_{L_\infty(0, T; L_q(\Omega))} + \|\sigma u_x |u|^{q-2}\|_{L_1(Q_T)} \leq c.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соответствующий результат при $q = 2$ доказан в лемме 2. Далее применим индукцию по q . Предположим, что для $q - 1$ соответствующее утверждение справедливо. Аналогично доказательству леммы 2 умножим уравнение (8) на $|u|^{q-1} \operatorname{sign}(u)$ и используем уравнение неразрывности (7). После интегрирования по Ω с учетом значений u на Γ получим неравенство

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \frac{\rho |u|^q}{q} dx + (q - 1) \int_\Omega \sigma u_x |u|^{q-2} dx \leq (q - 1) \int_\Omega R \rho u_x |u|^{q-2} dx.$$

Здесь правую часть можно оценить с применением неравенства Коши и с учетом результата леммы 5 (оценки на плотность снизу)

$$\int_\Omega R \rho u_x |u|^{q-2} dx \leq c(\|u_x^2 |u|^{q-3}\|_{L_1(\Omega)} + \|u\|_{L_{q-1}^{q-1}(\Omega)}^{q-1}).$$

Так как по предположению индукции $\|u\|_{L_{q-1}(\Omega)} \in L_\infty(0, T)$ и $\|u_x^2 |u|^{q-3}\|_{L_1(\Omega)} \in L_1(0, T)$, использование леммы Гронуолла завершает доказательство.

5. Сходимость приближенных решений. Для решений (ρ^δ, u^δ) системы (7)–(10) следует, в частности, выполнение следующих интегральных тождеств:

$$\int_0^t \int_\Omega \rho^\delta (\varphi_t + u^\delta \varphi_x) dx ds = \int_\Omega \rho^\delta \varphi dx - \int_\Omega \rho_0^\delta \varphi(x, 0) dx, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_\Omega (\rho^\delta u^\delta \psi_t + \rho^\delta u^\delta u^\delta \psi_x + f^\delta(u_x^\delta) \psi_x - R \rho^\delta \psi_x) dx ds \\ = \int_\Omega \rho^\delta u^\delta \psi dx - \int_\Omega \rho_0^\delta u_0^\delta \psi(x, 0) dx \end{aligned} \quad (21)$$

для почти всех $t \in (0, T)$ и для всех $\varphi, \psi \in C^\infty(Q_T)$, равных нулю на Γ .

Из лемм 2–5 следует, что ρ^δ и $1/\rho^\delta$ равномерно ограничены в $L_\infty(Q_T)$ и u^δ – в $L_\infty(0, T; L_2(\Omega))$ и $L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$. Это позволяет, устремляя $\delta \rightarrow 0$, выделить *-слабо сходящиеся подпоследовательности $\rho^\delta \rightharpoonup \rho$ в $L_\infty(Q_T)$ (причем $\rho \geq c > 0$), а $u^\delta \rightharpoonup u$

в $L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$. Последнее утверждение влечет непрерывность u для почти всех $t \in (0, T)$ как функции от x и равенство $u = 0$ на Γ для почти всех $t \in (0, T)$.

Сходимость $\rho^\delta \rightharpoonup \rho$ *-слабо в $L_\infty(Q_T)$ и ограниченность $\rho_t^\delta = -(\rho^\delta u^\delta)_x$ в пространстве $L_\infty(0, T; W_2^{-1}(\Omega))$ позволяют по теореме Арцела–Асколи выделить сильно сходящуюся в $C([0, T]; W_2^{-1}(\Omega))$ подпоследовательность $\rho^\delta \rightarrow \rho$. В частности, равномерно по $t \in (0, T)$ для любой $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место сходимость

$$\int_\Omega \rho^\delta(t) \varphi \, dx \rightarrow \int_\Omega \rho(t) \varphi \, dx.$$

Используя ограниченность ρ^δ в $L_\infty(\Omega)$ для почти всех $t \in (0, T)$, получаем сходимость $\rho^\delta(t) \rightarrow \rho(t)$ *-слабо в $L_\infty(\Omega)$ для почти всех $t \in (0, T)$.

Как было отмечено, подпоследовательность $\rho^\delta \rightarrow \rho$ сильно в пространстве $C([0, T]; W_2^{-1}(\Omega))$, а $u^\delta \rightharpoonup u$ слабо в $L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$. Применение метода компенсированной компактности приводит к *-слабой сходимости подпоследовательности $\rho^\delta u^\delta \rightharpoonup \rho u$ в $L_2(0, T; L_1(\Omega))$. Тогда из равномерной ограниченности $\rho^\delta u^\delta$ в пространстве $L_\infty(0, \tau; L_2(\Omega))$ следует, что $\rho^\delta u^\delta \rightharpoonup \rho u$ *-слабо в $L_\infty(0, T; L_2(\Omega))$.

Из *-слабой сходимости $\rho^\delta u^\delta \rightharpoonup \rho u$ в $L_\infty(0, T; L_2(\Omega))$ и равномерной ограниченности $(\rho^\delta u^\delta)_t = (f^\delta(u_x^\delta) - R\rho^\delta - (\rho^\delta u^\delta u^\delta))_x$ в $L_2(0, T; W_2^{-1}(\Omega))$ по теореме Арцела–Асколи получаем сильную сходимость подпоследовательности $\rho^\delta u^\delta \rightarrow \rho u$ в $C([0, T]; W_2^{-1}(\Omega))$. Тогда, аналогично доказанному для $\rho^\delta(t)$, заключаем, что для почти всех $t \in (0, T)$ подпоследовательность $\rho^\delta(t) u^\delta(t) \rightharpoonup \rho(t) u(t)$ слабо в $L_2(\Omega)$.

Далее, сильная сходимость $\rho^\delta u^\delta \rightarrow \rho u$ в $C([0, T]; W_2^{-1}(\Omega))$ и слабая $u^\delta \rightharpoonup u$ в $L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$ на основе компенсированной компактности дает слабую сходимость подпоследовательности $\rho^\delta u^\delta u^\delta \rightharpoonup \rho u u$ в $L_2(0, T; L_1(\Omega))$. Более того, соответствующие равномерные оценки приводят к слабой сходимости $\rho^\delta u^\delta u^\delta \rightharpoonup \rho u u$ в $L_\infty(0, T; L_1(\Omega)) \cap L_2(Q_T)$.

Подпоследовательность $f^\delta(u_x^\delta)$ *-слабо сходится в $L_2(Q_T)$ к некоторой функции σ . Поскольку последовательности $\rho_0^\delta \rightarrow \rho_0$ и $u_0^\delta \rightarrow u_0$ сильно в $L_2(\Omega)$, переходя к пределу в (20) и (21), получаем следующие интегральные тождества:

$$\int_0^t \int_\Omega (\rho \varphi_t + \rho u \varphi_x) \, dx \, ds = \int_\Omega \rho \varphi \, dx - \int_\Omega \rho_0 \varphi(x, 0) \, dx, \quad (22)$$

$$\int_0^t \int_\Omega (\rho u \psi_t + \rho u u \psi_x + \sigma \psi_x - R \rho \psi_x) \, dx \, ds = \int_\Omega \rho u \psi \, dx - \int_\Omega \rho_0 u_0 \psi(x, 0) \, dx. \quad (23)$$

Осталось показать справедливость включения (5). Оно равносильно неравенству

$$\sigma(w - u_x) \leq F(w) - F(u_x) \quad (24)$$

для всех $w \in \mathbb{R}$ почти всюду в Q_T .

Очевидно, что для приближенных решений выполнено неравенство

$$f^\delta(u_x^\delta)(w - u_x^\delta) \leq F^\delta(w) - F^\delta(u_x^\delta),$$

умножая которое на бесконечно дифференцируемую неотрицательную функцию ξ и проинтегрировав по Q_T , получим

$$\int_0^T \int_{\Omega} \xi f^{\delta}(u_x^{\delta})(w - u_x^{\delta}) dx dt \leq \int_0^T \int_{\Omega} \xi (F^{\delta}(w) - F^{\delta}(u_x^{\delta})) dx dt.$$

Заметим, что из оценок для ρ в $W_{\infty}^1(0, T; W_2^{-1}(\Omega)) \cap L_{\infty}(Q_T)$, ρu в $L_{\infty}(0, T; L_2(\Omega))$ и для почти всех $t \in (0, T)$ ρ в $L_{\infty}(\Omega)$ вытекает справедливость тождества (22) для φ из $L_1(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap L_{\infty}(0, T; L_1(\Omega))$ с условием $\varphi = 0$ на Γ . В частности, можно взять в качестве φ функцию $u^2/2$.

Включение $u \in L_{\infty}(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$ дает оценку на u в пространстве $L_4(Q_T)$, которая приводит к ограниченности ρu в $L_2(Q_T)$. Тогда из включений $\rho u \in W_2^1(0, T; W_2^{-1}(\Omega))$, $\rho u \in L_2(Q_T)$, $\rho \in L_{\infty}(Q_T)$, $\sigma \in L_2(Q_T)$ и для почти всех $t \in (0, T)$, $\rho u \in L_2(\Omega)$ следует, что (23) выполнено и для всех $\psi \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap L_{\infty}(0, T; L_2(\Omega))$ таких, что $\psi = 0$ на Γ . Это позволяет взять $\psi = u$.

Подставляя в (22) $\varphi = u^2/2$ и в (23) $\psi = u$ и вычитая первое из второго, получаем соотношение

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\sigma u_x - R \rho u_x) dx ds = \int_{\Omega} \frac{\rho u^2}{2} dx - \int_{\Omega} \frac{\rho_0 u_0^2}{2} dx.$$

Производя аналогичные операции с (20) и (21) и переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$, приходим к равенству

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} f^{\delta}(u_x^{\delta}) u_x^{\delta} dx d\tau - \int_0^T \int_{\Omega} R \rho u_x dx ds = \int_{\Omega} \frac{\rho u^2}{2} dx - \int_{\Omega} \frac{\rho_0 u_0^2}{2} dx.$$

Сравнивая его с предыдущим, выводим соотношение

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} f^{\delta}(u_x^{\delta}) u_x^{\delta} dx d\tau = \int_0^T \int_{\Omega} \sigma u_x dx d\tau. \quad (25)$$

Наконец, из свойств функций $F^{\delta}(s)$ следует, что

$$\int_0^T \int_{\Omega} \xi |F^{\delta}(u_x^{\delta}) - F(u_x^{\delta})| dx dt \leq \tau M \delta \text{meas}(\Omega) \|\xi\|_{C(Q_T)} \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0. \quad (26)$$

С другой стороны, функционал $\Phi(v)$, определенный соотношением

$$\Phi(v) = \int_0^T \int_{\Omega} \xi F(v) dx dt,$$

является непрерывным и выпуклым в $L_2(Q_T)$. Так как $L_2(Q_T)$ – рефлексивное пространство, то $\Phi(v)$ слабо полунепрерывен снизу; в частности, так как $u_x^{\delta} \rightharpoonup u_x$ слабо в $L_2(Q_T)$, то

$$\Phi(u_x) \leq \liminf \Phi(u_x^{\delta}).$$

Отсюда, из (25) и (26) вытекает выполнение неравенства

$$\int_0^T \int_{\Omega} \xi \sigma (w - u_x) dx dt \leq \int_0^T \int_{\Omega} \xi (F(w) - F(u_x)) dx dt.$$

В силу произвольности и неотрицательности функции ξ получаем (24) почти всюду в Q_T .

Справедливость теоремы установлена. Необходимые априорные оценки для решений задач (1)–(5) верны, поскольку они являются пределами решений задач (7)–(10). Кроме того, заменяя нумерацию формул в доказательствах лемм 2–6, все априорные оценки выводятся непосредственно.

ЗАМЕЧАНИЕ. При наличии массовых сил $\Phi(x, t)$ уравнение импульсов (2) модифицируется:

$$\rho(u_t + uu_x) = \sigma_x - R\rho_x + \rho\Phi.$$

Сходным образом изменяется интегральное тождество в определении обобщенного решения. Аналог сформулированной выше теоремы имеет место, например, при $\Phi \in L_\infty(Q_T)$.

Автор очень признателен профессору А. В. Кажихову за поддержку и внимание и рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Truesdell C. A First Course in Rational Continuum Mechanics. General Concepts (2nd edition). V. 1. San Diego–London: Academic Press, 1991.
- [2] Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983.
- [3] Вайгант В. А. Неоднородные задачи для уравнений вязкого теплопроводного газа // Математические проблемы механики сплошных сред. Динамика сплошной среды. Вып. 97. Новосибирск: Ин-т Гидродинамики СО АН СССР, 1990. С. 3–21.
- [4] Амосов А. А., Злотник А. А. Разрешимость “в целом” одного класса квазилинейных систем уравнений составного типа с негладкими данными // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30(4). С. 596–609.
- [5] Вайгант В. А., Кажихов А. В. О существовании глобальных решений двумерных уравнений Навье–Стокса сжимаемой вязкой жидкости // Сиб. матем. ж. 1995. Т. 36(6). С. 1283–1316.
- [6] Málek J., Necas J., Rokyta M., Růžička M. Weak and measure-valued solutions to evolutionary PDEs, Applied Mathematics and Mathematical Computation, 13. London: Chapman & Hall, 1996.
- [7] Мамонтов А. Е. Orlicz spaces in the existence problem of global solutions to viscous compressible nonlinear fluid equations. Препринт СО РАН № 2-96. Новосибирск: Ин-т гидродинамики, 1996.
- [8] Showalter W. R. Mechanics of non-Newtonian fluids. Oxford: Pergamon Press, 1978.
- [9] Shelukhin V. V. A shear flow problem for the compressible Navier-Stokes equations // Internat. J. Non-Linear Mech. 1998. V. 33(2). P. 247–257.
- [10] Simon J. Compact sets in the space $L_p(0, T; B)$ // Ann. Matematica Pura ed Applicata (IV). 1987. V. CXLVI. P. 65–69.
- [11] Tartar L. Compensated compactness and application to P.D.E. // Nonlinear Analysis and Mechanics, 4 (Heriot–Watt Symposium) / ed. R. J. Knops. Pitman Research Notes in Math. Series. V. 39, 1979. P. 136–212.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН
E-mail: karhikhov@hydro.usc.ru

Поступило
01.06.1998
Исправленный вариант
10.05.1999