Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Бекларян, О массивных подмножествах в пространстве конечно-порожденных групп диффеоморфизмов окружности, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 6, 825–833

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9151>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 15:34:08

О массивных подмножествах в пространстве конечно-порожденных групп диффеоморфизмов окружности

Л. А. Беклярян

Конечно-порожденные группы диффеоморфизмов окружности возникают при изучении различных задач геометрии, теории волн, вариационного исчисления и т.д. В частности, среди таких групп выделяются группы, которые действуют свободно на орбите почти каждой точки окружности. Работа посвящена изучению структуры множества конечно-порожденных групп диффеоморфизмов с заданным числом образующих и свойством, отмеченным выше. Показано, что такое множество содержит массивное подмножество (содержит счетное пересечение открытых всюду плотных подмножеств).

Библиография: 6 названий.

Введение. При изучении различных задач возникают группы гомеоморфизмов прямой и окружности. В частности, к таким задачам относятся вопрос классификации функционально-дифференциальных уравнений точечного типа (уравнения с отклоняющимся аргументом), вариационная задача и задача оптимального управления для систем с отклоняющимся аргументом (см. [1]–[5]). Следует отметить, что в этих задачах отклонения аргумента (гомеоморфизмы прямой или окружности) носят самый общий характер и не содержат каких либо ограничений. Вместе с тем, продвинутые результаты по данным задачам возможны при наличии некоторых условий общего свойства на изучаемые гомеоморфизмы. В связи с этим возникает вопрос категорного характера. Как много групп гомеоморфизмов удовлетворяют таким ограничениям? Статья посвящена исследованию условия взаимной трансверсальности элементов конечно-порожденной группы диффеоморфизмов окружности (диффеоморфизмов прямой, являющихся накрытиями окружности). Изучается степень общности такого условия.

Такая задача возникает при изучении проблемы принципа максимума Понтрягина для задачи оптимального управления для систем с отклоняющимся аргументом (см. [1], [2]). Так как задача оптимального управления рассматривается на конечном интервале времени, то, не нарушая общности, можно считать, что отклонения аргументов задаются диффеоморфизмами, являющимися накрытиями окружности.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 09-01-90200, 09-01-00324-а) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-3038.2008.1).

С другой стороны, в задаче классификации функционально-дифференциальных уравнений точечного типа отклонения аргумента задаются диффеоморфизмами прямой. Причем, априори такие диффеоморфизмы не удовлетворяют никаким иным ограничениям.

В дальнейшем, полную группу всех гомеоморфизмов окружности, сохраняющих ориентацию, будем обозначать через $\text{Homeo}_+(S^1)$, полную группу всех накрытий единичной окружности будем обозначать через $\widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1)$, т.е. для любого $q \in \widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1)$ справедливо тождество $q(t+1) = q(t) + 1$. Наряду с группой $Q = \langle q_1, \dots, q_s \rangle$, $Q \subseteq \widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1)$, будем рассматривать расширенную группу

$$\mathcal{J}_Q = \langle q_1, \dots, q_s, \hat{q} \rangle, \quad \text{где } \hat{q}(t) = t + 1.$$

Очевидно, что элемент $\hat{q}$ принадлежит центру группы $\mathcal{J}_Q$, т.е. перестановочен с любым элементом группы. Для циклической группы $Q = \langle q \rangle$ расширенную группу $\mathcal{J}_Q$ будем обозначать через $\mathcal{J}_q$.

Любому гомеоморфизму окружности $\bar{q} \in \text{Homeo}_+(S^1)$ мы можем поставить в соответствие гомеоморфизм прямой $q \in \widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1)$, являющийся накрытием гомеоморфизма $\bar{q}$. Такое соответствие не однозначное. Исследование свойств группы гомеоморфизмов окружности $\bar{Q} = \langle \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_s \rangle$, $\bar{Q} \subseteq \text{Homeo}_+(S^1)$, эквивалентно исследованию свойств соответствующей расширенной группы накрытий окружности $\mathcal{J}_Q = \langle q_1, \dots, q_s, \hat{q} \rangle$, где $Q = \langle q_1, \dots, q_s \rangle$, $Q \subseteq \widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Диффеоморфизмы $q_1, q_2 \in \text{Diff}^1(\mathbb{R})$ ($\text{Diff}^1(S^1)$), $q_1 \neq q_2$, прямой (окружности) называются *взаимно трансверсальными*, если из условия $q_1(t) = q_2(t)$, $t \in \mathbb{R}(S^1)$, следует, что $\dot{q}_1(t) \neq \dot{q}_2(t)$.

Важное замечание состоит в том, что для группы $Q = \langle q_1, \dots, q_s \rangle$ с образующими $q_j \in \text{Diff}^1(\mathbb{R})$ ($\text{Diff}^1(S^1)$), $j = 1, \dots, s$, и взаимно трансверсальными элементами, для любого $t \in \mathbb{R}(S^1)$, за исключением счетного множества точек, группа Q действует свободно на орбите $Q(t)$.

Определим важную топологическую характеристику группы $Q \subseteq \widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $Q \subseteq \widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1)$ ($\text{Homeo}_+(S^1)$). Непустое подмножество $\mathbb{R}(S^1)$ называется *минимальным*, если оно замкнуто, Q -инвариантно и не содержит собственных замкнутых Q -инвариантных подмножеств.

Для группы $Q \subseteq \widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1)$ ($\text{Homeo}_+(S^1)$) минимальное множество не пусто (см. [4; теорема 3.6]) и имеет одну из взаимоисключающих структур: дискретное множество (возможно не единственное); единственное совершенное нигде не плотное подмножество $\mathbb{R}(S^1)$ (канторово множество); совпадает со всем $\mathbb{R}(S^1)$. Объединение минимальных множеств группы $Q \subseteq \widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1)$ ($\text{Homeo}_+(S^1)$), обозначаемое через $E(Q)$, является замкнутым множеством (см. [4; теорема 3.7]).

Пусть $Q = \langle q_1, \dots, q_s \rangle$ – группа с образующими из $\text{Diff}^1(\mathbb{R}) \cap \widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Элементы расширенной группы $\mathcal{J}_Q = \langle q_1, \dots, q_s, \hat{q} \rangle$ взаимно трансверсальны тогда и только тогда, когда элементы канонического подмножества*

$$\mathcal{J}_Q^S = \{q : q \in \mathcal{J}_Q, \exists t \in \mathbb{R} \ q(t) = t\} \quad (1)$$

трансверсальны единичному элементу e .

Для группы $Q = \langle q_1, \dots, q_m \rangle$ с образующими из $\text{Diff}^1(\mathbb{R}) \cap \widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1)$ при каждом $k = 1, 2, \dots$ определим каноническое подмножество

$$Q_{\perp}^k = \{q : q \in Q^k, \text{ множества диффеоморфизмов } \{q, \langle \hat{q} \rangle\} \text{ взаимно трансверсальны}\}. \quad (2)$$

В терминах подмножеств $Q_{\perp}^k$, $k = 1, 2, \dots$, мы можем сформулировать очевидный критерий взаимной трансверсальности элементов расширенной группы $\mathcal{J}_Q = \langle q_1, \dots, q_m, \hat{q} \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Элементы расширенной группы $\mathcal{J}_Q = \langle q_1, \dots, q_m, \hat{q} \rangle$ являются взаимно трансверсальными тогда и только тогда, когда для любого $k = 1, 2, \dots$ справедливо условие $Q^k = Q_{\perp}^k$.*

Хорошо известно, что в пространстве

$$\text{Diff}^2(\mathbb{R}) \cap \widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1)$$

множество диффеоморфизмов q , для которых число сдвига $\tau(q)$ рациональное (т.е. $\tau(q) \in \mathbb{Q}$), а элементы расширенной коммутативной группы $\mathcal{J}_q = \langle q, \hat{q} \rangle$ взаимно трансверсальны и $\mathcal{J}_q^S \neq \langle e \rangle$, т.е. множество

$$\mathbb{P} = \{q : q \in \text{Diff}^2(\mathbb{R}) \cap \widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1), \tau(q) \in \mathbb{Q}, \text{ элементы расширенной группы } \mathcal{J}_q = \langle q, \hat{q} \rangle \text{ взаимно трансверсальны, } \mathcal{J}_q^S \neq \langle e \rangle\}, \quad (3)$$

является открытым всюду плотным подмножеством. Диффеоморфизмы окружности, соответствующие таким диффеоморфизмам прямой, называются диффеоморфизмами с невырожденными циклами (см. [6; глава 3, § 11, раздел Ж]). В частности, из условия рациональности числа $\tau(q)$ следует, что минимальные множества расширенной группы $\mathcal{J}_q$ являются дискретными множествами. Из условия взаимной трансверсальности элементов расширенной группы $\mathcal{J}_q$ и условия $\mathcal{J}_q^S \neq \langle e \rangle$ следует, что число дискретных минимальных множеств конечное.

Если для $q \in \text{Diff}^2(\mathbb{R}) \cap \widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1)$ число сдвига иррациональное, то $\mathcal{J}_q^S = \langle e \rangle$ и по теореме Данжуа (см. [6; глава 3, § 11, раздел З]) минимальное множество расширенной группы $\mathcal{J}_q$ совпадает со всей прямой $\mathbb{R}$.

1. Основные результаты. При каждом заданном $m = 1, 2, \dots$ определим пространство Θ^m в виде прямого произведения

$$\Theta^m = \bigotimes_m [\text{Diff}^2(\mathbb{R}) \cap \widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1)]. \quad (4)$$

Всякую группу $\langle q_1, \dots, q_m \rangle$ с образующими $q_j \in \text{Diff}^2(\mathbb{R}) \cap \widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1)$, $j = 1, \dots, m$, будем рассматривать как элемент пространства Θ^m .

Теперь мы можем сформулировать основной результат, в котором приводится процедура определения массивного подмножества в пространстве диффеоморфизмов.

ТЕОРЕМА А. *Множество свободных групп диффеоморфизмов*

$$Q = \langle q_1, \dots, q_s \rangle, \quad q_j \in \text{Diff}^2(\mathbb{R}) \cap \widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1), \quad j = 1, \dots, s,$$

с фиксированным числом s образующих, для которых элементы расширенной группы

$$\mathcal{J}_Q = \langle q_1, \dots, q_s, \widehat{q} \rangle, \quad \widehat{q} = t + 1,$$

взаимно трансверсальны, в метрике пространства $\bigotimes_s [\text{Diff}^2(\mathbb{R}) \cap \widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1)]$ является счетным пересечением открытых всюду плотных подмножеств (массивным множеством).

Дадим переформулировку теоремы А в терминах групп диффеоморфизмов окружности. Всякую группу $\langle g_1, \dots, g_m \rangle$ с образующими $g_j \in \text{Diff}^2(S^1)$, $j = 1, \dots, m$, будем рассматривать как элемент пространства $\bigotimes_m \text{Diff}^2(S^1)$.

ТЕОРЕМА В. *Множество свободных групп диффеоморфизмов*

$$G = \langle g_1, \dots, g_s \rangle, \quad g_j \in \text{Diff}^2(S^1), \quad j = 1, \dots, s,$$

окружности с фиксированным числом s образующих, для которых элементы взаимно трансверсальны, в метрике пространства $\bigotimes_s \text{Diff}^2(S^1)$ является счетным пересечением открытых всюду плотных подмножеств (массивным множеством).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для группы $Q = \langle q_1, \dots, q_m \rangle$ при заданном $k = 1, 2, \dots$ дадим определение Q^k свободности (k -свободности).

Группа $Q = \langle q_1, \dots, q_m \rangle$ называется k -свободной, если в группе Q не существует соотношений, длина которых меньше или равна $2k$. Это означает, что все элементы множества Q^k различны.

Мы можем сформулировать очевидный критерий того, что группа Q является свободной.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Группа $Q = \langle q_1, \dots, q_m \rangle$ является свободной тогда и только тогда, когда для любого $k = 1, 2, \dots$ она является k -свободной.*

В пространстве Θ^m при каждом $k = 1, 2, \dots$ определим подмножество $W^m(k)$ следующим образом:

$$W^m(k) = \{Q : Q \in \Theta^m, Q^k = Q^k_{\perp}, Q^k \cap \langle \widehat{q} \rangle = e, Q \text{ является } k\text{-свободной}\}. \quad (5)$$

Для таких подмножеств справедливо вложение

$$W^m(k+1) \subseteq W^m(k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Мы должны показать, что $W^m(k)$, $k = 1, 2, \dots$, являются открытыми всюду плотными подмножествами пространства Θ^m . Тогда в силу утверждений 2 и 3, пересечение

$$\mathbb{W}^m = \bigcap_{k=1}^{\infty} W^m(k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

и определяет массивное подмножество из теоремы В (если положить $m = s$).

Для групп $Q = \langle q \rangle$ с одной образующей ($m = 1$) из условия $Q \in \mathbb{W}^1$ следует, что $q^k \notin \langle \widehat{q} \rangle$ для любого k . Тогда из условий рациональности числа сдвига $\tau(q)$ ($\tau(q) \in \mathbb{Q}$) и $Q^k = Q^k_{\perp}$ для любого $k = 1, 2, \dots$ будет следовать условие $\mathcal{J}_q^S \neq \langle e \rangle$. Поэтому множество $\mathbb{W}^1$ будет содержать открытое всюду плотное подмножество $\mathbb{P}$.

Имеет место следующий факт.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Множества $W^m(k)$, $k = 1, 2, \dots$, являются открытыми множествами пространства Θ^m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, так как группа $Q \in W^m(k)$ является k -свободной, то при малом возмущении ее образующих новые слова длины не более чем k не возникают, а условия $Q^k = Q_\perp^k$ и $q \notin \langle \hat{q} \rangle$ для возмущенной группы сохраняются. Следовательно, множества $W^m(k)$, $k = 1, 2, \dots$, являются открытыми в пространстве Θ^m .

Нам остается установить следующий факт.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Открытые множества $W^m(k)$, $k = 1, 2, \dots$, плотны в пространстве Θ^m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем методом математической индукции.

1) Пусть $k = 1$. Множество

$$\{Q : Q \in \Theta^m, Q^1 = Q_\perp^1, Q^1 \cap \langle \hat{q} \rangle = e\} \quad (8)$$

является открытым подмножеством пространства Θ^m . Так как множество $\mathbb{P}$ всюду плотно в пространстве Θ^1 , то множество $\bigotimes_m \mathbb{P}$ также будет всюду плотным в пространстве Θ^m . Очевидно, что подмножество (8) содержит открытое подмножество $\bigotimes_m \mathbb{P}$. Следовательно, множество (8) также будет всюду плотным в пространстве Θ^m . Легко видеть, что для любой группы Q из множества (8) сколь угодно малым возмущением образующих можно добиться того, чтобы возмущенная группа стала 1-свободной. Это означает, что множество $W^m(1)$ всюду плотно в множестве (8). Следовательно, открытое подмножество $W^m(1)$ также будет всюду плотным в пространстве Θ^m .

2) Пусть для любого $k \leq p$ открытое множество $W^m(k)$ является плотным в пространстве Θ^m . Так как $W^m(r+1) \subseteq W^m(r)$, $r = 1, 2, \dots$, то отмеченное свойство эквивалентно условию плотности множества $W^m(p)$ в пространстве Θ^m . Для завершения доказательства нам следует показать, что открытое множество $W^m(p+1)$ также будет плотным в пространстве Θ^m . Учитывая вложение $W^m(p+1) \subseteq W^m(p)$, для этого достаточно установить, что $W^m(p+1)$ плотно в $W^m(p)$.

Выберем группу $Q \in W^m(p)$. На прямой $\mathbb{R}$ определим подмножество $\Lambda_p(Q)$

$$\Lambda_p(Q) = \{t : t \in \mathbb{R}, \exists q \in Q^p \setminus e \ q(t) = t \pmod{1}\}, \quad (9)$$

инвариантное относительно сдвига $\hat{q}(t) = t+1$. Так как $Q^p = Q_\perp^p$, то $\Lambda_p(Q)$ – дискретное множество. В таком случае образующие группы Q можно сколь угодно мало возмутить так, что возмущенная группа будет принадлежать открытому множеству $W^m(p)$ и являться $(p+1)$ -свободной. Поэтому мы можем изначально полагать, что рассматриваемая группа $Q \in W^m(p)$, которую мы собираемся аппроксимировать группами из множества $W^m(p+1)$, является $(p+1)$ -свободной. Для группы $Q \in W^m(p)$ свойство быть $(p+1)$ -свободной устойчиво относительно малого возмущения образующих.

Нам следует показать, что $(p+1)$ -свободная группа $Q \in W^m(p)$ может быть сколь угодно малым возмущением образующих преобразована в группу $\tilde{Q}$ со свойствами

$$\tilde{Q}^{(p+1)} = \tilde{Q}_{\perp}^{(p+1)}, \quad \tilde{Q}^{(p+1)} \cap \langle \hat{q} \rangle = e,$$

что эквивалентно условию $\tilde{Q} \in W^m(p+1)$. В силу принадлежности $Q \in W^m(p)$ для группы Q выполняются условия

$$Q^p = Q_{\perp}^p, \quad Q^p \cap \langle \hat{q} \rangle = e.$$

Поэтому остается показать, что выполнено следующее утверждение.

ЛЕММА 1. *Для $(p+1)$ -свободной группы $Q \in W^m(p)$ любой элемент $q \in Q$ длины $p+1$ сколь угодно малым возмущением образующих может быть преобразован в элемент $\tilde{q}$, для которого элементы множества диффеоморфизмов $\{\tilde{q}, \langle \hat{q} \rangle\}$ взаимно трансверсальны и $\tilde{q} \notin \langle \hat{q} \rangle$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, элемент $q \in Q$ длины $p+1$ имеет представление

$$q = q_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon_{(p+1)}} \dot{q}, \quad \dot{q} = q_{i_p}^{\varepsilon_p} \cdots q_{i_1}^{\varepsilon_1}, \quad (10)$$

$$i_j \in \{1, 2, \dots, m\}, \quad \varepsilon_j \in \{-1, 1\}, \quad j = 1, 2, \dots, p+1.$$

При этом элементы множества гомеоморфизмов $\{\dot{q}, \langle \hat{q} \rangle\}$ взаимно трансверсальны и $\dot{q} \notin \langle \hat{q} \rangle$.

Если не существует точки $t \in \mathbb{R}$ и числа $n \in \mathbb{Z}$, для которых выполняется соотношение $q(t) = \hat{q}^n(t)$, т.е. $(q(t) = t \pmod{1})$, то элементы множества диффеоморфизмов $\{q, \langle \hat{q} \rangle\}$ взаимно трансверсальны и $q \notin \langle \hat{q} \rangle$, что и требовалось показать.

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть множество

$$\Delta(q) = \{t : q(t) = t \pmod{1}\} \quad (11)$$

не пусто, т.е. $\Delta(q) \neq \emptyset$. Покажем, что подмножество

$$\Gamma(q) = \{t : t \in \Delta(q), \exists r \in \{1, \dots, p+1\} \ q_{i_r}^{\varepsilon_r} \cdots q_{i_1}^{\varepsilon_1}(t) = t \pmod{1}\}$$

$$\text{и либо } q_{i_r}^{\varepsilon_r} = q_{i_1}^{-\varepsilon_1}, \text{ либо } q_{i_{(r+1)}}^{\varepsilon_{(r+1)}} = q_{i_1}^{\varepsilon_1}\} \quad (12)$$

дискретное.

Если для $t \in \Gamma(q)$ имеет место условие $r = p+1$, то должно выполняться равенство $q_{i_r}^{\varepsilon_r} = q_{i_1}^{-\varepsilon_1}$. В таком случае справедливо и другое равенство $q_{i_p}^{\varepsilon_p} \cdots q_{i_2}^{\varepsilon_2}(q_{i_1}^{\varepsilon_1}(t)) = q_{i_1}^{\varepsilon_1}(t) \pmod{1}$, т.е. $q_{i_1}^{\varepsilon_1}(t) \in \Delta(q_{i_p}^{\varepsilon_p} \cdots q_{i_2}^{\varepsilon_2})$. Так как $q_{i_p}^{\varepsilon_p} \cdots q_{i_2}^{\varepsilon_2} \in Q^p$, то такие точки $q_{i_1}^{\varepsilon_1}(t)$ образуют дискретное множество, в силу чего дискретным будет и множество соответствующих точек t .

Если для $t \in \Gamma(q)$ имеет место условие $r \in \{3, \dots, p\}$, то $t \in \Delta(q_{i_r}^{\varepsilon_r} \cdots q_{i_1}^{\varepsilon_1})$. Так как $q_{i_r}^{\varepsilon_r} \cdots q_{i_1}^{\varepsilon_1} \in Q^p$, то такие точки t образуют дискретное множество. Следовательно, подмножество $\Gamma(q)$ дискретное.

Рассмотрим произвольную точку t дискретного множества $\Gamma(q)$. Для такой точки $t \in \Gamma(q)$ определим подмножества

$$\begin{aligned} N_q(t) &= \{r : r \in \{1, \dots, p\}, q_{i_r}^{\varepsilon_r} \cdots q_{i_1}^{\varepsilon_1}(t) = t \pmod{1} \\ &\quad \text{и либо } q_{i_r}^{\varepsilon_r} = q_{i_1}^{-\varepsilon_1}, \text{ либо } q_{i_{(r+1)}}^{\varepsilon_{(r+1)}} = q_{i_1}^{\varepsilon_1}\}, \\ N_q^+(t) &= \{r : r \in N_q(t), \text{ и либо } r = 1, \text{ либо } q_{i_{(r+1)}}^{\varepsilon_{(r+1)}} = q_{i_1}^{\varepsilon_1}\}, \\ N_q^-(t) &= \{r : r \in N_q(t), q_{i_r}^{\varepsilon_r} = q_{i_1}^{-\varepsilon_1}\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Очевидно, что $N_q(t) = N_q^+(t) \cup N_q^-(t)$.

При малом возмущении образующих группы Q для элемента $\check{q}$, полученного от возмущения элемента q , мощность $|\Gamma(\check{q})|$ не возрастает, т.е.

$$|\Gamma(\check{q})| \leq |\Gamma(q)|. \quad (14)$$

Более того, функция $\text{dist}(\Gamma(\check{q}), \Gamma(q))$ (по определению $\text{dist}(\emptyset, \Gamma(q)) = 0$) непрерывно зависит от образующих группы.

При малом возмущении образующих группы Q для элемента $\check{q}$, полученного в результате возмущения элемента q , для точки $\check{t} \in \Gamma(\check{q})$, ближайшей к точке $t \in \Gamma(q)$, справедливо включение

$$N_{\check{q}}(\check{t}) \subseteq N_q(t). \quad (15)$$

Определим подмножество

$$\Gamma^0(q) = \{t : t \in \Gamma(q), |N_q^+(t)| = |N_q^-(t)|\}. \quad (16)$$

Покажем, что с помощью малого возмущения образующих группы Q для элемента $\check{q}$, полученного от возмущения элемента q , можно добиться выполнения условия $\Gamma^0(q) = \emptyset$.

Действительно, пусть $t \in \Gamma^0(q)$. Тогда найдутся $r, l \in \{1, \dots, p\}$, $r \leq l$, такие, что

$$\begin{aligned} q_{i_r}^{\varepsilon_r} \cdots q_{i_1}^{\varepsilon_1}(t) &= t \pmod{1}, & q_{i_{(r+1)}}^{\varepsilon_{(r+1)}} &= q_{i_1}^{\varepsilon_1}, \\ q_{i_l}^{\varepsilon_l} \cdots q_{i_1}^{\varepsilon_1}(t) &= t \pmod{1}, & q_{i_l}^{\varepsilon_l} &= q_{i_1}^{-\varepsilon_1}, \end{aligned} \quad (17)$$

и между ними нет иных целых чисел с такими же свойствами. Очевидно, что для r и l справедливы включения $r, l \in N_q(t)$. Если мы возмутим образующую $q_{i_1}^{\varepsilon_1}$ так, чтобы для ее возмущения $\check{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}$ выполнялось условие $\check{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}(t) \neq q_{i_1}^{\varepsilon_1}(t)$, то для возмущенного элемента $\check{q}$ и точки $\check{t} \in \Gamma(\check{q})$, ближайшей к точке $t \in \Gamma^0(q)$, будет выполняться условие $r, l \notin N_{\check{q}}(\check{t})$. Так как множество $\Gamma(q)$ дискретное, множество $N_q(t)$ конечное и выполняется включение (15), то с помощью конечного числа аналогичных шагов можно добиться справедливости условия $\Gamma^0(\check{q}) = \emptyset$.

Итак, сколь угодно малым возмущением образующих группы Q мы можем добиться того, чтобы для элемента $\check{q}$, полученного в результате возмущения исходного элемента q , выполнялось условие $\Gamma^0(\check{q}) = \emptyset$.

Если $\check{q}(\check{t}) \neq 1$, то в точке $\check{t}$ элемент $\check{q}$ трансверсален элементам группы $\langle \hat{q} \rangle$ и $\check{q} \notin \langle \hat{q} \rangle$. Если $\check{q}(\check{t}) = 1$, то в силу условия $\Gamma^0(\check{q}) = \emptyset$ мы можем так возмутить образующую $\check{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}$ в сколь угодно малой окрестности точки $\check{t}$, чтобы для возмущенной образующей $\check{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\check{t})$ выполнялись условия

$$q_{i_1}^{\varepsilon_1}(\check{t}) = \check{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\check{t}), \quad \check{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\check{t}) \neq \check{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\check{t}). \quad (18)$$

Тогда для возмущенного элемента $\dot{q}$, соответствующего элементу $\check{q}$, справедливы равенства

$$\Gamma(\dot{q}) = \Gamma(\check{q}), \quad \Gamma^0(\dot{q}) = \emptyset \quad (19)$$

и элемент $\dot{q}$ в точке $\dot{t} \in \Gamma(\dot{q})$ трансверсален элементам группы $\langle \hat{q} \rangle$ и $\dot{q} \notin \langle \hat{q} \rangle$. Так как множество $\Gamma(\dot{q})$ дискретное, то, повторяя такую процедуру конечное число раз, мы получим возмущение образующей $\check{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}$, при котором для элемента $\dot{q}$, полученного в результате возмущения исходного элемента q , во всех точках дискретного множества $\Gamma(\dot{q})$ элемент $\dot{q}$ трансверсален элементам группы $\langle \hat{q} \rangle$ и $\dot{q} \notin \langle \hat{q} \rangle$.

Итак, сколь угодно малым возмущением образующих группы Q мы можем добиться того, чтобы для элемента $\dot{q}$, полученного в результате возмущения исходного элемента q , выполнялось условие $\Gamma^0(\dot{q}) = \emptyset$ и во всех точках дискретного множества $\Gamma(\dot{q})$ элемент $\dot{q}$ был бы трансверсален элементам группы $\langle \hat{q} \rangle$ и $\dot{q} \notin \langle \hat{q} \rangle$.

Пусть B – некоторая достаточно малая окрестность дискретного множества $\Gamma(\dot{q})$. Так как в точках дискретного множества $\Gamma(\dot{q})$ элемент $\dot{q}$ трансверсален элементам группы $\langle \hat{q} \rangle$ и $\dot{q} \notin \langle \hat{q} \rangle$, то будет справедливо равенство

$$B \cap \Delta(\dot{q}) = \Gamma(\dot{q}). \quad (20)$$

Из малости окрестности B следует существование малого $\varepsilon > 0$ такого, что для любого $\tau \in \mathbb{R}$ множества

$$A, \quad \dot{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}(A), \quad \dots, \quad \dot{q}_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon_{(p+1)}}(A) \quad (A = [\tau, \tau + \varepsilon] \cap B) \quad (21)$$

являются дизъюнктными. Фиксируем $\tau \in \mathbb{R}$. Возмущая образующую $\dot{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}$ на множестве A , мы можем добиться того, чтобы для элемента $\tilde{q}$, полученного в результате возмущения исходного элемента q , выполнялись условия

$$\Gamma^0(\tilde{q}) = \emptyset, \quad \Gamma(\tilde{q}) \subseteq B, \quad (22)$$

множество $\Delta(\tilde{q}) \cap [\tau, \tau + \varepsilon]$ было дискретным и во всех точках дискретных множеств $\Delta(\tilde{q}) \cap [\tau, \tau + \varepsilon]$ и $\Gamma(\tilde{q})$ элемент $\tilde{q}$ был трансверсален элементам группы $\langle \hat{q} \rangle$ и $\tilde{q} \notin \langle \hat{q} \rangle$. Повторяя такую процедуру для множества $A_1 = [\tau + \varepsilon, \tau + 2\varepsilon] \cap B$, мы получим возмущение образующей $\dot{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}$, при котором для элемента $\tilde{q}$, полученного в результате возмущения исходного элемента q , множество $\Delta(\tilde{q})$ является дискретным и во всех точках множества $\Delta(\tilde{q})$ элемент $\tilde{q}$ трансверсален элементам группы $\langle \hat{q} \rangle$ и $\tilde{q} \notin \langle \hat{q} \rangle$. Следовательно, элемент $\tilde{q}$ трансверсален элементам группы $\langle \hat{q} \rangle$ и $\tilde{q} \notin \langle \hat{q} \rangle$. Это и доказывает лемму 1.

Теорема доказана.

Автор признателен всем участникам семинара “Динамические системы и эргодическая теория” и его руководителям Д. В. Аносову и А. М. Стёпину за полезные советы и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. А. Бекларян, “Вариационная задача с запаздывающим аргументом и ее связь с некоторой полугруппой отображений отрезка в себя”, *ДАН СССР*, **271**:5 (1983), 1036–1040.

- [2] Л. А. Бекларян, “Задача оптимального управления для систем с отклоняющимся аргументом и ее связь с конечно-порожденной группой гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, порожденной функциями отклонения аргумента”, *ДАН СССР*, **317**:6 (1991), 1289–1294.
- [3] L. A. Beklaryan, “About canonical types of the differential equations with deviating argument”, *Funct. Differ. Equ.*, 2001, № 1-2, 25–33.
- [4] Л. А. Бекларян, “Группы гомеоморфизмов прямой и окружности. Топологические характеристики и метрические инварианты”, *УМН*, **59**:4 (2004), 3–68.
- [5] Л. А. Бекларян, *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Групповой подход*, Факториал Пресс, М., 2007.
- [6] В. И. Арнольд, *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978.

Л. А. Бекларян

Центральный экономико-математический институт РАН,
г. Москва

E-mail: beklar@cemi.rssi.ru

Поступило

19.05.2011