Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Осипов, О мультипликативности CFC -пространств, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 1, 111–116

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9152>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 04:12:13

О мультипликативности CFC -пространств

А. В. Осипов

В работе решается проблема Портера и Дикмана о произведении компактно функционально-компактных пространств. Доказывается, что класс компактно функционально-компактных пространств является мультипликативным.

Библиография: 7 названий.

DOI: 10.4213/mzm9152

1. Введение. В 1984 г. Дикманом и Портером [1] была поставлена задача: *будет ли произведение CFC -пространств являться CFC -пространством?* В 2003 г. эта задача была включена в список актуальных проблем по топологии Topology Proceedings [2; Problem C50].

В данной работе решается эта проблема, определяется более общий класс пространств – класс $C_\tau FC$ -пространств, и доказывается, что тихоновское произведение $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ – $C_\tau FC$ -пространство тогда и только тогда, когда каждое пространство X_α является $C_\tau FC$ -пространством.

Все пространства в этой статье полагаем хаусдорфовыми топологическими пространствами. Под отображением понимаем непрерывное сюръективное отображение. Пространство называется *H -замкнутым*, если оно замкнуто в любом объемлющем пространстве. Множество A в пространстве X называется *канонически-открытым* (регулярно-открытым), если $A = \text{Int } \bar{A}$. Топологическое пространство (X, τ) называется *полурегулярным*, если существует база топологии τ , состоящая из канонически-открытых множеств.

Напомним, что пространство X называют *неуплотняемым*, если всякое взаимнооднозначное непрерывное отображение (уплотнение) $f: X \rightarrow Y$ замкнуто, т.е. является гомеоморфизмом.

Катетовым было доказано, что класс неуплотняемых пространств есть подкласс класса H -замкнутых пространств, а именно: *хаусдорфовое пространство X неуплотняемое тогда и только тогда, когда оно H -замкнутое и полурегулярное.*

Пространство X называется *функционально-замкнутым*, если всякое отображение $f: X \rightarrow Y$ замкнуто. *Компактным отображением* называют отображение, при котором прообраз любой точки – компактное множество.

В 1973 г. Грызловым были определены классы: *k -функционально-замкнутых* и *c -функционально-замкнутых* пространств.

Работа выполнена при поддержке программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (3.2 в [3]). Пространство X называется *k-функционально замкнутым* (*kf-пространством*), если всякое конечно-кратное отображение $f: X \rightarrow Y$ замкнуто.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (3.3 в [3]). Пространство X называется *c-функционально-замкнутым* (*cf-пространством*), если всякое компактное отображение $f: X \rightarrow Y$ замкнуто.

Для внутренней характеристики *kf*-(*cf*)-пространств Грызлов определил свойство *k*-(*c*)-полурегулярность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (3.4 в [3]). Пространство X называется *k-полурегулярным* (*c-полурегулярным*), если для любого конечного (компактного) подмножества $K \subset X$ и любой окрестности $O(K)$ найдется канонически-открытая окрестность $V(K)$ множества K такая, что $K \subset V(K) \subset O(K)$.

На основе этих свойств были получены следующие характеристики *kf*-(*cf*)-пространств.

ТЕОРЕМА (3.11 и 3.12 в [3]). *Следующие условия эквивалентны:*

- 1) X есть *kf-пространство* (*cf-пространство*);
- 2) X *H-замкнуто* и *k-полурегулярно* (*c-полурегулярно*).

В 1984 г. независимо от работ Грызлова, Портер и Дикман [1] определили *конечно-функционально компактные* пространства (кратко – *FFC-пространства*) и *компактно-функционально компактные* пространства (кратко – *CFC-пространства*) которые, по терминологии Грызлова, есть в точности *kf-пространства* и *cf-пространства*. Отметим, что в работах Портера, Дикмана и Фрейдлера (см. [1], [4]) были получены замечательные характеристики функционально-замкнутых, *CFC-пространств* и *FFC-пространств*.

Очевидно, что справедливы следующие взаимоотношения между классами компактных (K), функционально-замкнутых (FC), *cf*- (CFC), *kf*- (FFC) и неуплотняемых (MH) пространств:

$$(K) \Rightarrow (FC) \Rightarrow (CFC) \Rightarrow (FFC) \Rightarrow (MH).$$

Заметим, что все импликации необратимы [4].

2. $C_\tau FC$ -пространства. Введем новый класс пространств, который будет некоторым обобщением класса *CFC-пространств*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение $f: X \rightarrow Y$ будем называть *C_τ -отображением*, если полный прообраз любой точки – компактное подмножество мощности меньше τ .

Заметим, что любое C_τ -отображение, является C_λ -отображением при $\lambda \geq \tau$.

При $\tau = 2$ получаем уплотнение, при $\tau = \omega$ – конечно-кратное отображение, и при τ таком, что $|X| < \tau$, получаем компактное отображение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пространство X будем называть *C_τ -функционально-компактным* ($C_\tau FC$) *пространством*, если всякое C_τ -отображение $f: X \rightarrow Y$ является замкнутым отображением.

При $\tau = 2$ получаем неуплотняемое пространство, при $\tau = \omega$ – *FFC-пространство*, и при τ таком, что $|X| < \tau$, получаем *CFC-пространство*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пространство X будем называть C_τ -полурегулярным, если для любого компактного подмножества $K \subset X$ такого, что $|K| < \tau$, и любой окрестности $O(K)$ найдется канонически открытая окрестность $V(K)$ множества K такая, что $K \subset V(K) \subset O(K)$.

При $\tau = 2$ получаем полурегулярность пространства X . Заметим, что любое C_τ -полурегулярное пространство, является C_σ -полурегулярным пространством для любого $\sigma \leq \tau$.

ТЕОРЕМА 1. Следующие условия эквивалентны:

- 1) X – $C_\tau FC$ пространство;
- 2) X – H -замкнутое и C_τ -полурегулярное пространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $(1 \Rightarrow 2)$. Пусть X – $C_\tau FC$ -пространство. Тогда X – неуплотняемое и значит H -замкнутое пространство. Предположим, что X не C_τ -полурегулярное пространство. Тогда существует компактное подмножество K мощности меньше τ и окрестность $O(K)$ такие, что для произвольной канонически-открытой окрестности $V(K)$ будет выполняться $(X \setminus O(K)) \cap V(K) \neq \emptyset$. Произведем разбиение G пространства X , единственным неодноточечным элементом которого является множество K . Пусть $h: X \rightarrow X_1$ – фактор-отображение X на пространство X_1 разбиения G . Изменим фактор-топологию X_1 , положив базисными окрестностями точки $K \in X_1$ – канонически-открытые окрестности $V(K)$. Полученная топология на пространстве X_1 будет слабее, чем фактор-топология, поэтому тождественное отображение id_{X_1} будет непрерывным. Суперпозиция $\text{id}_{X_1} \circ h$ – непрерывное C_τ -отображение, но образ $\text{id}_{X_1} \circ h(X \setminus O(K))$ не замкнут. Получили противоречие.

$(2 \Rightarrow 1)$. Пусть X – H -замкнутое и C_τ -полурегулярное пространство. Допустим, что существуют C_τ -отображение $f: X \rightarrow Y$ и замкнутое подмножество F такие, что $f(F)$ не замкнуто. Пусть точка $y \in \overline{f(F)} \setminus f(F)$; тогда прообраз $K = f^{-1}(y)$ – компактное подмножество мощности меньше τ такое, что $K \cap F = \emptyset$. В силу C_τ -полурегулярности X у компактного множества K и открытой окрестности $O(K) = X \setminus F$ существует канонически-открытая окрестность $V(K)$ такая, что $K \subset V(K) \subset O(K)$. Тогда $T = X \setminus V(K)$ – канонически-замкнутое подмножество в H -замкнутом пространстве, и значит, является H -замкнутым подмножеством. В силу того, что образ H -замкнутого подмножества – замкнутое множество, $f(T)$ замкнуто. Заметим, что $f(F) \subset f(T)$ и $y \notin f(T)$. Отсюда $y \notin \overline{f(F)}$. Получили противоречие.

3. Произведение $C_\tau FC$ -пространств. В 1984 г. Дикманом и Портером [1] была поставлена задача: *будет ли произведение CFC -пространств являться CFC -пространством?*

Следующая теорема отвечает положительно на этот вопрос.

ТЕОРЕМА 2. Для того, чтобы тихоновское произведение $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ было $C_\tau FC$ -пространством, необходимо и достаточно, чтобы каждое X_α было $C_\tau FC$ -пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X_α – $C_\tau FC$ -пространство для каждого $\alpha \in A$. Докажем, что тихоновское произведение $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ является $C_\tau FC$ -пространством. Тихоновское произведение H -замкнутых пространств является H -замкнутым пространством (см. [5]). Поэтому остается проверить, что $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ является C_τ -полурегулярным.

Предположим противное. Пусть существует G – компактное подмножество тихоновского произведения мощности меньше τ и открытое множество U , где $G \subset U$, такие, что для любого открытого множества $V \supset G$ выполняется, что $\text{Int } \bar{V} \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$. Пусть $F = \prod_{\alpha \in A} \pi_\alpha(G)$, где $\pi_\alpha(G)$ – компактное множество – проекция компакта G на X_α для каждого $\alpha \in A$. Заметим, что в силу теоремы Тихонова [6; теорема 3.2.4] F – компактное подмножество X . Так как G и $F \setminus U$ – непересекающиеся компактные подмножества хаусдорфова пространства X , то V можно выбрать такое, что $\bar{V} \cap (F \setminus U) = \emptyset$ и $V \subset U$. Пусть $S = \bar{V} \setminus U$. Заметим, что $\text{Int } \bar{V} \cap S \neq \emptyset$ так как иначе $\text{Int } \bar{V} \subset U$. Также заметим, что $S \cap F = \emptyset$. Действительно, $S \subset \bar{V}$, а значит, в силу выбора V $S \cap (F \setminus U) = \emptyset$, но S по определению не пересекается с U . $F \subset (X \setminus S)$; тогда по теореме Уоллеса [6; теорема 3.2.10] существует базисное открытое множество $M = \prod_{k=1}^n U_{\alpha_k} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_k} X_\alpha$ такое, что $F \subset M \subset (X \setminus S)$. Отметим, что $\pi_{\alpha_k}(G) \subset U_{\alpha_k}$. Так как X_{α_k} – $C_\tau FC$ -пространство и мощность $\pi_{\alpha_k}(G)$ меньше τ существует канонически-открытое множество V_{α_k} такое, что $\pi_{\alpha_k}(G) \subset V_{\alpha_k} \subset U_{\alpha_k}$. Пусть $W = \prod_{k=1}^n V_{\alpha_k} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_k} X_\alpha$. Заметим, что W – канонически-открытое множество (как конечное произведение канонически-открытых множеств V_{α_k} и канонически-открытого множества $\prod_{\alpha \neq \alpha_k} X_\alpha$) такое, что $F \subset W \subset M \subset (X \setminus S)$. Определим множество $T = V \cap W$. Заметим, что T – открытое множество, содержащее G . Так как $T \subset W$, то $\text{Int } \bar{T} \subset \text{Int } \bar{W} = W$ отсюда $\text{Int } \bar{T} \cap S = \emptyset$. С другой стороны, $T \subset V$; тогда $\text{Int } \bar{T} \subset \text{Int } \bar{V} \subset \bar{V} \subset U \cup S$. Отсюда $\text{Int } \bar{T} \subset U$. Канонически-открытое множество $\text{Int } \bar{T}$ содержит компакт G и содержится в U . Получили противоречие.

Докажем обратное. Пусть тихоновское произведение $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ является $C_\tau FC$ -пространством. Докажем, что X_α – $C_\tau FC$ -пространство для каждого $\alpha \in A$. В силу H -замкнутости X , каждое X_α – H -замкнутое пространство [5]. Осталось показать, что X_α является C_τ -полурегулярным для каждого $\alpha \in A$. Возьмем произвольное $\alpha_0 \in A$. Пусть F_{α_0} – произвольный компакт, мощности меньше τ , лежащий в X_{α_0} . Через U_{α_0} обозначим произвольное открытое множество, содержащее F_{α_0} . Для каждого $\alpha \neq \alpha_0$ зафиксируем произвольную точку $x_\alpha \in X_\alpha$. Рассмотрим компактное множество $F = F_{\alpha_0} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_0} \{x_\alpha\}$. Мощность множества F строго меньше τ . Произведение $U = U_{\alpha_0} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_0} X_\alpha$ – открытое множество, содержащее множество F . Тогда в силу того, что X – $C_\tau FC$ -пространство, существует канонически-открытое множество V такое, что $F \subset V \subset U$. В силу теоремы Уоллеса [6; теорема 3.2.10] существует базисное открытое множество $S = \prod_{i=0}^k S_{\alpha_i} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_i} X_\alpha$ такое, что $F \subset S \subset V$. Заметим, что $F \subset \text{Int } \bar{S} \subset \text{Int } \bar{V} = V$. Отметим, что

$$\text{Int } \bar{S} = \text{Int} \left(\overline{\prod_{i=0}^k S_{\alpha_i} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_i} X_\alpha} \right) = \text{Int} \left(\prod_{i=0}^k \overline{S_{\alpha_i}} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_i} X_\alpha \right) = \prod_{i=0}^k \text{Int } \overline{S_{\alpha_i}} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_i} X_\alpha$$

[7; § 16, с. 159–160]. Отсюда следует, что $F_{\alpha_0} \subset \text{Int } \bar{S}_{\alpha_0} \subset U_{\alpha_0}$. Таким образом, X_{α_0} – C_τ -полурегулярное пространство.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для того, чтобы тихоновское произведение $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ было C_τ -полурегулярным (c -полурегулярным, k -полурегулярным), необходимо и достаточно, чтобы каждое X_α было C_τ -полурегулярным (c -полурегулярным, k -полурегулярным).

СЛЕДСТВИЕ 2. Для того, чтобы тихоновское произведение $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ было CFC -пространством (FFC -пространством, неуплотняемым), необходимо и достаточно, чтобы каждое X_α было CFC -пространством (FFC -пространством, неуплотняемым).

Заметим, что идея, реализуемая в доказательстве теоремы 2, прилагается для доказательства следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть X – хаусдорфово пространство, B – компактное подмножество X , обладающее канонически-открытой базой (т.е. для любой окрестности $O(B)$ найдется канонически-открытая окрестность $V(B)$ множества B такая, что $B \subset V(B) \subset O(B)$) и A – компактное подмножество B . Тогда A также обладает канонически-открытой базой в пространстве X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть существует открытое множество U , где $A \subset U$, такое, что для любого открытого множества $V \supset A$ выполняется $\text{Int } \bar{V} \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$. Так как A и $B \setminus U$ – непересекающиеся компактные подмножества хаусдорфова пространства X , V можно выбрать таким, что $\bar{V} \cap (B \setminus U) = \emptyset$ и $V \subset U$.

Пусть $S = \bar{V} \setminus U$. Заметим, что $\text{Int } \bar{V} \cap S \neq \emptyset$, так как иначе $\text{Int } \bar{V} \subset U$. Также заметим, что $S \cap B = \emptyset$. Действительно, $S \subset \bar{V}$, а значит, в силу выбора V имеем $S \cap (B \setminus U) = \emptyset$, но S по определению не пересекается с U . Так как $B \subset (X \setminus S)$, по условию утверждения существует канонически-открытое множество W такое, что $B \subset W = \text{Int } \bar{W} \subset (X \setminus S)$. Определим множество $T = V \cap W$. Заметим, что T – открытое множество, содержащее A . Так как $T \subset W$, то $\text{Int } \bar{T} \subset \text{Int } \bar{W} = W$ отсюда $\text{Int } \bar{T} \cap S = \emptyset$. С другой стороны, $T \subset V$ и, значит, $\text{Int } \bar{T} \subset \text{Int } \bar{V} \subset \bar{V} \subset U \cup S$. Отсюда $\text{Int } \bar{T} \subset U$. Канонически-открытое множество $\text{Int } \bar{T}$ содержит компакт A и содержится в U . Получили противоречие.

4. Примеры. Приведем, для любого $n > 1$, пример C_nFC -пространства не являющегося $C_{n+1}FC$ -пространством, где $n \in \mathbb{N}$.

ПРИМЕР. Пусть W_1 – пространство всех ординалов $\leq \omega_1$ и W_0 – его подпространство, состоящее из всех ординалов $\leq \omega_0$. Пространство $X = W_1 \times W_0$. Возьмем прямую сумму $Y = \bigoplus_{i=1}^n X_i$, где пространства $X_i = X$. Базисными окрестностями точек $a_i = (\omega_1, \omega_0)$ в пространствах X_i будем полагать множества $U(a_i) = V(a_i) \setminus ((W_1 \setminus \{\omega_1\}) \times \{\omega_0\})$, где $V(a_i)$ – произвольная стандартная окрестность точки a_i в пространстве X_i . Факторизуем прямую сумму Y отождествляя при каждом $\alpha < \omega_1$ точки $\{b_i = (\alpha, \omega_0) : i \in 1, \dots, n\}$ в точку b^α .

Полученное пространство Z является C_nFC -пространством.

Действительно, пространство Z является H -замкнутым пространством, так как прямая сумма Y берется по конечному набору H -замкнутых пространств X_i . Взяв любое конечное множество K такое, что $|K| < n$, и любую окрестность $O(K)$, найдется канонически-открытая окрестность $V(K)$ такая, что $K \subset V(K) \subset O(K)$. Это следует из того, что любая точка из множества K обладает фундаментальной системой окрестностей из канонически-открытых множеств и того, что мощность K строго меньше n . Таким образом, пространство Z – C_n -полурегулярное пространство и, следовательно, по теореме 1 пространство Z является C_nFC -пространством.

Пусть $F = \{a_i\}_{i=1}^n$, где $a_i = (\omega_1, \omega_0)$ в пространствах X_i , и $O(F) = Z \setminus \{b^\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$. Тогда любая канонически-открытая окрестность компакта F содержит начиная с некоторого α точки b^α . Таким образом, Z не $C_{n+1}FC$ -пространство.

Заметим, что примером C_1FC -пространства не являющегося C_2FC -пространством, является любое H -замкнутое не полурегулярное пространство. Действительно, любое C_2FC -пространство – это неуплотняемое пространство, а значит, по теореме Катетова, полурегулярное пространство.

Пусть I отрезок $[0, 1]$ в естественной топологии. Дополнительно полагаем замкнутым множество $\{1/i : i \in \mathbb{N}\}$. Пространство I является H -замкнутым, но не полурегулярным пространством. Таким образом, пространство I является C_1FC -пространством, но не является C_2FC -пространством.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. F. Dickman, Jr., J. R. Porter, “Between minimal Hausdorff and compact Hausdorff spaces”, *Topology Proc.*, **9**:2 (1984), 243–268.
- [2] E. Pearl, *Problems from Topology Proceedings*, Topology Atlas, 2003.
- [3] А. А. Грызлов, *H-замкнутые пространства и свойства типа компактности*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, Свердловск, 1973.
- [4] L. M. Friedler, J. R. Porter, “Compactly functionally compact spaces”, *Houston J. Math.*, **22**:4 (1996), 775–785.
- [5] C. Chevalley, O. Frink, Jr., “Bicomcompactness of Cartesian products”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **47** (1941), 612–614.
- [6] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986.
- [7] К. Куратовский, *Топология*, Т. 1, Мир, М., 1966.

А. В. Осипов

Институт математики и механики УрО РАН,
г. Екатеринбург
E-mail: oab@list.ru

Поступило

19.05.2011

Исправленный вариант

29.02.2012