Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Неклюдов, Поведение решений нелинейного бигармонического уравнения в неограниченной области, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 2, 248–256

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9157>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 11:25:52

УДК 517.956.2

Поведение решений нелинейного бигармонического уравнения в неограниченной области

А. В. Неклюдов

На полуплоскости рассматриваются периодические по одной из переменных решения двумерного нелинейного бигармонического уравнения с экспоненциальной нелинейностью в правой части. Получены степенные и логарифмические асимптотики решений на бесконечности.

Библиография: 11 названий

DOI: 10.4213/mzm9157

Поведение в неограниченных областях решений полулинейных эллиптических уравнений второго порядка с экспоненциальной нелинейностью рассматривалось во многих работах, см. [1]–[9]. Как правило, при этом использовался принцип максимума, что не позволяло распространить полученные результаты на уравнения высших порядков. В [9] использовались только энергетические оценки решений типа принципа Сен-Венана [10], [11] и соотношения между средним значением решения и его “тепловым потоком”. В данной работе методы [9] применены к уравнению с двумерным бигармоническим оператором в линейной части уравнения и условиям периодичности решений по одной из переменных.

Пусть

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < +\infty, 0 < x_2 < 1\} \subset \mathbb{R}_x^2, \quad x = (x_1, x_2),$$
$$\Gamma = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < +\infty, x_2 = 0\} \cup \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < +\infty, x_2 = 1\}.$$

Будем рассматривать уравнение

$$\Delta^2 u = e^u, \tag{1}$$

где Δ – двумерный оператор Лапласа по x_1, x_2 .

Введем следующие обозначения:

$$\Omega(a, b) = \Omega \cap \{(x_1, x_2) : a < x_1 < b\}, \quad \Omega_t = \Omega(t, t+1),$$
$$\Gamma(a, b) = \Gamma \cap \{(x_1, x_2) : a < x_1 < b\},$$
$$S_t = \{(x_1, x_2) : x_1 = t, 0 < x_2 < 1\},$$

$$\nabla u = \text{grad } u,$$

$$E(u, v) = u_{x_1 x_1} v_{x_1 x_1} + 2u_{x_1 x_2} v_{x_1 x_2} + u_{x_2 x_2} v_{x_2 x_2}, \quad E(u) = E(u, u),$$

$$\bar{u}(t) = \int_{S_t} u \, dx_2, \quad \bar{u}_t = \int_{\Omega_t} u \, dx.$$

Будем рассматривать на полуплоскости $\mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0\}$ классические (т.е. $u \in C^4(\mathbb{R}_+^2)$) решения уравнения (1), периодические с периодом 1 по x_2 . Случай произвольного периода T легко сводится к 1-периодическому случаю линейным преобразованием координат и переходом к функции $U = u + \text{const}$.

Легко видеть, что для 1-периодических по x_2 решений при любом $t > 0$ выполнено интегральное тождество

$$\int_{\Omega(0,t)} E(u, v) \, dx = \int_{\Omega(0,t)} e^u v \, dx \quad (2)$$

для всех 1-периодических по x_2 функций $v \in C^4(\mathbb{R}_+^2)$ таких, что

$$v|_{S_0 \cup S_t} = 0, \quad v_{x_1}|_{S_0 \cup S_t} = 0.$$

Проинтегрировав уравнение (1) по области $\Omega(t_1, t_2)$, получим

$$\bar{u}'''(t_2) - \bar{u}'''(t_1) = \int_{\Omega(t_1, t_2)} e^u \, dx. \quad (3)$$

В дальнейшем через c_j будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от $k = 0, 1, 2, \dots$ и $t > 0$.

ТЕОРЕМА 1. Для любого 1-периодического по x_2 решения уравнения (1) в $\mathbb{R}_+^2$ справедливы следующие соотношения:

- 1) $\bar{u}'''(t) < 0$ при $t \geq 0$;
- 2) $\int_{\Omega} e^u \, dx < \infty$;
- 3) $\int_{\Omega_t} |u| \, dx \leq c_0 t^3$ при $t \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя выпуклость показательной функции, из (3) получим

$$\bar{u}^{(4)}(t) = \int_{S_t} e^u \, dx_2 \geq e^{\bar{u}(t)}. \quad (4)$$

Предположим, что для некоторого $t_0 \geq 0$ справедливо неравенство $\bar{u}'''(t) \geq p_0 \geq 0$. Тогда из (4) легко следует, что $\bar{u}(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow T_0 - 0$ для некоторого $T_0 > t_0$, что противоречит существованию решения $u(x)$ при $x_1 \geq 0$. Таким образом, справедливо утверждение 1) теоремы и в силу (3) утверждение 2). Тогда при $t \rightarrow \infty$ имеем:

$$\bar{u}'''(t) \rightarrow C \leq 0, \quad |\bar{u}(t)| \leq c_1 t^3,$$

$$\int_{\Omega_t} |u| \, dx = -\bar{u}_t + 2 \int_{\Omega_t^+} u \, dx \leq c_0 t^3,$$

где $\Omega_t^+ = \Omega_t \cap \{x : u(x) > 0\}$. Теорема полностью доказана.

ТЕОРЕМА 2. Любое 1-периодическое по x_2 решение уравнения (1) в $\mathbb{R}_+^2$ удовлетворяет одному из следующих условий:

1) $\bar{u}'''(t) \rightarrow C = \text{const} < 0$ при $t \rightarrow \infty$,

$$u = \sum_{k=0}^3 C_k x_1^{3-k} + O(e^{-\gamma x_1}) \quad \text{при } x_1 \rightarrow \infty,$$

$C_k = \text{const}$, $C_0 < 0$, $\gamma = \text{const} > 0$;

2) $\bar{u}'''(t) \rightarrow 0$, $\bar{u}''(t) \rightarrow C = \text{const} < 0$ при $t \rightarrow \infty$,

$$u = \sum_{k=1}^3 C_k x_1^{3-k} + O(e^{-\gamma x_1}) \quad \text{при } x_1 \rightarrow \infty,$$

$C_k = \text{const}$, $C_1 < 0$, $\gamma = \text{const} > 0$;

3) $\bar{u}'''(t) \rightarrow 0$, $\bar{u}''(t) \rightarrow 0$, $\bar{u}'(t) \rightarrow C = \text{const} \leq 0$, $\bar{u}(t) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим в $\mathbb{R}_+^2$ 1-периодическое по x_2 решение неоднородного линейного бигармонического уравнения

$$\Delta^2 V = e^u,$$

удовлетворяющее условиям

$$\int_{\Omega(0,t)} E(V) dx = o(t^3), \quad t \rightarrow \infty, \quad V(x) = o(x_1^3), \quad x_1 \rightarrow \infty.$$

Такое решение может быть построено стандартным образом [11] как предел 1-периодических по x_2 решений в ограниченных областях вида $\Omega(0, N)$.

С учетом п. 3) теоремы 1 для функции $w = u - V$ получаем, что при $t \geq 1$

$$\int_{\Omega_t} |w| dx_2 \leq c_1 t^3.$$

Тогда разложение в ряд Фурье по x_2 решения однородного бигармонического уравнения $w(x)$ имеет вид

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k x_1} ((a_k x_1 + b_k) \cos \lambda_k x_2 + (a'_k x_1 + b'_k) \sin \lambda_k x_2) + \sum_{k=0}^3 C_k x_1^{3-k},$$

где $\lambda_k = 2\pi k$, откуда с учетом оценки для $V(x)$ получаем

$$u(x) = C_0 x_1^3 + o(x_1^3), \quad x_1 \rightarrow \infty.$$

Из теоремы 1 очевидно, что $C_0 \leq 0$. Если $C_0 < 0$, то [11] функцию V можно построить так, что

$$\|V\|_{W_2^2(\Omega_t)} \leq c_2 e^{-\gamma t}, \quad \gamma = \text{const} > 0.$$

Тогда решение $u = w + V$, очевидно, имеет поведение 1).

Рассмотрим случай $C_0 = 0$. Так как $\bar{u}'''(t) < 0$, то существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{u}''(t) = K,$$

где с учетом теоремы 1 $-\infty \leq K \leq 0$. Пусть $-\infty \leq K < 0$. Тогда при $t \geq 1$ получаем $\bar{u}(t) \leq K_1 t^2$, $K_1 = \text{const} < 0$. Используя теорему вложения, неравенство Пуанкаре, оценки интегралов Дирихле и энергии для V и w , получим при $x \in \Omega_t$, что

$$|u - \bar{u}(t)|^2 \leq c_4 \|u - \bar{u}(t)\|_{W_2^2(\Omega_t)}^2 \leq c_5 \int_{\Omega_t} (|\nabla u|^2 + E(u)) dx = o(t^4),$$

$t \rightarrow \infty$, т.е. в Ω_t при $t \geq 1$ справедлива оценка $u(x) \leq K_2 t^2$, $K_2 < 0$. Тогда, как и выше, функцию $V(x)$ можно считать экспоненциально малой и для $u(x)$ имеет место поведение 2).

Пусть $K = 0$. Очевидно, что в этом случае $\bar{u}''(t) > 0$ и существует конечный предел $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{u}'(t) \leq 0$. Так как $\int_0^\infty e^{\bar{u}(t)} dt \leq \int_\Omega e^u dx < \infty$ и $\bar{u}(t)$ – монотонно убывающая функция, то $\bar{u}(t) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow \infty$, и имеет место поведение 3). Теорема 2 полностью доказана.

ЛЕММА 1. Пусть $u(x)$ – 1-периодическое по x_2 решение (1) в $\mathbb{R}_+^2$ такое, что

$$\bar{u}'''(t) \rightarrow 0, \quad \bar{u}''(t) \rightarrow 0, \quad \bar{u}'(t) \rightarrow C = \text{const} \leq 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$\int_{\Omega_k} E(u) dx \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим в $L_2(\Omega_k)$ функции

$$h_1 \equiv 1, \quad h_{2,k} = 12^{1/2} \left(x_1 - k - \frac{1}{2} \right).$$

Пусть

$$\hat{u}_k = \hat{u}_k(x_1) = (u, h_1)h_1 + (u, h_{2,k})h_{2,k}$$

– проекция в $L_2(\Omega_k)$ решения $u(x)$ на двумерное подпространство с ортонормированным базисом $\{h_1, h_{2,k}\}$, через $(\cdot, \cdot)$ обозначено скалярное произведение в $L_2(\Omega_k)$. Так как $(u, h_1) = \bar{u}_k$, $|(u, h_{2,k})| \leq c_1$, то

$$\hat{u}_k = \bar{u}_k + O(1), \quad k \rightarrow \infty,$$

(очевидно, что при $C = 0$ имеем $(u, h_{2,k}) = o(1)$, и в правой части $O(1)$ можно заменить на $o(1)$). Тогда

$$|\hat{u}_k| \leq c_2 k, \quad \hat{u}_k \rightarrow -\infty, \quad k \rightarrow \infty, \quad (5)$$

$$|(\hat{u}_k)_{x_1}| = 12^{1/2} |(u, h_{2,k})| \leq c_3. \quad (6)$$

Пусть $a, b, N \in \mathbb{N}$, $N \leq a < b$. Рассмотрим срезающую функцию $\Phi = \Phi(x_1)$, $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \Phi(x_1) &= 1 && \text{при } a \leq x_1 \leq b, \\ \Phi(x_1) &= 0 && \text{при } x_1 \leq a-1, \quad x_1 \geq b+1, \\ 0 \leq \Phi(x_1) &\leq 1 && \text{при } a-1 \leq x_1 \leq a, \quad b \leq x_1 \leq b+1. \end{aligned}$$

Полагая в интегральном тождестве (2) пробную функцию $v = u\Phi$, получим

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega(a,b)} E(u) dx &\leq - \int_{\Omega_{a-1} \cup \Omega_b} u_{x_1 x_1} (u\Phi'' + 2u_{x_1} \Phi') dx + \int_{\Omega(a-1, b+1)} e^u u \Phi dx \\
 &= - \int_{\Omega_{a-1}} u_{x_1 x_1} ((u - \hat{u}_{a-1})\Phi'' + 2(u - \hat{u}_{a-1})_{x_1} \Phi') dx \\
 &\quad - \int_{\Omega_b} u_{x_1 x_1} ((u - \hat{u}_b)\Phi'' + 2(u - \hat{u}_b)_{x_1} \Phi') dx \\
 &\quad - \int_{\Omega_{a-1}} u_{x_1 x_1} (\hat{u}_{a-1}\Phi'' + 2(\hat{u}_{a-1})_{x_1} \Phi') dx \\
 &\quad - \int_{\Omega_b} u_{x_1 x_1} (\hat{u}_b\Phi'' + 2(\hat{u}_b)_{x_1} \Phi') dx + \int_{\Omega(a-1, b+1)} e^u u \Phi dx \\
 &\equiv I_{1, a-1} + I_{1, b} + I_{2, a-1} + I_{2, b} + I_3.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Используя неравенство Пуанкаре вида $\|U\|_{W_2^2(\Omega_k)}^2 \leq c_0 \int_{\Omega_k} E(U) dx$ для функций, ортогональных h_1 и $h_{2,k}$ в $L_2(\Omega_k)$, получим для первых двух интегралов в правой части (7), что

$$I_{1, a-1} + I_{1, b} \leq c_4 \int_{\Omega_{a-1} \cup \Omega_b} E(u) dx. \tag{8}$$

Так как $\bar{u}''(t)$ монотонно стремится к 0 и $\bar{u}'(t) \rightarrow C = \text{const}$ при $t \rightarrow \infty$, то $\bar{u}''(t) = o(t^{-1})$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда с учетом (5) и (6) получим, что

$$I_{2, i} \equiv \int_{\Omega_i} u_{x_1 x_1} (\hat{u}_i \Phi'' + 2(\hat{u}_i)_{x_1} \Phi') dx = o(1), \quad i \rightarrow \infty. \tag{9}$$

Оценим последний интеграл I_3 в правой части (7). В силу (5) $\hat{u}_j < 0$ при $j \geq j_0$, тогда, используя теорему вложения и неравенство Пуанкаре, получим, что

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_j} e^u u \Phi dx &= \int_{\Omega_j} e^u \hat{u}_j \Phi dx + \int_{\Omega_j} e^u (u - \hat{u}_j) \Phi dx \\
 &\leq \sup_{\Omega_j} |u - \hat{u}_j| \int_{\Omega_j} e^u dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega_j} E(u) dx + c_5 \left(\int_{\Omega_j} e^u dx \right)^2.
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$I_3 \equiv \int_{\Omega(a-1, b+1)} e^u u \Phi dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega(a-1, b+1)} E(u) dx + o(1), \quad a \rightarrow \infty. \tag{10}$$

Из (7)–(10) получаем

$$\int_{\Omega(a,b)} E(u) dx \leq c_6 \int_{\Omega_{a-1} \cup \Omega_b} E(u) dx + o(1), \quad a \rightarrow \infty,$$

откуда

$$\int_{\Omega(a,b)} E(u) dx \leq e^{-A} \int_{\Omega(a-1, b+1)} E(u) dx + o(1), \quad a \rightarrow \infty,$$

где $e^{-A} = c_6(c_6 + 1)^{-1} < 1$. Последовательно применяя последнее неравенство, получим

$$\int_{\Omega_k} E(u) dx \leq e^{-A(k-1)/2} \int_{\Omega(k/2, 3k/2+1)} E(u) dx + o(1), \quad k \rightarrow \infty.$$

Учитывая степенную оценку интеграла энергии, получим утверждение леммы 1.

ТЕОРЕМА 3. Пусть 1-периодическое по x_2 решение уравнения (1) в $\mathbb{R}_+^2$ удовлетворяет условиям

$$\bar{u}'''(t) \rightarrow 0, \quad \bar{u}''(t) \rightarrow 0, \quad \bar{u}'(t) \rightarrow C = \text{const} < 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$u(x) = Cx_1 + c + O(e^{-\gamma x_1}), \quad x_1 \rightarrow \infty,$$

$c = \text{const}$, $\gamma = \text{const} > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как показано в доказательстве леммы 1, в Ω_k справедливо соотношение $\hat{u}_k(x) = \bar{u}_k + O(1)$, $k \rightarrow \infty$. Отсюда при $x \in \Omega_k$ из теоремы вложения и неравенства Пуанкаре имеем

$$|u(x) - \bar{u}_k| \leq |u(x) - \hat{u}_k| + O(1) \leq c_1 \left(\int_{\Omega_k} E(u) dx \right)^{1/2} + O(1), \quad k \rightarrow \infty.$$

Учитывая лемму 1, получаем, что $u(x) \sim Cx_1$, $x_1 \rightarrow \infty$. Тогда функцию V в доказательстве теоремы 2 можно снова выбрать экспоненциально малой и теорема, таким образом, доказана.

ЛЕММА 2. Не существует 1-периодического по x_2 решения уравнения (1) в $\mathbb{R}_+^2$, удовлетворяющего условиям леммы 1 при $C = 0$ и либо для всех $t > t_0 = \text{const} > 0$ условию

$$\bar{u}(t) < -4 \ln t + K_0, \quad (11)$$

где $K_0 = \text{const} < \ln 24$, либо для всех $t > t_0 = \text{const} > 0$ условию

$$\bar{u}(t) > -4 \ln t + K'_0, \quad (12)$$

где $K'_0 = \text{const} > \ln 24$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть существует решение, удовлетворяющее (11). Оценивая, как и в доказательстве леммы 1, отклонение $u(x)$ от $\hat{u}_t$ в области Ω_t через интеграл энергии и учитывая, что $\bar{u}(t) - \hat{u}_t = o(1)$, $t \rightarrow \infty$, получим при $t \geq t_1$, $x \in \Omega_t$ оценку $e^{u(x)} < K_1 t^{-4}$, $K_1 = \text{const} < 24$. Тогда

$$\bar{u}^{(4)}(t) = \int_{S_t} e^u dx_2 \leq K_1 t^{-4}.$$

Трижды интегрируя это неравенство от t до ∞ , получим, что $\bar{u}'(t) > -K_1 t^{-1}/6$, что противоречит (11).

Аналогично для решения, удовлетворяющего (12), получим при $t \geq t_1$ оценку $\bar{u}'(t) < -K'_1 t^{-1}/6$, $K'_1 = \text{const} > 24$, что противоречит (12). Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $u(x)$ – 1-периодическое по x_2 решение уравнения (1) в $\mathbb{R}_+^2$, удовлетворяющее условиям леммы 1 при $C = 0$. Пусть для некоторых $a, b > 0$, $a_0 < a < b$, выполнены условия

$$\bar{u}(a) = -4 \ln a + N, \quad \bar{u}(b) = -4 \ln b + N, \quad \bar{u}(t) > -4 \ln t + N \quad \text{при } a < t < b,$$

где N – некоторая постоянная, не зависящая от решения $u(x)$. Тогда при $a < t < b$ справедливо неравенство

$$\bar{u}(t) < -4 \ln t + N', \quad N' = \text{const}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $\varepsilon > 0$, $a \geq a_0(\varepsilon)$ в $\Omega(a, b)$ выполнено неравенство

$$e^{u(x)} > N_1 x_1^{-4}, \quad N_1 = e^{N-\varepsilon}. \quad (13)$$

Предположим, что $b \geq 2a$. Пусть $h = (b-a)/4$, тогда при $a \leq t \leq a+3h = (3b+a)/4$ справедливо неравенство $(t+h)/t \geq 4b/(3b+a) \geq 8/7$. Интегрируя неравенство (13) по $\Omega(t, t+h)$, $a \leq t \leq a+3h$, получим из (3)

$$\bar{u}'''(t+h) - \bar{u}'''(t) > c_1 N_1 t^{-3}.$$

Интегрируя по t от $\sigma \in (a, a+2h)$ до $\sigma+h$, получим

$$\bar{u}''(\sigma+2h) - 2\bar{u}''(\sigma+h) + \bar{u}''(\sigma) > c_2 N_1 \sigma^{-2}.$$

Интегрируя по σ от $\xi \in (a, a+h)$ до $\xi+h$, получаем

$$\bar{u}'(\xi+3h) - 3\bar{u}'(\xi+2h) + 3\bar{u}'(\xi+h) - \bar{u}'(\xi) > c_3 N_1 \xi^{-1}.$$

Наконец, интегрируя по ξ от a до $a+h$, получаем

$$\bar{u}(b) = \bar{u}(a+4h) > 4\bar{u}(a+3h) - 6\bar{u}(a+2h) + 4\bar{u}(a+h) - \bar{u}(a) + c_3 N_1 \ln\left(\frac{a+h}{a}\right).$$

Так как $\bar{u}(t)$ – выпуклая функция, то $\bar{u}(a+3h) + \bar{u}(a+h) > 2\bar{u}(a+2h)$. Тогда из предыдущего неравенства следует, что

$$\begin{aligned} \bar{u}(b) &> 2\bar{u}(a+2h) - \bar{u}(a) + c_3 N_1 \ln\left(\frac{a+h}{a}\right) > 2\bar{u}(b) - \bar{u}(a) + c_3 N_1 \ln\left(\frac{a+h}{a}\right) \\ &= -8 \ln b + 4 \ln a + N + c_3 N_1 \ln\left(\frac{3a+b}{4a}\right) \\ &> -4 \ln b + N + (c_3 N_1 - 4) \ln\left(\frac{b}{a}\right) - c_3 N_1 \ln 4 > \bar{u}(b) + c_3 N_1 \left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \ln 4\right), \end{aligned}$$

последнее неравенство справедливо при $c_3 N_1 > 8$. Таким образом, при $b/a > 16$ получаем противоречие. Итак, если N достаточно велико, то $b \leq 16a$. Отсюда при $a < t < b$

$$\bar{u}(t) < \bar{u}(a) = -4 \ln a + N < -4 \ln t + N + 4 \ln 16,$$

и лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $u(x)$ – 1-периодическое по x_2 решение уравнения (1) в $\mathbb{R}_+^2$, удовлетворяющее условиям леммы 1 при $C = 0$. Пусть для некоторых $a, b > 0$, $a_0 < a < b$, выполнены условия

$$\bar{u}(a) = -4 \ln a + M, \quad \bar{u}(b) = -4 \ln b + M, \quad \bar{u}(t) < -4 \ln t + M \quad \text{при } a < t < b,$$

где M – некоторая постоянная, не зависящая от решения $u(x)$. Тогда при $a < t < b$ справедливо неравенство

$$\bar{u}(t) > -4 \ln t + M', \quad M' = \text{const}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведя оценки, аналогичные доказательству леммы 3, получим при $\varepsilon > 0$, $a \geq a_0(\varepsilon)$

$$\bar{u}(b) = \bar{u}(a + 4h) < 4\bar{u}(a + 3h) - 6\bar{u}(a + 2h) + 4\bar{u}(a + h) - \bar{u}(a) + c_1 M_1 \ln \left(\frac{a + h}{a} \right),$$

где $h = (b - a)/4$, $M_1 = e^{M+\varepsilon}$. Отсюда, учитывая, что $\bar{u}(a + 2h) > \bar{u}(b) = -4 \ln b + M$, получим

$$\begin{aligned} -28 \ln b + 7M = 7\bar{u}(b) &< 4\bar{u}(a + 3h) + 4\bar{u}(a + h) - \bar{u}(a) + c_1 M_1 \ln \left(\frac{3a + b}{4a} \right) \\ &< 8\bar{u}(a + h) - \bar{u}(a) + c_1 M_1 \ln \left(\frac{b}{a} \right) \\ &< -32 \ln \left(\frac{3a + b}{4} \right) + 7M + 4 \ln a + c_1 M_1 \ln \left(\frac{b}{a} \right) \\ &< -32 \ln \left(\frac{b}{4} \right) + 7M + 4 \ln a + c_1 M_1 \ln \left(\frac{b}{a} \right). \end{aligned}$$

Отсюда при $c_1 M_1 \leq 1$ получим $\ln b < \ln a + 32(\ln 4)/3$. Тогда при $a < t < b$ имеем

$$\bar{u}(t) > \bar{u}(b) = -4 \ln b + M > -4 \ln t + M - \frac{128}{3} \ln 4,$$

и лемма доказана.

Окончательный результат, касающийся поведения периодических по x_2 решений уравнения (1), состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 4. Любое определенное на полуплоскости $\mathbb{R}_+^2$ 1-периодическое по x_2 решение уравнения (1) ведет себя одним из следующих способов:

либо

$$u = \sum_{k=0}^3 C_k x_1^{3-k} + O(e^{-\gamma x_1}), \quad x_1 \rightarrow \infty, \quad (14)$$

$C_k = \text{const}$, $\gamma = \text{const} > 0$, где хотя бы один из коэффициентов C_0, C_1, C_2 отличен от нуля, причем старший из отличных от нуля коэффициентов отрицателен;

либо

$$u = -4 \ln x_1 + O(1), \quad x_1 \rightarrow \infty. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При выполнении условия $\bar{u}'(t) \rightarrow C$, $t \rightarrow \infty$, $-\infty \leq C < 0$, для решения в силу теорем 2 и 3 имеет место (14). В оставшемся случае $\bar{u}'(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, поведение (15) следует непосредственно из лемм 2–4 и оценки $u(x) - \bar{u}(t) = o(1)$, $x \in \Omega_t$, $t \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. Н. Векуа, “О некоторых свойствах решений уравнения Гаусса”, Сборник статей. Посвящается академику Ивану Матвеевичу Виноградову к его семидесятилетию, Тр. МИАН СССР, **64**, Изд-во АН СССР, М., 1961, 5–8.
- [2] О. А. Олейник, “Об уравнении $\Delta u + k(x)e^u = 0$ ”, *УМН*, **33**:2 (1978), 203–204.
- [3] И. Каметака, О. А. Олейник, “Об асимптотических свойствах и необходимых условиях существования решений нелинейных эллиптических уравнений второго порядка”, *Матем. сб.*, **107**:4 (1978), 572–600.
- [4] J. N. Flavin, R. J. Knops, L. E. Payne, “Asymptotic behavior of solutions to semi-linear elliptic equations on the half-cylinder”, *Z. Angew. Math. Phys.*, **43**:3 (1992), 405–421.
- [5] В. А. Кондратьев, О. А. Олейник, “Об асимптотике решений нелинейных эллиптических уравнений”, *УМН*, **48**:4 (1993), 184–185.
- [6] О. А. Oleinik, *Some Asymptotic Problems in the Theory of Partial Differential Equations*, Lezioni Lincee, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.
- [7] А. И. Насруллаев, “Об асимптотике решений задачи Неймана для уравнения $\Delta u - e^u = 0$ в полубесконечном цилиндре”, *УМН*, **50**:3 (1995), 161–162.
- [8] А. И. Насруллаев, “Об одном классе нелинейных уравнений в неограниченных областях”, *УМН*, **51**:5 (1996), 160–161.
- [9] А. В. Неклюдов, “Поведение решений полулинейного эллиптического уравнения второго порядка вида $Lu = e^u$ в бесконечном цилиндре”, *Матем. заметки*, **85**:3 (2009), 408–420.
- [10] О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, “О поведении на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с некомпактной границей”, *Матем. сб.*, **112**:4 (1980), 588–610.
- [11] А. В. Неклюдов, “О задаче Неймана для дивергентных эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченной области, близкой к цилиндру”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **16** (1991), 191–217.

А. В. Неклюдов

Московский государственный технический
университет им. Н. Э. Баумана

E-mail: nek15@yandex.ru

Поступило

13.05.2011