Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. С. Маканин, Параметризация решений уравнения $x_1x_2\dots x_{n-1}x_n = x_nx_{n-1}\dots x_2x_1$ в свободном моноиде, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 6, 879–884

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9158>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 05:37:43

Параметризация решений уравнения

$x_1x_2 \dots x_{n-1}x_n = x_nx_{n-1} \dots x_2x_1$ в свободном моноиде

Г. С. Маканин

Вводится параметризующая функция Sm. Параметризующая функция – это рекурсивная функция, зависящая от словарных переменных, натуральных переменных и переменных, значениями которых являются конечные последовательности натуральных переменных. С помощью функции Sm конструируются формулы, которые выписывают все решения уравнения

$$x_1x_2 \dots x_{n-1}x_n = x_nx_{n-1} \dots x_2x_1$$

в свободном моноиде $\langle a_1, a_2, \dots, a_\omega \rangle$ и только их.

Библиография: 11 названий.

Параметризовать решения уравнения в свободном моноиде – это значит выписать общее решение (множество всех решений) уравнения при помощи конечного числа формул, зависящих от параметров.

В работах [1]–[11] построена некоторая библиотека параметризующих функций, используя которые можно указать конечные формулы, описывающие множество решений разных типов уравнений и классов уравнений в свободном моноиде и в свободной группе.

В настоящей работе мы построим параметризующую функцию Sm, используя которую выпишем параметризацию симметрического уравнения $x_1x_2 \dots x_{n-1}x_n = x_nx_{n-1} \dots x_2x_1$ в свободном моноиде.

Следующие два предложения хорошо известны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Общее решение уравнения*

$$x_1x_2 = x_2x_1$$

в свободном моноиде $\langle a_1, a_2, \dots, a_\omega \rangle$ описывается преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\alpha, \\ x_2 \rightarrow x_1^\beta, \end{cases}$$

где α, β – натуральные параметры.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Общее решение уравнения*

$$x_1x_2x_3 = x_3x_2x_1$$

в свободном моноиде $\langle a_1, a_2, \dots, a_\omega \rangle$ описывается преобразованиями

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\alpha, \\ x_2 \rightarrow x_1^\beta, \\ x_3 \rightarrow x_1^\gamma, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \rightarrow (x_1 x_2)^\alpha x_1, \\ x_2 \rightarrow x_2 (x_1 x_2)^\beta, \\ x_3 \rightarrow (x_1 x_2)^\gamma x_1, \end{cases}$$

где α, β, γ – натуральные параметры.

Дадим индуктивное определение функции

$$\text{Sm}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s}_i, \quad \text{где } i = 1, \dots, n,$$

$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ – словарные переменные; $s \geq 0$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ – последовательность натуральных переменных. Функция $\text{Sm}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s}_i$ определяется так:

- при $s = 0$ – условием $\text{Sm}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)_i = 1$, $i = 1, \dots, n$;
- при $s = 1$ – условием $\text{Sm}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)_i^\lambda = x_i^\lambda$, $i = 1, \dots, n$;
- при $s > 1$ – дизъюнкцией следующих трех рекурсий.

Рекурсия 1:

$$\begin{aligned} \text{Sm}(x_1, \dots, x_n)^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s}_1 &= (\text{Sm}(x_1, \dots, x_n)^{\lambda_2, \dots, \lambda_s}_2 \cdot \text{Sm}(x_1, \dots, x_n)^{\lambda_2, \dots, \lambda_s}_1)^{\lambda_1+1} \\ &\quad \times \text{Sm}(x_1, \dots, x_n)^{\lambda_2, \dots, \lambda_s}_2, \\ \text{Sm}(x_1, \dots, x_n)^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s}_p &= \text{Sm}(x_1, \dots, x_n)^{\lambda_2, \dots, \lambda_s}_{p+1}, \quad p = 2, \dots, n-1, \\ \text{Sm}(x_1, \dots, x_n)^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s}_n &= (\text{Sm}(x_1, \dots, x_n)^{\lambda_2, \dots, \lambda_s}_2 \cdot \text{Sm}(x_1, \dots, x_n)^{\lambda_2, \dots, \lambda_s}_1)^{\lambda_1} \\ &\quad \times \text{Sm}(x_1, \dots, x_n)^{\lambda_2, \dots, \lambda_s}_2. \end{aligned}$$

Рекурсия 2:

$$\begin{aligned} \text{Sm}(x_1, \dots, x_n)^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s}_1 &= (\text{Sm}(x_1, \dots, x_n)^{\lambda_2, \dots, \lambda_s}_{n-1} \cdot \text{Sm}(x_1, \dots, x_n)^{\lambda_2, \dots, \lambda_s}_n)^{\lambda_1+1} \\ &\quad \times \text{Sm}(x_1, \dots, x_n)^{\lambda_2, \dots, \lambda_s}_{n-1}, \\ \text{Sm}(x_1, \dots, x_n)^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s}_p &= \text{Sm}(x_1, \dots, x_n)^{\lambda_2, \dots, \lambda_s}_{p-1}, \quad p = 2, \dots, n-1, \\ \text{Sm}(x_1, \dots, x_n)^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s}_n &= (\text{Sm}(x_1, \dots, x_n)^{\lambda_2, \dots, \lambda_s}_{n-1} \cdot \text{Sm}(x_1, \dots, x_n)^{\lambda_2, \dots, \lambda_s}_n)^{\lambda_1} \\ &\quad \times \text{Sm}(x_1, \dots, x_n)^{\lambda_2, \dots, \lambda_s}_{n-1}. \end{aligned}$$

Рекурсия 3:

$$\begin{aligned} \text{Sm}(x_1, \dots, x_n)^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s}_1 &= x_{n-1}, \\ \text{Sm}(x_1, \dots, x_n)^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s}_p &= \text{Sm}(x_1, \dots, x_{n-2})^{\lambda_2, \dots, \lambda_s}_{p-1}, \quad p = 2, \dots, n-1, \\ \text{Sm}(x_1, \dots, x_n)^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s}_n &= x_{n-1}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 1. Пусть уравнение $x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n = x_n x_{n-1} \dots x_2 x_1$ имеет решение $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n$. Если $\partial(X_1) > \partial(X_n) > 0$, то найдутся слова $X'_1, X'_2, \dots, X'_{n-1}, X'_n$ и натуральное число r такие, что

$$X_1 = (X'_2 X'_1)^{r+1} X'_2, \quad X_p = X'_{p+1}, \quad p = 2, \dots, n-1, \quad X_n = (X'_2 X'_1)^r X'_2$$

и при этом

$$X'_1 X'_2 \dots X'_{n-1} X'_n = X'_n X'_{n-1} \dots X'_2 X'_1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непустое X_n есть истинное начало X_1 и истинный конец X_1 , т.е. существуют непустые слова P, Q такие, что $X_1 = X_nP, X_1 = QX_n$. Из равенства $X_nP = QX_n$ следует, что существует натуральное число r и слово A с условием $\partial A < \partial Q$ такие, что $X_n = Q^r A$. Следовательно, $AP = QA$. Следовательно, существует B такое, что $P = BA, Q = AB$. Следовательно, $X_n = (AB)^r A, X_1 = (AB)^{r+1} A$. Подставив значения X_n и X_1 в равенство $X_1X_2 \dots X_{n-1}X_n = X_nX_{n-1} \dots X_2X_1$ и сократив слева и справа на $(AB)^r A$, получаем равенство

$$BAX_2 \dots X_{n-1} = X_{n-1} \dots X_2AB.$$

После переобозначений

$$B \rightarrow X'_1, \quad A \rightarrow X'_2, \quad X_p \rightarrow X'_{p+1}, \quad p = 2, \dots, n-1,$$

получаем равенство

$$X'_1X'_2 \dots X'_{n-1}X'_n = X'_nX'_{n-1} \dots X'_2X'_1.$$

ЛЕММА 2. Пусть уравнение $x_1x_2 \dots x_{n-1}x_n = x_nx_{n-1} \dots x_2x_1$ имеет решение $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n$. Если $\partial(X_n) > \partial(X_1) > 0$, то найдутся слова $X'_1, X'_2, \dots, X'_{n-1}, X'_n$ и натуральное число r такие, что

$$X_1 = (X'_{n-1}X'_n)^r X'_{n-1}, \quad X_p = X'_{p-1}, \quad p = 2, \dots, n-1, \\ X_n = (X'_{n-1}X'_n)^{r+1} X'_{n-1}$$

и при этом

$$X'_1X'_2 \dots X'_{n-1}X'_n = X'_nX'_{n-1} \dots X'_2X'_1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непустое X_n есть истинное начало X_1 и истинный конец X_1 , т.е. существуют непустые слова P, Q такие, что $X_n = X_1P, X_n = QX_1$. Из равенства $X_1P = QX_1$ следует, что существует натуральное число r и слово A с условием $\partial A < \partial Q$ такие, что $X_1 = Q^r A$. Следовательно, $AP = QA$. Следовательно, существует B такое, что $P = BA, Q = AB$. Следовательно, $X_1 = (AB)^{r+1} A, X_n = (AB)^r A$. Подставив значения X_n и X_1 в равенство $X_1X_2 \dots X_{n-1}X_n = X_nX_{n-1} \dots X_2X_1$ и сократив слева и справа на $(AB)^r A$, получаем равенство

$$BAX_{n-1} \dots X_2 = X_{n-1} \dots X_2AB.$$

После переобозначений

$$B \rightarrow X'_n, \quad A \rightarrow X'_{n-1}, \quad X_p \rightarrow X'_{p+1}, \quad p = 2, \dots, n-1,$$

получаем равенство

$$X'_1X'_2 \dots X'_{n-1}X'_n = X'_nX'_{n-1} \dots X'_2X'_1.$$

ЛЕММА 3. Пусть уравнение $x_1x_2 \dots x_{n-1}x_n = x_nx_{n-1} \dots x_2x_1$ имеет решение $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n$. Если $\partial(X_n) = \partial(X_1) > 0$, то найдутся слова $X'_1, X'_2, \dots, X'_{n-2}$ такие, что

$$X_p = X'_{p-1}, \quad p = 2, \dots, n-1,$$

и при этом

$$X'_1X'_2 \dots X'_{n-2} = X'_{n-2} \dots X'_2X'_1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В равенстве $X_1 X_2 \dots X_{n-1} X_n = X_n X_{n-1} \dots X_2 X_1$ сократим компоненты X_1 и X_n слева и справа. После переобозначений $X_p \rightarrow X'_{p-1}$, $p = 2, \dots, n-1$, получаем равенство $X'_1 X'_2 \dots X'_{n-2} = X'_{n-2} \dots X'_2 X'_1$.

ТЕОРЕМА 1. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n = x_n x_{n-1} \dots x_2 x_1$$

в свободном моноиде $\langle a_1, a_2, \dots, a_\omega \rangle$ описывается преобразованием

$$x_i \rightarrow \text{Sm}(x_1, \dots, x_n)_i^\zeta, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $x_1, \dots, x_n$ – словарные переменные, ζ – переменная, значениями которой являются произвольные последовательности натуральных переменных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть уравнение $x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n = x_n x_{n-1} \dots x_2 x_1$ имеет решение $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n$. Докажем, что компоненты $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n$ равны (соответственно) выражениям $\text{Sm}(x'_1, \dots, x'_n)_1^\zeta, \dots, \text{Sm}(x'_1, \dots, x'_n)_n^\zeta$ при некоторых значениях словарных переменных $x'_1, \dots, x'_n$ и переменной ζ .

Доказательство проведем индукцией по n и внутренней индукцией по параметру $d = \partial(X_1 X_2 \dots X_{n-1} X_n)$.

Если некоторая компонента X_α есть пустое слово, то по индуктивному предположению каждая компонента X_i , $i = 1, \dots, \alpha - 1, \alpha + 1, \dots, n$, равна выражению $\text{Sm}(x'_1, \dots, x'_n)_i^\zeta$ при некоторых значениях переменных $x'_1, \dots, x'_n, \zeta$. Компонента X_α равна $\text{Sm}(x'_1, \dots, x'_n)_\alpha = 1$.

Пусть все компоненты решения $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n$ уравнения $x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n = x_n x_{n-1} \dots x_2 x_1$ не пустые.

Возможны три случая:

- 1) $\partial(X_1) > \partial(X_n) > 0$;
- 2) $\partial(X_n) > \partial(X_1) > 0$;
- 3) $\partial(X_1) = \partial(X_n) > 0$.

Случай 1. Согласно лемме 1 существует решение $X'_1, X'_2, \dots, X'_{n-1}, X'_n$ уравнения $x'_1 \dots x'_n = x'_n \dots x'_1$ и число r такие, что

$$X_1 = (X'_2, X'_1)^{r+1} X'_2, \quad X_p = X'_{p+1}, \quad p = 2, \dots, n-1, \quad X_n = (X'_2, X'_1)^r X'_2, \\ \partial(X'_1 X'_2 \dots X'_{n-1} X'_n) < d.$$

По предположению внутренней индукции каждая компонента X'_i , $i = 1, \dots, n$, равна выражению $\text{Sm}(x'_1, \dots, x'_n)_i^{\zeta'}$ при некоторых значениях $x'_1, \dots, x'_n, \zeta'$. Используя рекурсию первого дизъюнктивного члена определения функции Sm , получим, что каждая компонента X_i решения $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n$ равна $\text{Sm}(x_1, \dots, x_n)_i^\zeta$ при некоторых значениях $x_1, \dots, x_n, \zeta$.

Случай 2. Согласно лемме 2 существует решение $X'_1, X'_2, \dots, X'_{n-1}, X'_n$ уравнения $x'_1 \dots x'_n = x'_n \dots x'_1$ и число r такие, что

$$X_1 = (X'_{n-1} X'_n)^r X'_{n-1}, \quad X_p = X'_{p-1}, \quad p = 2, \dots, n-1, \\ X_n = (X'_{n-1} X'_n)^{r+1} X'_{n-1}, \\ \partial(X'_1 X'_2 \dots X'_{n-1} X'_n) < d.$$

По предположению внутренней индукции каждая компонента X'_i , $i = 1, \dots, n$, равна выражению $\text{Sm}(x'_1, \dots, x'_n)_i^{\zeta'}$ при некоторых значениях $x'_1, \dots, x'_n, \zeta'$. Используя рекурсию первого дизъюнктивного члена определения функции Sm , получим, что каждая компонента X_i решения $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n$ равна $\text{Sm}(x_1, \dots, x_n)_i^{\zeta}$ при некоторых значениях $x_1, \dots, x_n, \zeta$.

Случай 3. Согласно лемме 3 существует решение $X'_1, X'_2, \dots, X'_{n-2}, X'_{n-1}$ уравнения $x'_1 \dots x'_{n-2} = x'_{n-2} \dots x'_1$ такое, что

$$X_1 = X_n = X'_{n-1}, \quad \partial(X'_1 X'_2 \dots X'_{n-2}) < d.$$

По предположению внутренней индукции каждая компонента X'_i , $i = 1, \dots, n-1$, равна $\text{Sm}(x'_1, \dots, x'_n)_i^{\zeta'}$ при некоторых значениях $x'_1, \dots, x'_{n-1}, \zeta'$. Используя рекурсию третьего дизъюнктивного члена определения функции Sm , получим, что каждая компонента X_i решения $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n$ равна выражению $\text{Sm}(x'_1, \dots, x'_n)_i^{\zeta}$ при некоторых значениях $x'_1, \dots, x'_n, \zeta$.

Обратно: докажем теперь, что если выполнены условия на компоненты списка слов, то этот список удовлетворяет указанному уравнению.

Итак, пусть каждая компонента X_i списка слов $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n$ равна соответственно выражению $\text{Sm}(x'_1, \dots, x'_n)_i^{\zeta}$, $i = 1, 2, \dots, n$, для некоторых значений словарных переменных $x'_1, \dots, x'_n$ и некоторых числовых значений $\Lambda_1, \dots, \Lambda_s$ переменной $\zeta = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$.

Докажем, что уравнение $x_1x_2 \dots x_{n-1}x_n = x_nx_{n-1} \dots x_2x_1$ имеет решение $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n$.

Если некоторая компонента X_α есть пустое слово, то по индуктивному предположению уравнение $x_1 \dots x_{\alpha-1}x_{\alpha+1} \dots x_n = x_n \dots x_{\alpha+1} \dots x_{\alpha-1}x_1$ имеет решение $X_1, \dots, X_{\alpha-1}, X_{\alpha+1}, \dots, X_n = X_n, \dots, X_{\alpha+1}, \dots, X_{\alpha-1}, X_1$.

Следовательно, список слов $X_1, \dots, X_{\alpha-1}, 1, X_{\alpha+1}, \dots, X_n$ есть решение уравнения $x_1x_2 \dots x_{n-1}x_n = x_nx_{n-1} \dots x_2x_1$.

Пусть все компоненты списка слов $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n$ не пустые.

Возможны три случая.

Случай 1: $\partial(X_1) > \partial(X_n) > 0$. Тогда по рекурсии 1 существуют слова $X'_1, X'_2, \dots, X'_{n-1}, X'_n$ и натуральное число r такие, что

$$X_1 = (X'_2, X'_1)^{r+1} X'_2, \quad X_p = X'_{p+1}, \quad p = 2, \dots, n-1, \quad X_n = (X'_2, X'_1)^r X'_2$$

и по внутреннему индуктивному предположению

$$X'_1 X'_2 \dots X'_{n-1} X'_n = X'_n X'_{n-1} \dots X'_2 X'_1.$$

К левой и правой части равенства припишем слева и справа слово $(X'_2, X'_1)^r X'_2$. Получаем равенство

$$X_1 X_2 \dots X_{n-1} X_n = X_n X_{n-1} \dots X_2 X_1.$$

Случай 2: $\partial(X_n) > \partial(X_1) > 0$. Тогда по рекурсии 2 существуют слова $X'_1, X'_2, \dots, X'_{n-1}, X'_n$ и натуральное число r такие, что

$$X_1 = (X'_{n-1}, X'_n)^{r+1} X'_{n-1}, \quad X_p = X'_{p+1}, \quad p = 2, \dots, n-1, \\ X_n = (X'_{n-1}, X'_n)^r X'_{n-1},$$

и по внутреннему индуктивному предположению

$$X'_1 X'_2 \dots X'_{n-1} X'_n = X'_n X'_{n-1} \dots X'_2 X'_1.$$

К левой и правой части равенства припишем слева и справа слово $(X'_2, X'_n)^r X'_{n-1}$. Получаем равенство

$$X_1 X_2 \dots X_{n-1} X_n = X_n X_{n-1} \dots X_2 X_1.$$

Случай 3: $\partial(X_1) = \partial(X_n) > 0$. Тогда по рекурсии 3 существуют слова $X'_1, X'_2, \dots, X'_{n-2}$ такие, что

$$X_1 = X_n, \quad X_p = X'_{p+1}, \quad p = 2, \dots, n-1,$$

и по индуктивному предположению

$$X'_1 X'_2 \dots X'_{n-2} = X'_{n-2} \dots X'_2 X'_1.$$

Получаем равенство

$$X_1 X_2 \dots X_{n-1} X_n = X_n X_{n-1} \dots X_2 X_1.$$

Во всех трех случаях список слов $X_1, \dots, X_n$ является решением уравнения

$$x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n = x_n x_{n-1} \dots x_2 x_1.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. S. Makanin, "On general solution of equations in a free semigroup", *Word Equations and Related Topics* (Rouen, 1991), Lecture Notes in Comput. Sci., **677**, Springer-Verlag, Berlin, 1993, 1–5.
- [2] G. S. Makanin, H. Abdulrab, M. N. Maksimenko, "Formal parametric equations" (Dresden, 1995), *Lecture Notes in Comput. Sci.*, **965** (1995), 353–362.
- [3] G. S. Makanin, "Multiplication of natural number parameters and equations in a free semigroup", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **348**:12 (1996), 4813–4824.
- [4] G. S. Makanin, H. Abdulrab, P. Goralcik, "Functions for the general solution of parametric word equations", *Logical Foundations of Computer Science* (Yaroslavl, 1997), Lecture Notes in Comput. Sci., **1234**, Springer-Verlag, Berlin, 1997, 189–202.
- [5] G. S. Makanin, T. A. Makanina, "Functions for parametrization of solutions of an equation in a free monoid", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **352**:1 (2000), 1–54.
- [6] Г. С. Маканин, Т. А. Маканина, "Параметризация решений некоторых уравнений квадратов в свободном моноиде", *Дискрет. матем.*, **11**:3 (1999), 133–148.
- [7] G. S. Makanin, T. A. Makanina, "Parametrization of solutions of parametric equation in free monoid", *Theoret. Comput. Sci.*, **242**:1-2 (2000), 403–475.
- [8] Г. С. Маканин, "Параметризация решений уравнения $x^{-1}y^{-1}xyz^{-1}v^{-1}zv = 1$ в свободной группе", *Дискрет. матем.*, **13**:2 (2001), 35–88.
- [9] Г. С. Маканин, А. Г. Савушкина, "Уравнение в свободной группе, определяющее крашенные косы", *Матем. заметки*, **70**:4 (2001), 591–602.
- [10] Г. С. Маканин, "Конечная параметризация решений уравнений в свободном моноиде. I", *Матем. сб.*, **195**:2 (2004), 41–90.
- [11] Г. С. Маканин, "Конечная параметризация решений уравнений в свободном моноиде. II", *Матем. сб.*, **195**:4 (2004), 65–96.

Г. С. Маканин

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: makeanin@mi.ras.ru

Поступило

08.09.2009

Исправленный вариант

13.07.2010