Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Мелешкина, О коэффициентах разложения по базисам гладких функций многих переменных, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 6, 938–943

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9159>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 18:35:00

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О коэффициентах разложения по базисам гладких функций многих переменных

А. В. Мелешкина

В работе изучаются коэффициенты разложения гладких функций d переменных по базисам пространств $L_p([0, 1]^d)$. Нам потребуется следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $f(\mathbf{x})$, определенная на кубе $[0, 1]^d$, принадлежит классу $\text{Lip } \alpha$ при $0 < \alpha \leq 1$, если существует константа M такая, что для любых $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq M\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

где $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – евклидово расстояние между точками. Функция принадлежит классу $\text{Lip } \alpha$ при $\alpha = p + \gamma$, $p \in \mathbb{N}$, $0 < \gamma \leq 1$, если у нее существуют и непрерывны все производные

$$D^{\mathbf{s}} f = \frac{d^{|\mathbf{s}|} f(\mathbf{x})}{(dx_1^{s_1} \dots dx_d^{s_d})},$$

где $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d)$, порядка $0 \leq |\mathbf{s}| \leq p$, причем все старшие производные $D^{\mathbf{s}} f$, где $|\mathbf{s}| = p$, принадлежат классу $\text{Lip } \gamma$.

Известна следующая теорема Бернштейна о функциях одной переменной [1; с. 608].

ТЕОРЕМА А. Если периодическая функция $f(x) \in \text{Lip } \alpha$, $\alpha > 1/2$, то ряд ее коэффициентов Фурье по тригонометрической системе сходится абсолютно. Существует периодическая функция $f(x) \in \text{Lip } 1/2$, ряд коэффициентов Фурье по тригонометрической системе которой не сходится абсолютно.

Митягиным [2] в 1964 г. получено обобщение второй части теоремы Бернштейна на случай произвольной полной ортонормированной системы. Справедлива

ТЕОРЕМА В. Пусть $\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная полная ортонормированная система на $[0, 1]$. Существует функция $f(x) \in \text{Lip } 1/2$, для которой ряд коэффициентов Фурье по системе Ψ не сходится абсолютно.

Кашин [3] в 1977 г. доказал справедливость аналогичного результата для произвольного нормированного базиса в $L_p([0, 1])$, $1 < p < \infty$.

ТЕОРЕМА С. Пусть $\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – базис в $L_p([0, 1])$, $1 < p < \infty$ и $\|\psi_n(x)\|_p = 1$, $n = 1, 2, \dots$. Существует функция

$$f(x) \in \text{Lip } \alpha, \quad \alpha = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{q} \right\}, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1,$$

такая, что ряд из модулей коэффициентов разложения функции $f(x)$ по базису Ψ расходится, т.е. если $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x)$, то $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 08-01-00799а, 08-01-0098а).

В случае $p \geq 2$ точность данной теоремы подтверждается примером тригонометрической системы, а в случае $1 < p \leq 2$ – нормированной в $L_p([0, 1])$ системы Хаара.

Для функций многих переменных также известны аналоги теоремы Бернштейна. Для кратной тригонометрической системы справедливы следующие результаты [4], [5].

ТЕОРЕМА D. Для любой периодической функции $f(\mathbf{x}) \in \text{Lip}(d/2 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, определенной на $[0, 1]^d$, ряд из модулей коэффициентов Фурье по тригонометрической системе сходится абсолютно.

ТЕОРЕМА E. Существует периодическая функция $f(\mathbf{x}) \in \text{Lip } d/2$, заданная на $[0, 1]^d$, для которой ряд из модулей коэффициентов Фурье по тригонометрической системе не сходится абсолютно.

В работе Митягина [2] приведен аналог теоремы E для случая произвольной полной ортонормированной системы функций многих переменных. Приведем частный случай полученного Митягиным результата.

ТЕОРЕМА F. Пусть $\Psi = \{\psi_n(\mathbf{x})\}_{n=1}^\infty$ – произвольная полная ортонормированная система на $[0, 1]^d$. Существует функция $f(\mathbf{x}) \in \text{Lip } d/2$, для которой ряд коэффициентов Фурье по системе Ψ не сходится абсолютно.

Целью настоящей заметки является доказательство аналогичного результата для произвольного нормированного базиса в пространстве $L_p([0, 1]^d)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Psi = \{\psi_n(\mathbf{x})\}_{n=1}^\infty$ – произвольный нормированный в $L_p([0, 1]^d)$, $1 < p < \infty$, базис. Пусть $\alpha = \min\{1/2, 1/q\}$.

1) Если $d\alpha \notin \mathbb{Z}$, то существует функция $f(\mathbf{x}) \in \text{Lip } d\alpha$, для которой ряд из модулей коэффициентов разложения по базису Ψ расходится.

2) Если $d\alpha \in \mathbb{Z}$, то существует функция $f(\mathbf{x}) \in \text{Lip}(d\alpha - \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, для которой ряд из модулей коэффициентов разложения по базису Ψ расходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать схему доказательства теоремы Кашина, изложенную в [6; с. 395]. Пусть $d\alpha = m + \gamma$, $m = 0, 1, 2, \dots$, $0 < \gamma \leq 1$.

Определим индуктивно следующие системы функций:

- $\varphi_{0,k}^i(x)$, $i = 1, 2, \dots, 2^k$, $k = 1, 2, \dots$, – функции системы Фабера–Шаудера (см. [6; с. 204]);
- функции

$$\varphi_{l,k}^i(x) = 2^{k+2} \int_x^{x+1/2^{k+1}} \varphi_{l-1,k+1}^{2i}(t) dt,$$

где $i = 1, 2, \dots, 2^k$, $k = 1, 2, \dots$, $l = 1, 2, \dots, m$.

Функции $\varphi_{l,k}^i(x)$ обладают следующими свойствами:

- 1) $\varphi_{l,k}^i(x) = 0$ для всех $x \notin ((i-1)/2^k, i/2^k)$; $\varphi_{l,k}^i((i-1/2)/2^k) = 1$;
- 2) $\forall x \in [0, 1] |\varphi_{l,k}^i(x)| \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, 2^k$, $k = 1, 2, \dots$, $l = 1, 2, \dots, m$;
- 3) выполнено

$$\frac{\partial \varphi_{l,k}^i(x)}{\partial x} = 2^{k+2} \left(\varphi_{l-1,k+1}^{2i} \left(x + \frac{1}{2^{k+1}} \right) - \varphi_{l-1,k+1}^{2i}(x) \right);$$

- 4) выполнено

$$\frac{\partial^l \varphi_{l,k}^i(x)}{\partial x^l} = 2^{(k+2)l} \sum_{j=0}^l (-1)^j C_l^j \varphi_{0,k+l}^{2^l i} \left(x + \frac{l-j}{2^{k+1}} \right) f,$$

т.е. $\partial^l \varphi_{l,k}^i(x)/\partial x^l$ является линейной комбинацией функций системы Фабера–Шаудера с коэффициентами, не превышающими $B 2^{(k+2)l}$.

Заметим, что для систем функций $\{\varphi_{l,k}^i(x)\}$, $i = 1, \dots, 2^k$, $k = 1, 2, \dots$, справедлив результат теоремы 6.3 из [6], полученный Чисельским для системы Фабера–Шаудера, т.е. для любого l справедлива следующая

ЛЕММА 1. Если для коэффициентов ряда

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^k} A_{k,i} \varphi_{l,k}^i(x)$$

выполняется соотношение $|A_{k,i}| \leq C(1/2^{k\gamma})$, $0 < \gamma < 1$, то $f(x) \in \text{Lip } \gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы проводится по схеме доказательства теоремы 6.3 из [6] с учетом того, что

$$\begin{aligned} |\varphi_{l,k}^i(x) - \varphi_{l,k}^i(y)| &\leq \min \left\{ 1, 2^{k+3} \left| \int_y^x \varphi_{l-1,k+1}^{2i}(t) dt \right| \right\} \\ &\leq \min \{ 1, 2^{k+3} \max_t |\varphi_{l-1,k+1}^{2i}(t)| |x - y| \} \leq \min \{ 1, 2^{k+3} |x - y| \}. \end{aligned}$$

Здесь используется свойство 2 функций $\varphi_{l,k}^i(x)$.

Теперь определим функции многих переменных следующим образом:

$$\varphi_k^{i_1 \dots i_d}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^d \varphi_{m,k}^{i_j}(x_j), \quad k = 1, 2, \dots, \quad i_j = 1, 2, \dots, 2^k.$$

Пусть $\varphi_k^{i_1 \dots i_d}(\mathbf{x}) = {}^{Lp} \sum a_n^{k, i_1 \dots i_d} \psi_n(\mathbf{x})$.

Будем предполагать, что

$$\forall k = 1, 2, \dots \quad \forall i_1, i_2, \dots, i_d = 1, \dots, 2^k \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{k, i_1 \dots i_d}| < \infty, \quad (1)$$

иначе в качестве искомой функции $F(\mathbf{x})$ можно взять $(1/2^{kd\alpha}) \varphi_k^{i_1 \dots i_d}(\mathbf{x})$, которая согласно определению 1 будет принадлежать нужному нам классу.

Докажем одно свойство коэффициентов $a_n^{k, i_1 \dots i_d}$. Обозначим

$$\Delta_k^{i_1, \dots, i_d} = \left[\frac{i_1 - 1}{2^k}, \frac{i_1}{2^k} \right) \times \dots \times \left[\frac{i_d - 1}{2^k}, \frac{i_d}{2^k} \right).$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} &\sum_{i_1=1}^{2^k} \dots \sum_{i_d=1}^{2^k} \int_{[0,1]^d} \varphi_k^{i_1 \dots i_d}(\mathbf{x}) \chi_{\Delta_k^{i_1 \dots i_d}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \prod_{j=1}^d \left[\sum_{i_j=1}^{2^k} \int_{(i_j-1)/2^k}^{i_j/2^k} \varphi_{m,k}^{i_j}(x) dx \right] = \left[2^k \int_0^{1/2^k} \varphi_{m,k}^1(x) dx \right]^d = \left[2^k \frac{1}{2^{k+1}} \right]^d = \frac{1}{2^d} = C_d \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} &\sum_{i_1=1}^{2^k} \dots \sum_{i_d=1}^{2^k} \int_{[0,1]^d} \varphi_k^{i_1 \dots i_d}(\mathbf{x}) \chi_{\Delta_k^{i_1 \dots i_d}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{[0,1]^d} \sum_{i_1=1}^{2^k} \dots \sum_{i_d=1}^{2^k} \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{k, i_1 \dots i_d} \psi_n(\mathbf{x}) \right] \chi_{\Delta_k^{i_1 \dots i_d}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

и по неравенству Гёльдера далее получим

$$\begin{aligned} C_d &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,1]^d} \left| \psi_n(\mathbf{x}) \sum_{i_1=1}^{2^k} \cdots \sum_{i_d=1}^{2^k} a_n^{k,i_1 \dots i_d} \chi_{\Delta_k^{i_1 \dots i_d}}(\mathbf{x}) \right| d\mathbf{x} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\psi_n(\mathbf{x})\|_p \left\| \sum_{i_1=1}^{2^k} \cdots \sum_{i_d=1}^{2^k} a_n^{k,i_1 \dots i_d} \chi_{\Delta_k^{i_1 \dots i_d}}(\mathbf{x}) \right\|_q. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\|\psi_n(\mathbf{x})\|_p = 1$ и

$$\left\| \sum_{i_1=1}^{2^k} \cdots \sum_{i_d=1}^{2^k} a_n^{k,i_1 \dots i_d} \chi_{\Delta_k^{i_1 \dots i_d}}(\mathbf{x}) \right\|_q = \left(\frac{1}{2^{kd}} \sum_{i_1=1}^{2^k} \cdots \sum_{i_d=1}^{2^k} |a_n^{k,i_1 \dots i_d}|^q \right)^{1/q},$$

получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{kd}} \sum_{i_1=1}^{2^k} \cdots \sum_{i_d=1}^{2^k} |a_n^{k,i_1 \dots i_d}|^q \right)^{1/q} \geq C_d. \quad (2)$$

Введем некоторую нумерацию функций $\varphi_k^{i_1 \dots i_d}(\mathbf{x})$. Пусть $\varphi_k^{i_1 \dots i_d}(\mathbf{x}) = \varphi_k^j(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, 2^{kd}$. Соответственно $a_n^{k,i_1 \dots i_d} = a_n^{k,j}$. Рассмотрим функции

$$F_{k,t}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{2^{kd}} r_j(t) \varphi_k^j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in [0,1]^d, \quad t \in [0,1], \quad k = 1, 2, \dots$$

Здесь $r_j(t)$ – функции Радемахера. Пусть

$$F_{k,t}(\mathbf{x}) = {}^{L_p} \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,k}(t) \psi_n(\mathbf{x}).$$

Тогда

$$A_{n,k}(t) = \sum_{j=1}^{2^{kd}} r_j(t) a_n^{k,j}.$$

Аналогично одномерному случаю (см. [6; с. 397]), используя лишь свойства системы Радемахера и (2), получим

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} |A_{n,k}(t)| dt \geq C_d \cdot 2^{kd\alpha},$$

откуда следует, что для каждого k существует t_k такое, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{n,k}(t_k)| dt \geq C_d \cdot 2^{kd\alpha}. \quad (3)$$

Рассмотрим функцию

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k_s d \alpha}} F_{k_s, t_{k_s}}(\mathbf{x}).$$

Здесь для каждого s t_{k_s} выбраны так, чтобы выполнялось (3), а последовательность k_s выбираем, используя предположение (1), столь быстро растущей, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(F)| \geq \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{2^{k_s d \alpha}} A_{n, k_s} \right| = \infty. \quad (4)$$

Если $m \geq 1$, то рассмотрим частную производную по x_1 порядка m , учитывая, что для остальных частных производных рассуждения аналогичны

$$\frac{\partial^m F(\mathbf{x})}{\partial x_1^m} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k_s d \alpha}} \sum_{i_1=1}^{2^k} \cdots \sum_{i_d=1}^{2^k} r_{i_1 \dots i_d}(t) \frac{\partial^m \varphi_{m,k}^{i_1}(x_1)}{\partial x_1^m} \cdot \varphi_{m,k}^{i_2}(x_2) \cdots \varphi_{m,k}^{i_d}(x_d).$$

Используя свойство 4 функций $\varphi_{m,k}^i(x)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m F(\mathbf{x})}{\partial x_1^m} &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k_s d \alpha}} \sum_{i_1=1}^{2^k} \cdots \sum_{i_d=1}^{2^k} r_{i_1 \dots i_d}(t) \left[2^{m(k+1)} \sum_{j=0}^m (-1)^j C_m^j \varphi_{0,k+m}^{2^m i_1} \left(x_1 + \frac{m-j}{2^{k+1}} \right) \right] \\ &\quad \times \varphi_{m,k}^{i_2}(x_2) \cdots \varphi_{m,k}^{i_d}(x_d) \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{i_1=1}^{2^k} \cdots \sum_{i_d=1}^{2^k} \sum_{j=0}^m \frac{r_{i_1 \dots i_d}(t) (-1)^j C_m^j}{2^{k_s(d\alpha-m)}} \\ &\quad \times \varphi_{0,k+m}^{2^m i_1} \left(x_1 + \frac{m-j}{2^{k+1}} \right) \cdot \varphi_{m,k}^{i_2}(x_2) \cdots \varphi_{m,k}^{i_d}(x_d). \end{aligned}$$

$\partial^m F(\mathbf{x})/\partial x_1^m$ как функция переменной x_l , $l = 1, 2, \dots, d$, представлена в виде разложения по системе функций $\varphi_{m,k}^{i_l}(x_l)$, если $l \neq 1$, и по системе функций $\varphi_{0,k+m}^{2^m i_1}(x_1)$, если $l = 1$, с коэффициентами, удовлетворяющими соотношениям

$$|c_{k_s, i_l}| \leq \frac{C(d)}{2^{k_s \gamma}},$$

где $C(d) = (1/4) \max_{0 \leq j \leq m} C_m^j$ – величина, зависящая лишь от размерности пространства, а $\gamma = d\alpha - m$ по предположению $0 < \gamma \leq 1$.

По лемме 1 получаем, что как функция переменной x_l , $l = 1, 2, \dots, d$, $\partial^m F(\mathbf{x})/\partial x_1^m \in \text{Lip } \gamma$, если $0 < \gamma < 1$, а, следовательно, для таких γ $\partial^m F(\mathbf{x})/\partial x_1^m \in \text{Lip } \gamma$ как функция многих переменных.

При $\gamma = 1$ (т.е. $d\alpha \in \mathbb{N}$) можем лишь утверждать, что $\partial^m F(\mathbf{x})/\partial x_1^m \in \text{Lip}(\gamma - \varepsilon)$.

Аналогично, используя лемму 1, получим, что в случае, когда $d\alpha \notin \mathbb{N}$ все остальные частные производные порядка m принадлежат классу $\text{Lip } \gamma$, а в случае $d\alpha \in \mathbb{N}$ – классу $\text{Lip}(\gamma - \varepsilon)$.

Если же $m = 0$, то рассматриваем саму функцию и проводим те же рассуждения.

Таким образом, согласно определению 1 получаем, что $F(\mathbf{x})$ с учетом (4) удовлетворяет условиям теоремы.

Теорема доказана.

Результаты п. 1 теоремы 1 являются неулучшаемыми, что можно показать, рассмотрев кратную тригонометрическую систему в случае $p \geq 2$ и нормированный в L_p многомерный аналог системы Хаара в случае $1 < p \leq 2$.

В случае, когда $d\alpha \in \mathbb{Z}$, остается нерешенным вопрос о построении примера, аналогичного построенному при $p = 2$ Митягиным в теореме F. С учетом теоремы F существование такого примера весьма вероятно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961. [2] Б. С. Митягин, *Докл. АН СССР*, **157**:5 (1964), 1047–1050. [3] Б. С. Кашин, *Сиб. матем. журн.*, **18**:1 (1977), 122–131. [4] S. Bochner, *Math. Rev.*, **8** (1947), 376. [5] S. Wainger, *Special Trigonometric*

Series in k-Dimensions, Mem. Amer. Math. Soc., **59**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1965.
[6] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Изд-во АФЦ, М., 1999.

А. В. Мелешкина

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: meleshkina-anna@mail.ru

Поступило

14.09.2010

Исправленный вариант

08.02.2011