Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Белокуров, Ю. П. Соловьев, Е. Т. Шавгулидзе, Метод суммирования расходящихся рядов с любой точностью, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 1, 24–35

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm916>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 15:41:21

УДК 519.21

МЕТОД СУММИРОВАНИЯ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ С ЛЮБОЙ ТОЧНОСТЬЮ

В. В. Белокуров, Ю. П. Соловьёв, Е. Т. Шавгулидзе

Предложен новый метод суммирования с любой точностью широкого класса расходящихся рядов с использованием только конечного числа членов ряда.

Библиография: 8 названий.

В настоящей работе рассматривается задача суммирования специального класса расходящихся рядов, которые могут быть представлены как ряды Тейлора гладких вполне монотонных функций. Под суммой ряда при этом понимается по определению значение функции в соответствующей точке.

В работе предлагается метод нахождения значения функции в этой точке с любой точностью, исходя из конечного числа членов ряда, количество которых зависит от заданной точности. Этот метод применим, в частности, для суммирования рядов с факториальным ростом членов. (Как известно, ряды такого типа возникают в задачах квантовой физики, например, при асимптотических разложениях функциональных интегралов.)

Стандартным методом суммирования таких рядов является метод Бореля и его модификации [1], [2]. Однако эти методы требуют знания всех членов ряда и не позволяют восстановить значение суммы по конечному числу членов ряда, которое обычно только и бывает известно в реальных задачах.

Предлагаемый метод суммирования расходящихся рядов представляет собой развитие метода вычисления функциональных интегралов с помощью аппроксимации их сходящимися рядами [3]–[6].

Напомним сначала определение гладкой вполне монотонной функции. Функция $f(t)$ называется *гладкой вполне монотонной функцией на полупрямой* $[0, \infty)$, если она бесконечно дифференцируема и $(-1)^n f^{(n)}(t) \geq 0$ для всех $n \geq 0$ и $t \in [0, \infty)$.

Нам понадобится следующая известная теорема.

ТЕОРЕМА (С. Н. Бернштейна). Пусть $f(t)$ – гладкая вполне монотонная функция на полупрямой $[0, \infty)$. Тогда на полупрямой $[0, \infty)$ существует неотрицательная мера Радона μ такая, что

$$f(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \mu(dx).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00228.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы см., например, в [7].

Убедимся также в справедливости следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $f \in C^\infty[0, \infty)$ – вполне монотонная функция на полу-прямой $[0, \infty)$. Тогда

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n \int_0^\infty x^n \mu(dx).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку при фиксированном $t > 0$ имеет место неравенство

$$|x^n e^{-tx}| \leq n^n e^{-n} t^{-n}, \quad (1)$$

из теоремы Лебега следует, что

$$f^{(n)}(t) = (-1)^n \int_0^\infty x^n e^{-tx} \mu(dx). \quad (2)$$

Фиксируем теперь натуральное число n и рассмотрим монотонно убывающую последовательность положительных чисел $\{t_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, для которой

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = 0.$$

Тогда для последовательности функций $\lambda_k(x) = x^n e^{-t_k x}$ при всех $x \geq 0$ выполняются неравенства $\lambda_{k+1}(x) \geq \lambda_k(x)$. При этом

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k(x) = x^n.$$

В то же время

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty \lambda_k(x) \mu(dx) = (-1)^n \lim_{k \rightarrow \infty} f^{(n)}(t_k) = (-1)^n f^{(n)}(0),$$

где последнее равенство следует из непрерывности производной $f^{(n)}(t)$.

По теореме Леви в выражении

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty \lambda_k(x) \mu(dx)$$

можно поменять порядок операций интегрирования и перехода к пределу. Следовательно,

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n \int_0^\infty \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k(x) \mu(dx) = (-1)^n \int_0^\infty x^n \mu(dx)$$

и последний интеграл существует.

В дальнейшем нам понадобятся интегралы вида

$$B_n = \int_0^{+\infty} x^{n/2} \mu(dx). \quad (3)$$

В частности, $f^{(n)}(0) = (-1)^n B_{2n}$.

Прежде чем сформулировать основные теоремы настоящей статьи, введем, как и в работах [3]–[5], функцию

$$\tilde{\varphi}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-i\rho r\} \exp\{-r^4\} dr, \quad (4)$$

представляющую собой преобразование Фурье экспоненты $\exp\{-r^4\}$. Нетрудно показать [4], что $|\tilde{\varphi}(\rho)| \leq \exp\{-\rho^{5/4}\}$.

Положим

$$A_{2n}(R) = (-1)^n \int_{-R}^{+R} \tilde{\varphi}(\rho) \rho^{2n} d\rho. \quad (5)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in C^\infty[0, \infty)$ – вполне монотонная функция на полупрямой $[0, \infty)$. Тогда для любого натурального N и всех $t > 0$, $R > 0$ имеет место равенство

$$f(t) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{(2n)!} t^{n/2} A_{2n}(R) B_n + \Delta(t, R, N), \quad (6)$$

где

$$|\Delta(t, R, N)| \leq 2f(0)R^{-1/4} \exp(-R^{5/4}) + \beta_{N+1} \frac{2}{(2N+3)!} t^{(N+1)/2} R^{2N+3}. \quad (7)$$

Здесь

$$\beta_{N+1} = \begin{cases} |f^{((N+1)/2)}(0)|, & \text{если } N \text{ нечетно,} \\ \sqrt{|f^{(N/2)}(0)|} \sqrt{|f^{(N/2+1)}(0)|}, & \text{если } N \text{ четно.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего преобразуем функцию $f(t)$, используя тот же прием, что и в работах [3]–[5]. А именно, представим $f(t)$ в виде

$$f(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \mu(dx) = \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\rho) \exp\{it^{1/4} \rho x^{1/4}\} d\rho \right) \mu(dx). \quad (8)$$

Нетрудно проверить, что для интеграла (8) выполняются условия теоремы Фубини. Поэтому

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\rho) \left(\int_0^{+\infty} \exp\{it^{1/4} \rho x^{1/4}\} \mu(dx) \right) d\rho. \quad (9)$$

Положим

$$J(t, R) = \int_{-R}^{+R} \tilde{\varphi}(\rho) \left(\int_0^{+\infty} \exp\{it^{1/4} \rho x^{1/4}\} \mu(dx) \right) d\rho, \quad (10)$$

где $R > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} |f(t) - J(t, R)| &\leq 2 \int_R^{+\infty} |\tilde{\varphi}(\rho)| d\rho \int_0^{+\infty} \mu(dx) = 2 \int_R^{+\infty} |\tilde{\varphi}(\rho)| d\rho f(0) \\ &\leq 2R^{-1/4} \exp(-R^{5/4}) f(0) = \theta(R). \end{aligned} \quad (11)$$

При этом $\theta(R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow +\infty$.

Заметим далее, что в силу четности функции $\tilde{\varphi}(\rho)$

$$J(t, R) = \int_{-R}^{+R} \tilde{\varphi}(\rho) \left(\int_0^{+\infty} \cos(t^{1/4} \rho x^{1/4}) \mu(dx) \right) d\rho. \quad (12)$$

Воспользуемся теперь следующей ашпроксимацией функции $\cos \tau$:

$$\cos \tau = \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{\tau^{2n}}{(2n)!} + \omega(N, \tau), \quad |\omega(N, \tau)| \leq \frac{\tau^{2N+2}}{(2N+2)!}, \quad (13)$$

и представим выражение для $J(t, R)$ в виде суммы двух слагаемых

$$\begin{aligned} J(t, R) &= \sum_{n=0}^N \left((-1)^n \frac{t^{n/2}}{(2n)!} \int_{-R}^{+R} \tilde{\varphi}(\rho) \rho^{2n} d\rho \int_0^{+\infty} x^{n/2} \mu(dx) \right) \\ &\quad + \int_{-R}^{+R} \tilde{\varphi}(\rho) \left(\int_0^{+\infty} \omega(N, t^{1/4} \rho x^{1/4}) \mu(dx) \right) d\rho. \end{aligned} \quad (14)$$

Такое разбиение законно, поскольку каждый из интегралов существует.

В силу формулы (13) второе слагаемое в (14) оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{-R}^{+R} \tilde{\varphi}(\rho) \left(\int_0^{+\infty} \omega(N, t^{1/4} \rho x^{1/4}) \mu(dx) \right) d\rho \right| \\ &\leq \frac{1}{(2N+2)!} t^{(N+1)/2} \int_{-R}^{+R} |\tilde{\varphi}(\rho)| \rho^{2N+2} d\rho \int_0^{+\infty} x^{(N+1)/2} \mu(dx) \\ &\leq \frac{1}{(2N+2)!} t^{(N+1)/2} \frac{2}{(2N+3)} R^{2N+3} B_{N+1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Если $N+1 = 2K$, то $B_{N+1} = |f^{(K)}(0)|$. Если $N+1 = 2K+1$, то в силу неравенства Коши–Буняковского

$$B_{N+1} \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} x^K \mu(dx) \int_0^{+\infty} x^{K+1} \mu(dx)} = \sqrt{|f^{(K)}(0)|} \sqrt{|f^{(K+1)}(0)|}.$$

Соотношения (11), (14) и (15) и доказывают утверждение теоремы, т.е. справедливость формул (6), (7).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $f \in C^\infty[0, \infty)$ – вполне монотонная функция на полупрямой $[0, \infty)$, удовлетворяющая условиям

$$|f^{(n)}(0)| \leq C n^{(4-2\delta)n}, \quad (16)$$

где C и δ – некоторые положительные постоянные. Тогда для любого $t > 0$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся $R = R(t, \varepsilon)$ и $N_0 = N_0(t, \varepsilon, R)$ такие, что при всех $N > N_0$

$$f(t) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{(2n)!} t^{n/2} A_{2n}(R) B_n + \Delta(t, R, N), \quad (17)$$

где $|\Delta(t, R, N)| \leq \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следствия 1 вытекает из условия (16) и формул (6), (7).

Для практического применения предложенного метода суммирования расходящихся рядов необходимо еще указать алгоритм вычисления входящих в формулу (6) коэффициентов B_n .

Для четных n $B_n = (-1)^{n/2} f^{(n/2)}(0)$. Для приближенного вычисления коэффициентов с нечетными индексами n можно, например, использовать прием, примененный в работе [6].

В настоящей работе мы опишем другой метод их вычисления. Основу его составляет

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in C^\infty[0, \infty)$ – вполне монотонная функция на полупрямой $[0, \infty)$. Предположим, что

$$|f^{(n)}(0)| \leq K^n (2n)!, \quad (18)$$

где K – некоторое число, большее единицы. Тогда для любых вещественных $\lambda > 0$ и $\varepsilon > 0$, найдутся натуральное число $N = N(K, \lambda, \varepsilon)$ и коэффициенты $b_m = b_m(K, \lambda, \varepsilon)$ такие, что

$$\int_0^{+\infty} x^{\lambda/2} \mu(dx) = \sum_{m=0}^N b_m f^{(m)}(0) + \delta, \quad (19)$$

где $|\delta| \leq \varepsilon$.

Доказательству теоремы предположим следующую лемму.

ЛЕММА 1. Имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} x^{n+(\alpha-1)/2} \mu(dx) \\ &= \frac{1}{C(\alpha, n)} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \left(\cos(\xi x^{1/2}) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \xi^{2k} x^k \right) \mu(dx) \right) \xi^{-(2n+\alpha)} d\xi, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$C(\alpha, n) = \frac{(-1)^n \pi}{2 \cos(\pi\alpha/2) \Gamma(2n + \alpha)}, \quad |\alpha| < 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \left(\cos(\xi x^{1/2}) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \xi^{2k} x^k \right) \mu(dx) \right) \xi^{-(2n+\alpha)} d\xi.$$

В силу теоремы Фубини в нем можно менять порядок интегрирований. Сделаем замену переменных $x^{1/2} \xi = y$. В результате получим, что рассматриваемый интеграл равен

$$\int_0^\infty \left(\cos y - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} y^{2k} \right) y^{-(2n+\alpha)} dy \int_0^\infty x^{n+(\alpha-1)/2} \mu(dx). \quad (21)$$

Для доказательства леммы теперь достаточно воспользоваться известным соотношением

$$\int_0^\infty \left(\cos y - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} y^{2k} \right) y^{-(2n+\alpha)} dy = \frac{(-1)^n \pi}{2 \cos(\pi\alpha/2) \Gamma(2n + \alpha)}, \quad (22)$$

справедливым при $|\alpha| < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Если $\lambda = 2n$, где n – натуральное число, то

$$\int_0^{+\infty} x^{\lambda/2} \mu(dx) = \int_0^{+\infty} x^n \mu(dx) = (-1)^n f^{(n)}(0).$$

Следовательно, в этом случае $N = n$, все коэффициенты $b_m = 0$, за исключением $b_n = 1$, и $\delta = 0$.

Во всех остальных случаях λ можно представить в виде $\lambda = 2n + \alpha - 1$, где n – натуральное число и $|\alpha| < 1$.

Пусть a_1 и a_2 – некоторые положительные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$a_1 < a_2, \quad 0 < a_1 < \frac{1}{\sqrt{K}}, \quad (23)$$

$$a_2 > \left(\frac{2}{\varepsilon |C(\alpha, n)| (2n + \alpha - 1)} \right)^{1/(2n + \alpha - 1)}. \quad (24)$$

Представим интеграл в правой части формулы (20) в виде суммы трех интегралов

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} x^{n+(\alpha-1)/2} \mu(dx) \\ &= \frac{1}{C(\alpha, n)} \left(\int_0^{a_1} \left(\int_0^\infty \left(\cos(\xi x^{1/2}) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \xi^{2k} x^k \right) \mu(dx) \right) \xi^{-(2n+\alpha)} d\xi \right. \\ & \quad + \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_0^\infty \left(\cos(\xi x^{1/2}) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \xi^{2k} x^k \right) \mu(dx) \right) \xi^{-(2n+\alpha)} d\xi \\ & \quad \left. + \int_{a_2}^\infty \left(\int_0^\infty \left(\cos(\xi x^{1/2}) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \xi^{2k} x^k \right) \mu(dx) \right) \xi^{-(2n+\alpha)} d\xi \right). \end{aligned}$$

Из выбора пределов интегрирования следует, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{C(\alpha, n)} \int_{a_2}^\infty \left(\int_0^\infty \left(\cos(\xi x^{1/2}) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \xi^{2m} x^m \right) \mu(dx) \right) \xi^{-(2n+\alpha)} d\xi \\ &= \frac{1}{C(\alpha, n)} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \frac{a_2^{2m-2n-\alpha+1}}{(2m-2n-\alpha+1)} \int_0^\infty x^m \mu(dx) \\ & \quad + \frac{1}{C(\alpha, n)} \int_{a_2}^\infty \left(\int_0^\infty \cos(\xi x^{1/2}) \mu(dx) \right) \xi^{-(2n+\alpha)} d\xi \\ &= \frac{1}{C(\alpha, n)} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{(2m)!} \frac{a_2^{2m-2n-\alpha+1}}{(2m-2n-\alpha+1)} f^{(m)}(0) + \delta_1, \end{aligned}$$

где

$$\delta_1 = \frac{1}{C(\alpha, n)} \int_{a_2}^\infty \left(\int_0^\infty \cos(\xi x^{1/2}) \mu(dx) \right) \xi^{-(2n+\alpha)} d\xi.$$

В силу неравенства (24)

$$|\delta_1| \leq \frac{1}{|C(\alpha, n)|} \int_{a_2}^{\infty} \xi^{-(2n+\alpha)} d\xi < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$\frac{1}{C(\alpha, n)} \int_0^{a_1} \left(\int_0^{\infty} \left(\cos(\xi x^{1/2}) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \xi^{2k} x^k \right) \mu(dx) \right) \xi^{-(2n+\alpha)} d\xi.$$

Пользуясь разложением (13), этот интеграл можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{C(\alpha, n)} \int_0^{a_1} \left(\int_0^{\infty} \left(\sum_{m=n}^{N_1-1} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \xi^{2m} x^m + \omega(N_1, \xi x^{1/2}) \right) \mu(dx) \right) \xi^{-(2n+\alpha)} d\xi \\ &= \frac{1}{C(\alpha, n)} \sum_{m=n}^{N_1-1} \frac{1}{(2m)!} \frac{a_1^{2m-2n-\alpha+1}}{(2m-2n-\alpha+1)} f^{(m)}(0) + \delta_2, \end{aligned}$$

где

$$\delta_2 = \frac{1}{C(\alpha, n)} \int_0^{a_1} \left(\int_0^{\infty} \omega(N_1, \xi x^{1/2}) \mu(dx) \right) \xi^{-(2n+\alpha)} d\xi,$$

а натуральное число N_1 выбирается из условия

$$\left| \frac{1}{C(\alpha, n)} \frac{1}{(2N_1)!} \frac{a_1^{2N_1-2n-\alpha+1}}{(2N_1-2n-\alpha+1)} f^{(N_1)}(0) \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

В этом случае

$$\begin{aligned} |\delta_2| &\leq \frac{1}{|C(\alpha, n)|} \frac{1}{(2N_1)!} \int_0^{a_1} \left(\int_0^{\infty} x^{2N_1} \mu(dx) \right) \xi^{2N_1-2n-\alpha} d\xi \\ &= \left| \frac{1}{C(\alpha, n)} \frac{1}{(2N_1)!} \frac{a_1^{2N_1-2n-\alpha+1}}{(2N_1-2n-\alpha+1)} f^{(N_1)}(0) \right| < \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Займемся теперь интегралом

$$\frac{1}{C(\alpha, n)} \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_0^{\infty} \left(\cos(\xi x^{1/2}) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \xi^{2k} x^k \right) \mu(dx) \right) \xi^{-(2n+\alpha)} d\xi.$$

Существование для него представления вида (19) вытекает из следующих двух лемм и равенства

$$\cos t = 2 \cos^2 \frac{t}{2} - 1,$$

которое позволяет представить функцию $\cos t$ в виде полинома $P(\cos^2(2^{-l}t))$ для произвольного натурального числа l .

ЛЕММА 2. Пусть

$$I_s = \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_0^\infty (\cos(2^{-l}\xi x^{1/2}))^{2s} P(\xi^2 x) \mu(dx) \right) d\xi,$$

где $P(\xi^2 x)$ – полином от $\xi^2 x$ с вещественными коэффициентами, пределы интегрирования a_1 и a_2 удовлетворяют соответственно неравенствам (23) и (24), s и l – неотрицательные целые числа.

Если l таково, что

$$l > 1 + \log_2(a_2 K), \quad (25)$$

то для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется M такое, что имеет место следующее представление:

$$I_s = \sum_{r=0}^M \frac{(-1)^r}{(2r)!} \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_0^\infty (\cos(2^{-l}\xi x^{1/2}))^{2s-2} P(\xi^2 x) \xi^{2r} x^r 2^{-2r(l-1)-1} \mu(dx) \right) d\xi + \sigma,$$

где $|\sigma| < \varepsilon_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что для доказательства леммы достаточно соответствующее утверждение доказать лишь для подынтегральных выражений вида

$$(\cos(2^{-l}\xi x^{1/2}))^{2s} \xi^{2k} x^k,$$

где k – неотрицательное целое число.

Имеем

$$\begin{aligned} (\cos(2^{-l}\xi x^{1/2}))^{2s} \xi^{2k} x^k &= (\cos(2^{-l}\xi x^{1/2}))^{2s-2} (\cos(2^{-l}\xi x^{1/2}))^2 \xi^{2k} x^k \\ &= (\cos(2^{-l}\xi x^{1/2}))^{2s-2} \left(\sum_{r=0}^M \frac{(-1)^r}{(2r)!} \xi^{2r+2k} x^{r+k} 2^{-2r(l-1)-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^{M+1}}{(2(M+1))!} \xi^{2(M+1)+2k} x^{(M+1)+k} 2^{-2(M+1)(l-1)-1} \cos \theta \right), \end{aligned}$$

где $0 < \theta < 2^{-l}\xi x^{1/2}$.

Получим теперь оценку для остатка σ :

$$\begin{aligned} |\sigma| &\leq \frac{1}{(2M+2)!} \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_0^\infty \xi^{2(M+1)+2k} x^{(M+1)+k} 2^{-2(M+1)(l-1)-1} \mu(dx) \right) d\xi \\ &\leq \frac{|f^{(M+k+1)}(0)| a_2^{2M+2k+3}}{(2M+2)! (2M+2k+3) 2^{2(M+1)(l-1)+1}}. \end{aligned}$$

В силу неравенств (18) и (25) имеем

$$\begin{aligned} |\sigma| &\leq \frac{K^{M+k+1} (2M+2k+2)! a_2^{2M+2k+3}}{(2M+2)! (2M+2k+3) 2^{2(M+1)(l-1)+1}} \\ &\leq \frac{K^{M+k+1} (2M+2k+2)! a_2^{2M+2k+3}}{2(2M+2)! (2M+2k+3) K^{2M+2} a_2^{2M+2}} \\ &= \frac{(2M+3) \cdots (2M+2k+2) a_2^{2k+1}}{2(2M+2k+3) K^{M-k+1}}. \end{aligned}$$

Так как $K > 1$, из этого неравенства следует, что для достаточно большого M абсолютная величина σ может быть сделана сколь угодно малой. Тем самым, лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. В предположениях леммы 2 для любого $\varepsilon_2 > 0$ существуют натуральное число J и коэффициенты b_j , $j = 0, \dots, J$, такие, что

$$I_s = \sum_{j=0}^J b_j f^{(j)}(0) + \gamma,$$

где $|\gamma| < \varepsilon_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы проводится индукцией по s .

Для $s = 0$ утверждение леммы очевидно. В самом деле,

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_0^\infty P(\xi^2 x) \mu(dx) \right) d\xi \\ &= \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_0^\infty (p_0 + p_1 \xi^2 x + p_2 (\xi^2 x)^2 + \dots + p_m (\xi^2 x)^m) \mu(dx) \right) d\xi \\ &= \sum_{j=0}^m p_j \int_{a_1}^{a_2} \xi^{2j} d\xi \int_0^\infty x^j \mu(dx) = \sum_{j=0}^m p_j \frac{a_2^{2j+1} - a_1^{2j+1}}{2j+1} f^{(j)}(0). \end{aligned}$$

Предполагая теперь утверждение выполненным для s , докажем его для $s+1$. Для этого воспользуемся леммой 2, положив в ней $\varepsilon_1 = \varepsilon_2/2$. Имеем

$$\begin{aligned} I_{s+1} &= \sum_{r=0}^M \frac{(-1)^r}{(2r)!} \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_0^\infty (\cos(2^{-l} \xi x^{1/2}))^{2s} P(\xi^2 x) \xi^{2r} x^r 2^{-2r(l-1)-1} \mu(dx) \right) d\xi + \sigma \\ &= \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_0^\infty (\cos(2^{-l} \xi x^{1/2}))^{2s} Q(\xi^2 x) \xi^{2r} x^r 2^{-2r(l-1)-1} \mu(dx) \right) d\xi + \sigma, \end{aligned}$$

где

$$Q(\xi^2 x) = \sum_{r=0}^M \frac{(-1)^r}{(2r)!} P(\xi^2 x) \xi^{2r} x^r 2^{-2r(l-1)-1}$$

и $|\sigma| < \varepsilon_1 = \varepsilon_2/2$.

По предположению индукции существуют натуральное число J и коэффициенты b_j , $j = 0, \dots, J$, такие, что

$$\int_{a_1}^{a_2} \left(\int_0^\infty (\cos(2^{-l} \xi x^{1/2}))^{2s} Q(\xi^2 x) \xi^{2r} x^r 2^{-2r(l-1)-1} \mu(dx) \right) d\xi = \sum_{j=0}^J b_j f^{(j)}(0) + \tilde{\gamma},$$

где $|\tilde{\gamma}| < \varepsilon_1$. Следовательно,

$$I_{s+1} = \sum_{j=0}^J b_j f^{(j)}(0) + \tilde{\gamma} + \sigma,$$

причем $|\tilde{\gamma} + \sigma| \leq |\tilde{\gamma}| + |\sigma| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

Это завершает доказательство леммы 3 и вместе с ней теоремы 2.

Заметим, что в доказательстве теоремы 2 по существу содержится алгоритм для вычисления величин $N = N(K, \lambda, \varepsilon)$ и $b_m = b_m(K, \lambda, \varepsilon)$, $1 \leq m \leq N$, в зависимости от значений параметров K, λ, ε .

СЛЕДСТВИЕ 2. При произвольных значениях параметров $K > 0$, $\varepsilon > 0$ и $0 \leq t \leq T$ найдутся натуральное число $M = M(K, \varepsilon, T)$ и набор коэффициентов $c_m = c_m(K, \varepsilon, t)$, $1 \leq m \leq M$, такие, что для любой функции $f(t)$, удовлетворяющей условиям теоремы 2, выполняется неравенство

$$\left| f(t) - \sum_{m=0}^M c_m f^{(m)}(0) \right| < \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для данных $K > 0$, $\nu > 0$, $T > 0$ выберем наименьшее натуральное число $L = L(K, \nu, T)$, удовлетворяющее неравенствам

$$L \geq 2\sqrt{KT} \left(\ln \frac{2}{\nu} \right)^{8/5}, \quad L \geq \frac{1}{\ln 2} \left(\ln \frac{1}{\nu} + \frac{2}{5} \ln \ln \frac{2}{\nu} \right),$$

и положим $R(\nu) = (\ln(2/\nu))^{4/5}$.

В силу следствия 1 получаем, что

$$\begin{aligned} & \left| f(t) - \sum_{n=0}^{J(K, \nu, T)} \frac{1}{(2n)!} t^{n/2} A_{2n}(R(\nu)) B_n \right| \\ & \leq R^{-1/4} \exp(-R^{5/4}) + (KT)^{(N+1)/2} \frac{(N+2)!}{(2N+3)!} R^{2N+3} \\ & \leq \frac{\nu}{2} + \left(\frac{\sqrt{KT} (\ln(2/\nu))^{8/5}}{N+1} \right)^{N+1} \left(\ln \frac{2}{\nu} \right)^{2/5} \leq \nu. \end{aligned}$$

Возьмем теперь $\nu = \varepsilon/2$ и для всех k , удовлетворяющих неравенствам

$$1 \leq 2k+1 \leq L\left(K, \frac{\varepsilon}{2}, T\right),$$

определим числа ν_k :

$$\nu_k = \frac{\varepsilon(2(2k+1))! T^{-(2k+1)/2}}{2L(K, \varepsilon/2, T)(|A_{2(2k+1)}(R(\varepsilon/2))| + 1)}.$$

Из теоремы 2 следует, что

$$\begin{aligned} & \left| \frac{t^{(2k+1)/2} A_{2(2k+1)}(R(\varepsilon/2))}{(2(2k+1))!} \left(B_{2k+1} - \sum_{m=0}^{N(K, (2k+1)/2, \nu_k)} b_m \left(K, \frac{2k+1}{2}, \nu_k \right) f^{(m)}(0) \right) \right| \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2L(K, \varepsilon/2, T)}. \end{aligned}$$

Видно, что в качестве $M(K, \varepsilon, T)$ можно выбрать

$$M = \max \left\{ L\left(K, \frac{\varepsilon}{2}, T\right); N\left(K, \frac{2k+1}{2}, \nu_k\right) \right\}. \quad (26)$$

При этом коэффициенты $c_m = c_m(K, \varepsilon, t)$, $1 \leq m \leq M$, равны

$$c_m = \frac{1}{(4m)!} t^m A_{2m} \left(R \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) \right) + \sum_{k=0}^{L(K, \varepsilon/2, T)-1} b_m \left(K, \frac{2k+1}{2}, \nu_k \right) \frac{1}{(2(2k+1))!} t^{(2k+1)/2} A_{2(2k+1)} \left(R \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) \right). \quad (27)$$

Теорема 2 позволяет восстановить значение функции $f(t)$ с любой точностью, используя конечное число членов ряда, и дает тем самым эффективный алгоритм суммирования широкого класса расходящихся рядов.

Укажем теперь, какие ряды могут быть отнесены к этому классу. Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} u_n t^n, \quad (28)$$

коэффициенты которого образуют две позитивные последовательности

$$\{u_0, u_1, \dots\}, \quad \{u_1, u_2, \dots\}$$

(т.е. для любого $l \in \mathbb{N}$ квадратичные формы $\sum_{j,k=0}^l u_{j+k} \xi_j \xi_k$, $\sum_{j,k=0}^l u_{j+k+1} \xi_j \xi_k$ положительно определены) и удовлетворяют следующим неравенствам: $0 \leq u_n \leq K^n (2n)!$.

В этом случае ряд (28) является рядом Тейлора некоторой гладкой вполне монотонной функции $f(t)$ ($u_n = (-1)^n f^{(n)}(0)$) [8], причем эта функция единственна [1].

Отметим, что при указанных условиях значение функции $f(t)$ совпадает с суммой ряда в смысле Бореля [1]. Принципиальное же отличие предлагаемого нами метода от метода Бореля состоит в следующем. Для суммирования методом Бореля необходимо найти аналитическое продолжение функции

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} u_n t^n x^n,$$

построенной с использованием всех коэффициентов ряда. Чаще всего это проделать не удастся, и, более того, в реальных задачах, как правило, известно только конечное число коэффициентов u_n . Предложенный в настоящей работе метод позволяет для любого значения t с любой точностью найти сумму ряда (28), зная лишь конечное число членов ряда.

В качестве примера приведем результаты приближенного суммирования рядов

$$S_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n!)^\alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

При $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ — это знаменитые расходящиеся ряды

$$S_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n, \quad S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n!.$$

Традиционные методы суммирования [1] дают следующие значения:

$$S_0 = \frac{1}{2}, \quad S_1 = 0.596 \dots$$

Ряды для других α традиционными методами просуммировать не удается.

Предложенный в работе метод позволяет просуммировать с любой точностью эти ряды для произвольных α . Приведем значения некоторых из S_α , вычисленные с точностью 0.001 (для получения указанной точности в формуле (17) выбиралось $R = 11$, $N = 40$, $t = 1$):

$$\begin{aligned} S_0 &= 0.500 \dots, \quad S_{0,1} = 0.511 \dots, \quad S_{0,2} = 0.521 \dots, \quad S_{0,3} = 0.532 \dots, \\ S_{0,4} &= 0.542 \dots, \quad S_{0,5} = 0.552 \dots, \quad S_{0,6} = 0.561 \dots, \quad S_{0,7} = 0.570 \dots, \\ S_{0,8} &= 0.579 \dots, \quad S_{0,9} = 0.588 \dots, \quad S_1 = 0.596 \dots \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: ИЛ, 1951.
- [2] Dingle R. B. Asymptotic Expansions. London–New York: Acad. Press, 1973.
- [3] Belokurov V. V., Shavgulidze E. T., Solovyov Yu. P. New perturbation theory for quantum field theory: convergent series instead of asymptotic expansions // Mod. Phys. Lett. A. 1995. V. 10. № 39. P. 3033–3041.
- [4] Белокуров В. В., Соловьёв Ю. П., Шавгулидзе Е. Т. Вычисление функциональных интегралов с помощью сходящихся рядов // Фундамент. и прикл. матем. 1997. Т. 3. № 3. С. 693–713.
- [5] Белокуров В. В., Соловьёв Ю. П., Шавгулидзе Е. Т. Теория возмущений со сходящимися рядами для функциональных интегралов по фейнмановской мере // УМН. 1997. Т. 52. № 2. С. 153–154.
- [6] Belokurov V. V., Kamchatny V. V., Shavgulidze E. T., Solovyov Yu. P. Perturbation theory with convergent series for arbitrary values of coupling constant // Mod. Phys. Lett. A. 1997. V. 12. № 10. P. 661–672.
- [7] Эдвардс Р. Функциональный анализ. М.: Мир, 1969.
- [8] Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: belokur@rector.msu.su, solo@difgeo.math.msu.su,
 shav@mech.math.msu.su

Поступило
 11.09.1998
 Исправленный вариант
 13.01.2000