Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Розовская, Д. А. Шабанов, Об улучшении нижней оценки в задаче Косточки о полноцветных раскрасках гиперграфов, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 6, 948–950

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9161>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 12:41:17

Об улучшении нижней оценки в задаче Косточки о полноцветных раскрасках гиперграфов

А. П. Розовская, Д. А. Шабанов

1. Введение и формулировка основного результата. В работе исследуется известная задача экстремальной теории гиперграфов. Напомним, что *гиперграфом* называется пара множеств $H = (V, E)$, где $V = V(H)$ есть некоторое конечное множество, называемое *множеством вершин* гиперграфа, а $E = E(H)$ есть совокупность каких-то подмножеств множества V , и эти подмножества называются *ребрами* гиперграфа. Гиперграф является *n -равномерным*, если каждое его ребро содержит ровно n вершин.

Раскраска множества вершин гиперграфа в r цветов (*r -раскраска*) называется *полноцветной* для H , если в ней каждое ребро из E содержит вершины всех цветов. В работе Косточки [1] (см. также [2]) была поставлена задача об отыскании величины $p(n, r)$, равной минимальному числу ребер гиперграфа в классе n -равномерных гиперграфов, не имеющих полноцветных r -раскрасок, т.е.

$$p(n, r) = \min\{|E(H)| : H - n\text{-равномерный гиперграф, для которого не существует полноцветных } r\text{-раскрасок}\}.$$

Задача о нахождении величины $p(n, r)$ очень хорошо известна в случае $r = 2$. Величина $p(n, 2)$ совпадает с классической величиной $m(n)$, равной минимальному количеству ребер n -равномерного гиперграфа, вершины которого нельзя покрасить в два цвета, так чтобы все ребра были неоднородны. Задача об отыскании величины $m(n)$ была поставлена в 1961 г. Эрдешем и Хайналом в статье [3]. Наилучшие асимптотические оценки величины $m(n)$ были получены Эрдешем (верхняя оценка, [4]), а также Радхакришнаном и Сринивасаном (нижняя оценка, [5]):

$$(\sqrt{3} - 1) \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1/2} 2^{n-1} \leq p(n, 2) = m(n) \leq \frac{e \ln 2}{4} n^2 2^n (1 + o(1)). \quad (1)$$

Косточкой были получены соотношения для произвольного r . Используя связь между полноцветными r -раскрасками n -равномерных гиперграфов и предписанными раскрасками полных r -дольных графов, он обосновал (см. [1]) следующие оценки для $p(n, r)$ при $r \geq 2$ и $n \geq 2$:

$$\frac{1}{r} e^{c_1(n/r)} \leq p(n, r) \leq r e^{c_2(n/r)}, \quad (2)$$

где c_1 и c_2 – некоторые абсолютные положительные константы, причем $c_1 < 1 < c_2$.

Шабановым были получены (см. [6]) асимптотические верхние и нижние оценки $p(n, r)$ для случая $r = 3$, которые затем были обобщены в работе [7] на случай произвольного значения r . Нижняя оценка выполняется для всех $n, r \geq 2$, $r < n$, и имеет вид

$$p(n, r) \geq \frac{\sqrt{21} - 3}{4r} \left(\frac{n}{(r-1)^2 \ln n} \right)^{1/3} \left(\frac{r}{r-1} \right)^n. \quad (3)$$

Результат (3) асимптотически улучшает предыдущую оценку (2) при условии $r^2 = O(n/\ln n)$ (подробнее, см. [7]). Верхняя оценка из работы [7] была получена в следующей области

Работа первого автора выполнена при поддержке гранта Президента РФ (грант № МК-3429.2010.1). Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00294), Программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-8784.2010.1) и гранта Президента РФ (грант № МК-3429.2010.1).

значений функции $r = r(n)$: если $r = O(n^{2/3})$, то

$$p(n, r) \leq \frac{1}{r} \left(\frac{r}{r-1} \right)^n e(\ln r) \frac{n^2 + \sqrt{n^4 + 16n^3 r(r-1)}}{4(r-1)} \varphi, \quad (4)$$

где φ – некоторая функция от n и $r(n)$, стремящаяся к единице при $n \rightarrow \infty$. Результат (4) остается асимптотически наилучшим в области $r = O(n^{2/3})$.

Основным результатом данной работы является новая нижняя оценка величины $p(n, r)$.

ТЕОРЕМА 1. Для всех $n \geq 3$, $r \geq 2$ таких, что $r < n/(2 \ln n)$, выполнено

$$p(n, r) \geq \frac{1}{4r} \left(\frac{n}{(r-1)^2 \ln n} \right)^{1/2} \left(\frac{r}{r-1} \right)^n. \quad (5)$$

Нетрудно видеть, что данный результат асимптотически улучшает предыдущие результаты (2) и (3) при условии $r^2 = r^2(n) = o(n/\ln n)$. При этом оценка (5) улучшает (3) при $(r-1)^2 \leq (\sqrt{21}-3)^{-6} n/\ln n$. Отметим также, что в классическом случае $r = 2$ наша оценка (5) имеет тот же порядок роста, что и наилучшая нижняя оценка для $m(n) = p(n, 2)$ из (1), принадлежащая Радхакришнану и Сринивасану. Кроме того, с помощью (5) можно получить новые оценки числа вершин в полных многодольных графах с большим предписанным хроматическим числом (подробнее, см. [7]).

2. Условие существования полноцветной раскраски для реберных степеней.

Одно из первых достаточных условий существования полноцветной r -раскраски в общем случае было получено Эрдешем и Ловасом в их совместной работе [8]. Обозначим через $\Delta(H)$ максимальную степень ребра гиперграфа H . Напомним, что *степенью ребра* называется число других ребер гиперграфа, пересекающих данное ребро. В этих обозначениях теорема Эрдеша и Ловаса звучит следующим образом.

ТЕОРЕМА 2 (Эрдеш, Ловас, [8]). Если для n -равномерного гиперграфа H выполнено

$$\Delta(H) \leq \frac{r^{n-1}}{4(r-1)^n},$$

то для H существует полноцветная r -раскраска.

Улучшение теоремы 2 было получено Шабановым в [7].

ТЕОРЕМА 3 (Шабанов, [7]). Пусть $r \leq n/(8 \ln n)$ и H – n -равномерный гиперграф с условием

$$\Delta(H) \leq \frac{\sqrt{12}-3}{8r} \left(\frac{n}{(r-1)^2 \ln n} \right)^{1/3} \left(\frac{r}{r-1} \right)^n.$$

Тогда для H существует полноцветная r -раскраска.

Мы получаем дополнительное улучшение теоремы 3, ослабляя ограничение на максимальную степень ребра гиперграфа.

ТЕОРЕМА 4. Пусть даны произвольные натуральные числа $n \geq 3$ и $r \geq 2$, причем $r < n/(2 \ln n)$. Если n -равномерный гиперграф H удовлетворяет условию

$$\Delta(H) \leq \frac{\sqrt{13}-3}{32r} \left(\frac{n}{(r-1)^2 \ln n} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{r-1} \right)^n - 1, \quad (6)$$

то для H существует полноцветная r -раскраска.

Если $r^2 = o(n/\ln n)$, то ограничение (6) на $\Delta(H)$ в теореме 4, очевидно, асимптотически в $(n/((r-1)^2 \ln n))^{1/6}$ раз лучше ограничения на $\Delta(H)$ в теореме 3. Результат теоремы 4 может найти применение, например, в абстрактной теории автоматов (подробнее, см. [9]).

3. Идеи доказательств. Доказательства теорем 1 и 4 основаны на применении метода случайной перекраски вершин гиперграфа. Мы приведем алгоритм построения случайной r -раскраски, с помощью дальнейшего вероятностного анализа которого и были получены оценки (5) и (6).

Пусть $H = (V, E)$ – произвольный n -равномерный гиперграф, а σ – случайная нумерация множества V с равномерным распределением. Сначала покрасим каждую вершину гиперграфа случайным образом: независимо от других в один из r цветов с вероятностью $1/r$. Обозначим получившуюся случайную равномерную раскраску через ξ . Построим на ее основе другую раскраску, применив следующий алгоритм случайной перекраски:

- 1) рассматриваем вершины H по одной, согласно нумерации σ , т.е. на i -м шаге рассматриваем такую вершину v , что $\sigma(v) = i$;
- 2) если для вершины v выполнены оба следующих условия:
 - а) вершина v принадлежит ребру e , которое содержит вершины ровно $r - 1$ цвета в раскраске ξ (пусть, без ограничения общности, в e отсутствует только цвет α) и
 - б) ни на одном из предыдущих шагов ни одна вершина из e не перекрасилась в цвет α ,

то перекрашиваем вершину v следующим образом: с вероятностью p в один из $r - 1$ цветов, отличных от начального цвета v , и с вероятностью $1 - (r - 1)p$ вообще не перекрашиваем ее. Обозначим получившуюся после рассмотрения всех вершин случайную раскраску через χ .

Оставшаяся работа состоит в том, чтобы обосновать тот факт, что для некоторого значения параметра p с положительной вероятностью χ является полноцветной r -раскраской для H , если выполнено ограничение либо на число ребер (теорема 1), либо на максимальную степень ребра (теорема 4).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Kostochka, *Electron. J. Combin.*, **9**:1 (2002), Paper No. 9. [2] A. Kostochka, *More Sets, Graphs and Numbers*, Bolyai Soc. Math. Stud., **15**, Springer-Verlag, Berlin, 2006, 175–197. [3] P. Erdős, A. Hajnal, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **12**:1-2 (1961), 87–123. [4] P. Erdős, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **15**:3-4 (1964), 445–447. [5] J. Radhakrishnan, A. Srinivasan, *Random Structures Algorithms*, **16**:1 (2000), 4–32. [6] Д. А. Шабанов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:6 (2007), 183–222. [7] Д. А. Шабанов, *Матем. сб.*, **201**:4 (2010), 137–160. [8] P. Erdős, L. Lovász, *Infinite and Finite Sets*, v. II, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, **10**, North-Holland, Amsterdam, 1975, 609–627. [9] F. Gécseg, B. Imreh, A. Pluhár, *J. Autom. Lang. Comb.*, **3**:2 (1998), 77–84.

А. П. Розовская

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: anarozovski@gmail.com

Поступило

20.07.2010

Д. А. Шабанов

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: gold-amber@yandex.ru