Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. А. Сафонова, Асимптотическое интегрирование систем квазидифференциальных уравнений второго порядка, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 6, 951–953

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9162>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 18:17:48

Асимптотическое интегрирование систем квазидифференциальных уравнений второго порядка

Т. А. Сафонова

1. Введение. Пусть элементы матрицы $\sigma := (p_{ij})_{i,j=1}^n$ действительные, измеримые на полуоси $\mathbb{R}_+ := [0; +\infty)$ функции, удовлетворяющие следующим условиям:

- а) $p_{ij} = p_{ji}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$;
- б) $p_{ij}^2 \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$, т.е. для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ таких, что $\alpha \leq \beta$, p_{ij}^2 интегрируемы по Лебегу на $[\alpha, \beta]$.

Определим первую квазипроизводную заданной абсолютно непрерывной вектор-функции $y = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))^t$ ($y \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$; t – символ транспонирования) посредством матрицы σ , полагая $y_\sigma^{[1]} := y' - \sigma y$. Далее считая, что вектор-функция $y_\sigma^{[1]} = ((y_1)_\sigma^{[1]}, (y_2)_\sigma^{[1]}, \dots, (y_n)_\sigma^{[1]})^t$ уже определена и локально абсолютно непрерывна, определим вторую квазипроизводную $y_\sigma^{[2]}$ вектор-функции y и квазидифференциальное выражение $l[y]$, полагая

$$y_\sigma^{[2]} := (y_\sigma^{[1]})' + \sigma y_\sigma^{[1]} + \sigma^2 y, \quad l[y](x) := -y_\sigma^{[2]}(x), \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Множество $D := \{y \mid y, y_\sigma^{[1]} \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)\}$ является областью определения выражения l . Из условий а) и б) следует, что для вектор-функций $y \in D$ выражение $l[y](x)$ существует п.в., $l[y] \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$ и для $f, g \in D$ справедливо

$$\int_\alpha^\beta \{(l[f], g) - (f, l[g])\} = [f, g](\beta) - [f, g](\alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq \beta < \infty, \quad (1)$$

где $(g, h) = \sum_{s=1}^n g_s \bar{h}_s$ – скалярное произведение векторов g и h , а форма $[f, g]$ определена равенством $[f, g](x) := (f^{[1]}, g) - (f, g^{[1]})$ (тождество Грина).

Пусть далее матрица $\sigma_1 = (p_{ij}^{(1)})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, обладает теми же свойствами, что и матрица σ , а вектор-функции $y, y_{\sigma_1}^{[1]} := y' - \sigma_1 y$ определены и $y, y_{\sigma_1}^{[1]} \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Рассмотрим симметрические квазидифференциальные уравнения

$$l[y] = -(y_\sigma^{[1]})' - \sigma y_\sigma^{[1]} - \sigma^2 y = 0, \quad (2)$$

$$s[y] := -(y_{\sigma_1}^{[1]})' - \sigma_1 y_{\sigma_1}^{[1]} - \sigma_1^2 y = 0. \quad (3)$$

Данная работа посвящена установлению достаточных условий на коэффициенты матриц σ и σ_1 и фундаментальную систему решений уравнения (3), обеспечивающих асимптотическую близость решений уравнений (2) и (3). Полученные результаты применяются для построения примеров дифференциальных операторов, порожденных выражениями вида $-y'' + \phi y$, где ϕ – квадратная матрица второго порядка с элементами, содержащими δ -функцию, с дефектным числом $N = 4$.

Подробное исследование спектральных свойств оператора Штурма–Лиувилля со скалярным потенциалом σ' , где $\sigma \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+)$, а “’” означает производную в смысле теории распределений, проводилось в работах [1], [2]. В частности, в [2] несколькими эквивалентными способами корректно определяются операторы с такими потенциалами. При составлении уравнения (2) мы воспользовались одним из этих определений.

Отметим, что в случае скалярных дифференциальных уравнений второго порядка с непрерывными коэффициентами задача об условиях асимптотической близости их решений

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00790-а) и проекта АВЦП № 2.1.1/10641.

хорошо известна (см., например, [3; гл. 10, 11]). В работе [4] получены условия асимптотической близости решений двух скалярных квазидифференциальных уравнений второго порядка с негладкими комплекснозначными коэффициентами.

2. Теорема об асимптотической близости решений. Рассмотрим уравнения (2) и (3). Каждое из них равносильно системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{pmatrix} y \\ y_Q^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} Q & E \\ -Q^2 & -Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y_Q^{[1]} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где $Q = \sigma$ в случае уравнения (2) и $Q = \sigma_1$ в случае уравнения (3). Условие b) обеспечивает справедливость теоремы существования и единственности задачи Коши, поставленной в любой точке $\mathbb{R}_+$, для системы (4). Используя это, введем фундаментальную матрицу T со столбцами $(u_j, u_j^{[1]})^t$, $j = 1, 2, \dots, 2n$, где u_j – линейно независимые векторные решения уравнения (3) (напомним, что квазипроизводные определены посредством матрицы σ_1).

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть матрицы σ , σ_1 и T таковы, что¹

$$\int_0^{+\infty} \left\| T^{-1} \begin{pmatrix} \sigma - \sigma_1 & 0 \\ -\sigma^2 + \sigma_1^2 & -\sigma + \sigma_1 \end{pmatrix} T \right\| < +\infty. \quad (5)$$

Тогда для любых комплексных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}$ уравнение (2) имеет решение $\phi(x)$, удовлетворяющее условиям

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^{2n} [\alpha_j + a_j(x)] u_j, \quad \phi_\sigma^{[1]}(x) = \sum_{j=1}^{2n} [\alpha_j + a_j(x)] (u_j)_{\sigma_1}^{[1]}(x),$$

где $a_i(x) = o(1)$, $i = 1, 2, \dots, 2n$, при $x \rightarrow +\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Тожество (1) означает, что выражение l является формально-самосопряженным. Используя это и предполагая, что матрица

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix}$$

определена при помощи начальных данных $(u_j, u_j^{[1]})^t(0) = e_j$, где e_j , $j = 1, 2, \dots, 2n$, – канонический базис пространства $\mathbb{R}^{2n}$, можно показать, что обратная матрица к матрице T определяется равенством

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} T_4^t & -T_2^t \\ -T_3^t & T_1^t \end{pmatrix}.$$

3. Индексы дефекта. Символами L_0 и S_0 обозначим минимальные замкнутые симметрические операторы в гильбертовом пространстве $L_n^2(\mathbb{R}_+)$, порожденные выражениями $l[y]$ и $s[y]$ соответственно. Согласно [5], [6] дефектное число N оператора L_0 может принимать значения $n, n+1, \dots, 2n$ в зависимости от поведения коэффициентов матрицы σ . При этом N совпадает с максимальным числом линейно независимых решений уравнения

$$l[y] = \lambda y \quad (6)$$

с комплексным параметром λ ($\text{Im } \lambda \neq 0$), а если $N = 2n$, то все решения уравнения (6) принадлежат пространству $L_n^2(\mathbb{R}_+)$ при всех значениях λ . Можно доказать, что справедливо следующее следствие теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть справедливы условия теоремы 1. Тогда дефектное число оператора L_0 максимально в том и только том случае, когда дефектное число оператора S_0 максимально.

¹ $\|\cdot\|$ означает сумму абсолютных величин всех элементов матрицы.

4. Примеры. Пусть $n = 2$ и $\alpha > 2$, $0 < \beta < \alpha$. Определим матрицу σ_1 , полагая

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} -\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} \\ \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} & -\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \end{pmatrix}.$$

Пусть далее x_n , $n = 0, 1, \dots$, – возрастающая последовательность положительных чисел таких, что $x_0 = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$. Выберем произвольную точку $\nu_k \in [x_k; x_{k+1})$ и определим элементы $p_{ij}(x)$ матрицы σ , положив

$$p_{11}(x) = p_{22}(x) = -\frac{\nu_k^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad p_{12}(x) = p_{21}(x) = \frac{\nu_k^{\beta+1}}{\beta+1} \quad \text{при } x \in [x_k, x_{k+1}).$$

Предположим, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_{k+1}^{\alpha} (x_{k+1} - x_k)^2 < +\infty, \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_{k+1}^{2\alpha+1}}{(x_k^{\alpha} + x_k^{\beta})^{1/2}} (x_{k+1} - x_k)^2 < +\infty. \quad (8)$$

Можно доказать, что если матрицы σ и σ_1 удовлетворяют всем перечисленным выше условиям, то для них выполнено условие (5). Поэтому для них справедливо утверждение теоремы 1 и, в частности, утверждение следствия 1. Остается заметить, что оператор S_0 совпадает с минимальным симметрическим оператором, порожденным выражением $-y'' + \sigma'_1 y$ в пространстве $L^2_2(\mathbb{R}_+)$, с дефектным числом $N = 4$ (см. [7]). Если положить, например, $x_k = \ln k$, то условия (7) и (8) будут выполнены. Таким образом, дефектное число оператора L_0 также равно 4.

Таким образом, мы построили примеры реализации случая максимального дефектного числа для оператора L_0 , когда матрица σ такая, что

$$\sigma'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \beta_k & \gamma_k \end{pmatrix} \delta(x - x_k),$$

где “’” означает производную в смысле теории распределений, α_k , β_k , γ_k – некоторые вещественные постоянные.

В заключение автор выражает благодарность проф. Мирзоеву К. А. за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, *Матем. заметки*, **66:6** (1999), 897–912. [2] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, *Тр. ММО*, **64** (2003), 159–212. [3] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1970. [4] Н. Н. Конечная, *Матем. заметки* (в печати). [5] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969. [6] В. П. Серебряков, *Изв. вузов. Матем.*, 2000, № 3, 48–53. [7] M. S. P. Eastham, K. J. Gould, *J. Math. Anal. Appl.*, **91:2** (1983), 424–433.

Т. А. Сафонова

Поморский государственный университет
им. М. В. Ломоносова, г. Архангельск
E-mail: tanya.strelkova@rambler.ru

Поступило
08.12.2010